# 导数_题集3

# 试题

## T1

---

> 新月

已知 $a>0$，$e^x \geq x+1+x^2\ln(ax)$ 恒成立，则 $a$ 的最大值为 ______ .

## T2

---

> 新月

已知函数 $f(x)=(x+a)\ln x-2(x-1)$.
(1) 若 $a=1$，求 $f(x)$ 的单调区间
(2) 当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，求 $a$ 的取值范围
(3) 设 $n\in\mathbb{N}^*$，证明:

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}+\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}+\cdots+\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}<\ln\sqrt[4]{n+1}$$

## T3

---

> 新月

**2015年全国一卷(文科)**
设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的零点个数.
(2) 证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$

## T4

---

> 新月

已知函数 $f(x)=ax+\cos x(0\le x\le\pi,a\in\mathbb{R})$ .
(1) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间.
(2) 若函数 $f(x)$ 恰有两个极值点，记极大值和极小值分别为 $M,m$，求证：$2M-m\ge\frac{3}{2}$ .

# T5

---

上弦月

**2024年武汉二调**
已知函数 $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ .
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程.
(2) 证明：$f(x)$ 是定义域上的增函数.
(3) 若 $f(x)>a^x$，其中 $a>0$ 且 $a\ne 1$，求实数 $a$ 的值.

# T6

---

上弦月

**2022年”海明数学“高考模拟原创卷**
已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-ax(a>0)$ .
(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线过点 $(0,-\frac{3}{2})$，求 $x_0$ 的值.
(2) 已知 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，且 $f(x_1)-f(x_2)>\lambda a-\ln 2-\frac{3}{4}$，求正实数 $\lambda$ 的取值范围.

# T7

---

上弦月

证明：当 $0<a\le 1$ 时，$(x-1)e^{x-a}-\ln x\ge\ln a$

# T8

---

上弦月

**2014年天津卷**
设 $f(x)=x-ae^x(a\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R})$，已知函数 $y=f(x)$ 有两个零点 $x_1,x_2$，且 $x_1<x_2$ .
(1) 求 $a$ 的取值范围.

(2) 证明：$\frac{x_2}{x_1}$ 随着 $a$ 的减小而增大.
(3) 证明：$x_1+x_2$ 随着 $a$ 的减小而增大.

## T9

---

> 上弦月

**2023年星云线上模拟考试（改编）**
已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(x+1), 0\le x\le \frac{\pi}{2}$ .
(1) 证明：$f(x)\ge 0$ .
(2) 是否存在 $n\in\mathbb{N}^*$，使得

$$\ln 2<\sin\frac{1}{1\times 3}+\sin\frac{1}{2\times 4}+\cdots+\sin\frac{1}{n(n+2)}<\frac{3}{4}$$

说明理由.

# 答案

## T1

---

答案：$\frac{1}{2}e^{\frac{e^2-3}{4}}$
提示：分离参数即可。

## T2

---

答案：(1) 单调递增 (2) $[1,+\infty)$ (3) 略
提示：第二问给出了常见不等式 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}, x>1$（参见文章：常用导数不等式汇总）第三问的数列不等式比较简单，可以用单调性分析而不借助于第二问提供的不等式（参见文章：论导数题中的数列不等式），令

$$a_n=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}+\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}+\cdots+\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}-\ln\sqrt[4]{n+1}$$

则 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})^2}-\frac{1}{4}\ln\frac{n+2}{n+1}$ ，换元 $x=\frac{n+2}{n+1}>1$，则

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt{x}+1)}-\frac{1}{4}\ln x\\&<\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{4}\ln x\\&<0\end{aligned}$$

这可由常见不等式 $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$ 得到，只需把 $x$ 替换为 $\sqrt{x}$ . （参见文章：常用导数不等式汇总）
于是 $\{a_n\}$ 单调递减，有 $a_n \le a_1 = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} - \frac{1}{4}\ln 2 < 0$ ，得证。

## T3

---

答案：(1) $a \le 0$，无零点； $a > 0$，有一个零点. (2) 略
提示：
第一问，$f'(x) = 2e^{2x} - \frac{a}{x}$，显然 $a \le 0$ 时 $f'(x) > 0$ 无零点；若 $a > 0$ ，显然 $f'(x)$ 单调递增，容易观察得到两侧极限值：$x \to 0$ 时 $f'(x) \to -\infty$，$x \to +\infty$ 时 $f'(x) \to +\infty$，于是由零点存在性定理知 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一的零点。当然考试的时候为了防止扣分，最好不要使用极限，而是取点，下面是取点的过程：

预设 $x_1 < 1$，则 $f'(x_1) < 2e^2 - \frac{a}{x_1}$ ，于是取 $x_1 = \min\{1, \frac{a}{2e^2}\}$ ，就有 $f'(x_1) \le 0$ . 再预设 $x_2 > 1$，则 $f'(x_2) > 2e^{2x_2} - a$ ，于是取 $x_2 = \max\{1, \frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}\}$ ，就有 $f'(x_2) \ge 0$ .根据零点存在性定理得知存在 $x_0 \in [x_1, x_2]$ 使得 $f'(x_0) = 0$ .

第二问是一个隐零点问题. 由第一问可知当 $a > 0$ 时，函数 $f(x)$ 存在最小值 $f(x_0)$ ，其中隐零点 $x_0$ 满足 $f'(x_0) = 0$，即 $2e^{2x_0} = \frac{a}{x_0}$，优先考虑消去参数 $a$ ，把 $a$ 表示出来：$a = 2x_0e^{2x_0}$ .
于是

$$\begin{aligned} f(x_0) &= e^{2x_0} - a\ln x_0 \\ &= e^{2x_0} - 2x_0e^{2x_0}\ln x_0 \end{aligned}$$

我们要证明 $f(x_0) > 2a + a\ln\frac{2}{a}$，到这里会发现，如果把 $2a + a\ln\frac{2}{a}$ 中的 $a$ 也全部替换掉的话，会非常复杂。那么我们不妨转换思路，消去变量 $x_0$，如下：

$$\begin{aligned} f(x_0) &= e^{2x_0} - a\ln x_0 \\ &= \frac{a}{2x_0} + 2ax_0 + a\ln\frac{2}{a} \\ &\ge 2a + a\ln\frac{2}{a} \end{aligned}$$

第二个等号用到了隐零点 $x_0$ 满足的等量关系：$e^{2x_0} = \frac{a}{2x_0}$，$\ln x_0 = \ln\frac{a}{2} - 2x_0$ ，最后一个不等号用到了基本不等式。本题告诉我们隐零点问题不要一昧地把参数替换掉，有时反而需要把隐零点替换掉。

## T4

---

答案：(1) 单增区间是 $(0, \frac{\pi}{3})$ 和 $(\frac{2\pi}{3}, \pi)$，单减区间是 $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ . (2) 略
提示：第二问，$f'(x) = a - \sin x$，要有两个极值点，则 $0 < a < 1$，且两个极值点 $x_1, x_2$ 满足 $\sin x_1 = a$，$\sin x_2 = a$，推出 $x_1 + x_2 = \pi$ 。根据单调性，$x_1$ 是极大值点，$x_2$ 是极小值点。 于是

$$\begin{aligned}2M-m&=2f(x_1)-f(x_2)\\&=2f(x_1)-f(\pi-x_1)\\&=2(ax_1+\cos x_1)-[a(\pi-x_1)-\cos x_1]\\&=(3x_1-\pi)a+3\cos x_1\\&=(3x_1-\pi)\sin x_1+3\cos x_1\end{aligned}$$

其中使用了隐零点条件 $\sin x_1=a$ 消去了参数 $a$ 。 然后构造函数 $g(x)=(3x-\pi)\sin x+3\cos x$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，然后求导证明 $g(x)\geq\frac{3}{2}$ 即可。 值得一提的是本题的等号是能取到的，当且仅当 $x_1=\frac{\pi}{3}$，即 $a=\frac{1}{2}$ 时（也就是第一问的情形）函数 $f(x)$ 满足 $2M-m=\frac{3}{2}$ 。

# T5

---

答案：(1) $y=x+e-2$ (2) 略 (3) $\sqrt{e}$
提示：
第二问需要证明 $f'(x)\geq 0$，等价于不等式 $(x-1)e^x+1\geq 0$，这相当于常见不等式 $e^x\leq\frac{1}{1-x}(x<1)$ （参见文章 常用导数不等式汇总）另外还有一个大坑：题目需要我们证明 $f(x)$ 在整个定义域内单调递增，而这个定义域是被 $0$ 分开了，因此我们需要证明 $x>0$ 的部分比 $x<0$ 的部分大（否则就会像 $\frac{1}{x}$ 那样，虽然在两边分别是单减的，但在整个定义域内不是单减的）。这很好证明，注意到

- 当 $x>0$ 时，$\frac{e^x-1}{x}>\frac{x}{x}=1$
- 当 $x<0$ 时，$\frac{e^x-1}{x}<\frac{x}{x}=1$

第三问是典型的恒成立求参数取值范围问题，优先考虑分离参数。两边取对数后，容易得到

$$\ln a<\frac{\ln\frac{e^x-1}{x}}{x}$$

于是只需要求出右边函数的最小值即可。首先判别未定式，当 $x=0$ 时，右边的函数值是未定式 $\frac{0}{0}$，这里用到了极限 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ，此极限可以用洛必达法则或者泰勒公式求解。因此分参的做法可能会涉及到极限值 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{e^x-1}{x}}{x}$ 的求解，这里我们就放弃分参，转而使用分类讨论的做法。

如果直接构造函数 $g(x)=\frac{e^x-1}{x}-a^x$ 进行讨论，我们需要证明 $g(x)>0$ 恒成立，但是此函数的导数过于复杂，根本无法研究；

如果构造函数 $g(x)=e^x-1-xa^x$ ，我们需要证明：当 $x>0$ 时 $g(x)>0$；当 $x<0$ 时 $g(x)<0$ 。
求导得 $g'(x)=e^x-(x\ln a+1)a^x=a^x[(\frac{e}{a})^x-x\ln a-1]$，令 $h(x)=(\frac{e}{a})^x-x\ln a-1$， 求导得 $h'(x)=(\frac{e}{a})^x\ln\frac{e}{a}-\ln a$，到这里就可以讨论了：

- 若 $a>e$，则 $h'(x)$ 单调递增，由于 $x\to-\infty$ 时 $h'(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$ 时 $h'(x)\to+\infty$ ，故 $h'(x)$ 存在唯一零点 $x_0$，也是 $h(x)$ 的最小值点。注意到 $h(0)=0$，而且 $x_0>0$（这

可由 $h'(0)<0$ 得到）从而当 $0<x<x_0$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单减，$g(x)<g(0)=0$，不符合题意；

- 若 $a=e$，与上面同理，不符合题意；
- 若 $0<a<e$ 且 $a\neq 1$，$h'(x)$ 仍然是递增的，于是与上面同理，当 $h'(0)<0$，即 $a>\sqrt{e}$ 时不符合题意；当 $h'(0)>0$，即 $a<\sqrt{e}$ 时同理可分析出也不符合题意；只有 $a=\sqrt{e}$，即 $h'(0)=0$ 时，此时 $h(x)\geq h(0)=0$，$g(x)$ 单增，又因为 $g(0)=0$，所以 $x>0$ 时 $g(x)>0$；$x<0$ 时 $g(x)<0$，符合题意。

综上，$a=\sqrt{e}$ 。顺带一提，第三问的背景是不等式 $e^{2x}-2xe^{x}-1\geq 0$，此不等式的出现频率也比较高，建议记忆。

# T6

---

答案：(1) 1 (2) $(-\infty,\frac{\sqrt{2}}{2})$
提示：
第一问，$f'(x)=\frac{1}{x}+x-a$，切线为 $y=(x_0+\frac{1}{x_0}-a)(x-x_0)+\ln x_0+\frac{1}{2}x_0^2-ax_0$，把 $(0,-\frac{3}{2})$ 代入得 $-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}x_0^2-1+\ln x_0$ 。容易观察出有一个解为 $x_0=1$，但是需要严格证明只有这一个解。因此构造函数 $g(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$，求导 $g'(x)=\frac{1-x^2}{x}$，于是 $x=1$ 是 $g(x)$ 的最大值点，这就说明了 $g(x)$ 只有 $x=1$ 一个零点。

第二问，$f'(x)=\frac{x^2-ax+1}{x}$，因此两个极值点 $x_1,x_2$ 是一元二次方程 $x^2-ax+1=0$ 的两根。根据韦达定理，有 $x_1+x_2=a$，$x_1x_2=1$，由于 $x_1<x_2$，推出 $x_1<1<x_2$ 。我们有

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=\ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}(x_1-x_2)(x_1+x_2)-a(x_1-x_2)\\&=\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{a}{2}(x_1-x_2)\end{aligned}$$

下面需要利用之前的韦达定理进行消元。我们有 $a=x_1+\frac{1}{x_1}$，$x_2=\frac{1}{x_1}$，题目中的不等式：

$$\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{a}{2}(x_1-x_2)>\lambda a-\ln 2-\frac{3}{4}$$

转化为：

$$2\ln x_1-\frac{1}{2}(x_1^2-\frac{1}{x_1^2})>\lambda(x_1+\frac{1}{x_1})-\ln 2-\frac{3}{4}$$

这就是恒成立求参数取值范围的问题，优先考虑分离参数：

$$\lambda<\frac{2\ln x_1-\frac{1}{2}(x_1^2-\frac{1}{x_1^2})+\ln 2+\frac{3}{4}}{x_1+\frac{1}{x_1}}$$

然后辨别有无未定式，没有。于是可以放心地求解右边函数的最小值。令

$$g(x)=\frac{2\ln x-\frac{1}{2}(x^2-\frac{1}{x^2})+\ln 2+\frac{3}{4}}{x+\frac{1}{x}},\quad 0<x<1$$

求导得

$$g'(x) = \frac{(1-x^2)(2\ln x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2} + \ln 2 + \frac{3}{4})}{(x^2+1)^2}$$

其中 $2\ln x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2} + \ln 2 + \frac{3}{4}$ 单增且有零点 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，从而 $g(x)$ 的最小值为 $g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\lambda$ 的取值范围是 $(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 。

# T7

---

答案：略
提示：尝试以下几种思路：

- 分类讨论法：构造函数 $f(x) = (x-1)e^{x-a} - \ln x - \ln a$ 进行求导讨论，非常繁琐。
- 同构法：虽然指对混合，但本题无法同构。
- 变换主元法：把 $a$ 看作主元，构造函数 $f(a) = (x-a)e^{x-a} - \ln x - \ln a$ ，求导得 $f'(a) = e^{-a}[(1-x)e^x - \frac{e^a}{a}]$ ，容易证明 $\frac{e^a}{a} \geq e$，$(1-x)e^x \leq 1$，则 $f'(a) < 0$ ，$f(a)$ 单调递减，$f(a) \geq f(1) = (x-1)e^{x-1} - \ln x$ ，求导容易证明 $(x-1)e^{x-1} - \ln x \geq 0$ 。
- 放缩法(加强不等式精度)：根据常见不等式：$\ln x \leq x-1$，我们有 $\ln(ax) \leq ax-1$，故只需要证明 $(x-1)e^{x-a} \geq ax-1$ 即可，而这个不等式直接构造函数 $g(x) = (x-1)e^{x-a} - ax + 1$ 就能轻松证明。

# T8

---

答案：(1) $(0, \frac{1}{e})$ (2) 略 (3) 略
提示： 本题非常经典。
第二、三问属于极值点偏移中比较精细的问题，因此采用差值换元（参见文章 论极值点偏移）设 $t = x_2 - x_1 > 0$， 可得

$$x_1 = \frac{t}{e^t - 1}$$
$$x_2 = \frac{te^t}{e^t - 1}$$
$$a = \frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_2}{e^{x_2}}$$

由第一问的讨论可知 $0 < x_1 < 1 < x_2$，当 $a$ 减小时，$\frac{x_1}{e^{x_1}}$ 减小，由函数 $\frac{x}{e^x}$ 的单调性可知 $x_1$ 减小，
再由函数 $\frac{t}{e^t-1}$ 的单调性可知当 $x_1$ 减小时，$t$ 增大，所以 $t$ 随着 $a$ 的减小而增大。

- $\frac{x_2}{x_1} = e^t$，随着 $t$ 的增大而增大，从而随着 $a$ 的减小而增大。
- $x_1 + x_2 = \frac{t(e^t+1)}{e^t-1}$ 随着 $t$ 的增大而增大，从而随着 $a$ 的减小而增大。

这道题目本质上需要根据 $a$ 的增减判断出 $t$ 的增减，然后由于 $x_1$ 和 $x_2$ 都表示成了 $t$ 的函数，那么由 $x_1, x_2$ 组成的任何式子都能表示成 $t$ 的函数，从而可以求导判断单调性。然而比较巧妙的地方是，尽管 $a$ 能够表示成 $t$ 的函数：

$$a = \frac{e^{x_1}}{x_1} = \frac{e^{\frac{t}{e^t-1}}}{\frac{t}{e^t-1}}$$

但我们没有直接研究 $a$ 与 $t$ 之间的增减性关系（因为上面的函数太复杂了），而是先研究 $a$ 与 $x_1$ 之间的增减性关系，再研究 $x_1$ 与 $t$ 之间的增减性关系，从而间接地得到 $a$ 与 $t$ 之间的增减性关系。这其实利用了复合函数的“同增异减”。

# T9

---

答案：(1) 略 (2) 略
提示：
第一问直接求导 $f'(x) = \frac{(x+1)\cos x - 1}{x+1}$ ，令 $g(x) = (x+1)\cos x - 1$，
$g'(x) = \cos x - (x+1)\sin x$，显然 $g'(x)$ 单调递减，由 $g'(0) = 1 > 0$，$g'(\frac{\pi}{2}) = -1 - \frac{\pi}{2} < 0$，
知 $g(x)$ 先增后减，再由 $g(0) = 0$，$g'(\frac{\pi}{2}) = -1$，知 $f(x)$ 先增后减；于是
$f(x) \geq \min\{f(0), f(\frac{\pi}{2})\} = 0$ 。

第二问，对于右侧不等式，使用常见不等式 $\sin x \leq x(0 \geq x \leq \frac{\pi}{2})$ 可得

$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{1\times3} + \sin\frac{1}{2\times4} + \cdots + \sin\frac{1}{n(n+2)} &< \frac{1}{1\times3} + \frac{1}{2\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} \\ &< \frac{3}{4}\end{aligned}$$

对于左侧不等式，显然需要使用题目第一问提供的不等式 $\sin x \geq \ln(x+1)$ ，可得

$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{1\times3} + \sin\frac{1}{2\times4} + \cdots + \sin\frac{1}{n(n+2)} &> \ln\frac{2^2}{1\times3} + \ln\frac{3^2}{2\times4} + \cdots + \ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= \ln\frac{2(n+1)}{n+2}\end{aligned}$$

但我们发现 $\ln\frac{2(n+1)}{n+2} < \ln 2$，不等号方向反了，意味着放缩放过头了，需要提高放缩精度。而提高精度通常有两种方案：

- 选用精度更高的不等式
- 放项

第一种方案肯定不行，因为题目明确提示了不等式 $\sin x \geq \ln(x+1)$，而且对于这个不等式我们也没有好的手段进行加强。
所以考虑放项，这里我们保留第一项不参与放缩，则：

$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{1\times 3}+\sin\frac{1}{2\times 4}+\cdots+\sin\frac{1}{n(n+2)} &< \sin\frac{1}{1\times 3}+\ln\frac{3^2}{2\times 4}+\cdots+\ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= \sin\frac{1}{3}+\ln\frac{3(n+1)}{2(n+2)}\end{aligned}$$

我们令

$$\sin\frac{1}{3}+\ln\frac{3(n+1)}{2(n+2)}>\ln 2$$

解得

$$n>\frac{8-3e^{\sin\frac{1}{3}}}{3e^{\sin\frac{1}{3}}-4}$$

所以，对于所有 $n>\frac{8-3e^{\sin\frac{1}{3}}}{3e^{\sin\frac{1}{3}}-4}$ ，都有

$$\ln 2<\sin\frac{1}{1\times 3}+\sin\frac{1}{2\times 4}+\cdots+\sin\frac{1}{n(n+2)}<\frac{3}{4}$$

恒成立。

注1：$\frac{8-3e^{\sin\frac{1}{3}}}{3e^{\sin\frac{1}{3}}-4}\approx 43.53$
注2：利用计算机可得满足不等式

$$\ln 2<\sin\frac{1}{1\times 3}+\sin\frac{1}{2\times 4}+\cdots+\sin\frac{1}{n(n+2)}<\frac{3}{4}$$

的最小正整数 $n$ 为 $19$