

一道经典的解三角形问题与外森比克不等式

下面的题目来自2017年江苏省盐城市一模的填空压轴：

{}

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $a^2 + b^2 + 2c^2 = 8$ ，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____。

{}

这道题目非常经典，这么多年来，很多考试都出过与本题类似的题目。

做法如下：首先用余弦定理把 c^2 替换：

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + 2(a^2 + b^2 - 2ab \cos C) &= 8 \\3(a^2 + b^2) - 4ab \cos C &= 8\end{aligned}$$

然后用基本不等式，把 $a^2 + b^2$ 转换成 ab ：

$$\begin{aligned}6ab - 4ab \cos C &\leq 8 \\ab &\leq \frac{8}{6 - 4 \cos C}\end{aligned}$$

三角形的面积用公式 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ 计算：

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}ab \sin C \\&\leq \frac{4 \sin C}{6 - 4 \cos C}\end{aligned}$$

下面考虑求解函数 $f(x) = \frac{4 \sin x}{6 - 4 \cos x}$ ($0 < x < \pi$) 的最大值。可以用导数，也可以使用辅助角公式：

$$\begin{aligned}S &\leq \frac{4 \sin C}{6 - 4 \cos C} \\6S &\leq 4 \sin C + 4S \cos C \\6S &= 4\sqrt{S^2 + 1} \sin(C + \varphi) \\6S &\leq 4\sqrt{S^2 + 1}\end{aligned}$$

解得 $S \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，从而 S 的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，当且仅当 $\tan C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 且 $a = b$ 时取到最值。

本题的背景是三角形中的 **外森比克不等式**(Weitzenboeck Inequality)：

{}

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot S$$

{}

其中的 a, b, c 是三角形的三条边， S 是三角形的面积。等号成立当且仅当 $a = b = c$ ，即等边三角形。

例如，如果有题目如下：

{}

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a^2 + b^2 + c^2 = 8$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____.

{}

根据外森比克不等式, 有 $S \leq \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot 8 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

但是, 如果 a, b, c 系数一般化, 像开篇给出的题目一样, 最简单的外森比克不等式就不适用了, 这时就需要用到外森比克不等式的推广, 称为 **奥本海姆不等式**(Oppenheim Inequality):

{}

$$xa^2 + yb^2 + zc^2 \geq 4\sqrt{xy + yz + zx} \cdot S$$

{}

其中, a, b, c 是三角形的三边, x, y, z 是任意正实数, S 是三角形的面积。等号成立的条件在此不给出。

例如, 对于开篇的题目, 只需要令 $x = 1, y = 1, z = 2$, 就有

$$a^2 + b^2 + 2c^2 \geq 4\sqrt{5} \cdot S$$

由此得到 $S \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

下面我们对奥本海姆不等式给出证明。证明的思路与之前一模一样: 首先用余弦定理把 c^2 替换:

$$\begin{aligned} xa^2 + yb^2 + zc^2 &= xa^2 + yb^2 + z(a^2 + b^2 - 2ab \cos C) \\ &= (x + z)a^2 + (y + z)b^2 - 2abz \cos C \end{aligned}$$

然后用基本不等式 $(x + z)a^2 + (y + z)b^2 \geq 2\sqrt{(x + z)(y + z)}ab$, 就有:

$$\begin{aligned} xa^2 + yb^2 + zc^2 &\geq \left(2\sqrt{(x + z)(y + z)} - 2z \cos C\right)ab \\ ab &\leq \frac{xa^2 + yb^2 + zc^2}{2\sqrt{(x + z)(y + z)} - 2z \cos C} \end{aligned}$$

三角形的面积用公式 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ 计算:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab \sin C \\ &\leq \frac{(xa^2 + yb^2 + zc^2) \sin C}{4\sqrt{(x + z)(y + z)} - 4z \cos C} \end{aligned}$$

然后利用辅助角公式:

$$\begin{aligned}
S \cdot (4\sqrt{(x+z)(y+z)} - 4z \cos C) &\leq (xa^2 + yb^2 + zc^2) \sin C \\
4\sqrt{(x+z)(y+z)} \cdot S &\leq (xa^2 + yb^2 + zc^2) \sin C + 4zS \cos C \\
4\sqrt{(x+z)(y+z)} \cdot S &\leq \sqrt{(xa^2 + yb^2 + zc^2)^2 + 16z^2 S^2} \sin(C + \varphi) \\
4\sqrt{(x+z)(y+z)} \cdot S &\leq \sqrt{(xa^2 + yb^2 + zc^2)^2 + 16z^2 S^2} \\
4\sqrt{xy + yz + zx} \cdot S &\leq xa^2 + yb^2 + zc^2
\end{aligned}$$

证毕！读者可以根据上面的过程，自行推断出等号成立的条件。