

论极值点偏移

下载PDF

极值点偏移是非常非常套路化的题目。一般来说，掌握**构造函数**和**比值/差值换元**这两种方法，即可轻松解决绝大多数的极值点偏移问题。当然，本文还会介绍其它方法，以及一些稍难的题目。

常见的情况是已知 $f(x_1) = f(x_2)$ ，证明 $x_1 + x_2 > 2x_0$ （其中 x_0 为极值点）；或者 $x_1 x_2 > x_0^2$ 。当然这里的不等号可以反向。2021年新高考一卷最后一题是 $x_1 + x_2$ 型的，2022年全国甲卷最后一题是 $x_1 x_2$ 型的。

认真阅读完本文后，你应该能轻松解决绝大多数极值点偏移问题。

0.起源

下面这道题来自于2010年天津高考，开创了极值点偏移类问题的先河。

{}

已知函数 $f(x) = xe^x (x \in \mathbb{R})$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(2) 已知函数 $y = g(x)$ 的图像与函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称，证明当 $x > 1$ 时， $f(x) > g(x)$ ；

(3) 如果 $x_1 \neq x_2$ ，且 $f(x_1) = f(x_2)$ ，证明 $x_1 + x_2 > 2$ 。

{}

在阅读完本文的第一节后，你就可以回头解决这道题目。

顺带一提，天津卷的导数题出的**非常非常好**，远胜于全国卷，开创了很多题型。除了极值点偏移，浙江卷最喜欢考的零点不等式问题也源自于天津卷。我推荐B站上一位博主：[夏老师的数学课](#)，他做视频详细解析了2010年到2021年的天津卷导数题。

1.构造函数

这种方法的本质是**消元**。例如要证明 $x_1 + x_2 > 2x_0$ ，这里有两个变量 x_1, x_2 ，因此做如下处理：把其中一个变量移到不等式另一边，例如 $x_1 > 2x_0 - x_2$ ，此时如果两边的 x_1 和 $2x_0 - x_2$ 均落在原函数 $f(x)$ 的同一单调区间内，我们就可以在不等式两边套上 f ，即比较 $f(x_1)$ 和 $f(2x_0 - x_2)$ 的大小。而题目条件一般是 $f(x_1) = f(x_2)$ ，于是比较 $f(x_2)$ 和 $f(2x_0 - x_2)$ 的大小。此时已经成功消元，于是构造函数

$$g(x) = f(x) - f(2x_0 - x)$$

其中定义域应该是 x_2 的取值范围。之后证明 $g(x)$ 恒大于0或者小于0即可。

如果要证明的不等式是 $x_1 x_2 > x_0^2$ 类型的，可以转化成 $x_1 > \frac{x_0^2}{x_2}$ ，如果两边的式子位于同一单调区间内，则构造函数 $g(x) = f(x) - f(\frac{x_0^2}{x})$ 。

下面先举两个简单的例子，分别是 $x_1 + x_2$ 型和 $x_1 x_2$ 型。

{}

已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ ，证明 $x_1 + x_2 > 2$ 。

{}

先考虑 $f(x)$ 的单调性。求导 $f'(x) = e^x - a$ ，要保证有两个零点，必须 $a > 0$ ，且最小值 $f(a) < 0$ ，解得 $a > e$ 。于是 $f(x)$ 先减后增，极小值点为 $\ln a > 1$ 。不妨设 $x_1 < x_2$ ，则 $x_1 < \ln a < x_2$ 。要证明 $x_1 + x_2 > 2$ ，可以转化为 $x_1 > 2 - x_2$ 。由于 $x_2 > \ln a > 1$ ，故 $2 - x_2 < 1$ ， x_1 和 $2 - x_2$ 都落在单减区间上，转化为证明 $f(x_1) < f(2 - x_2)$ ，再用 $f(x_1) = f(x_2)$ 转化为证明 $f(x_2) < f(2 - x_2)$ 。构造函数

$$g(x) = f(x) - f(2 - x) \quad x > \ln a$$

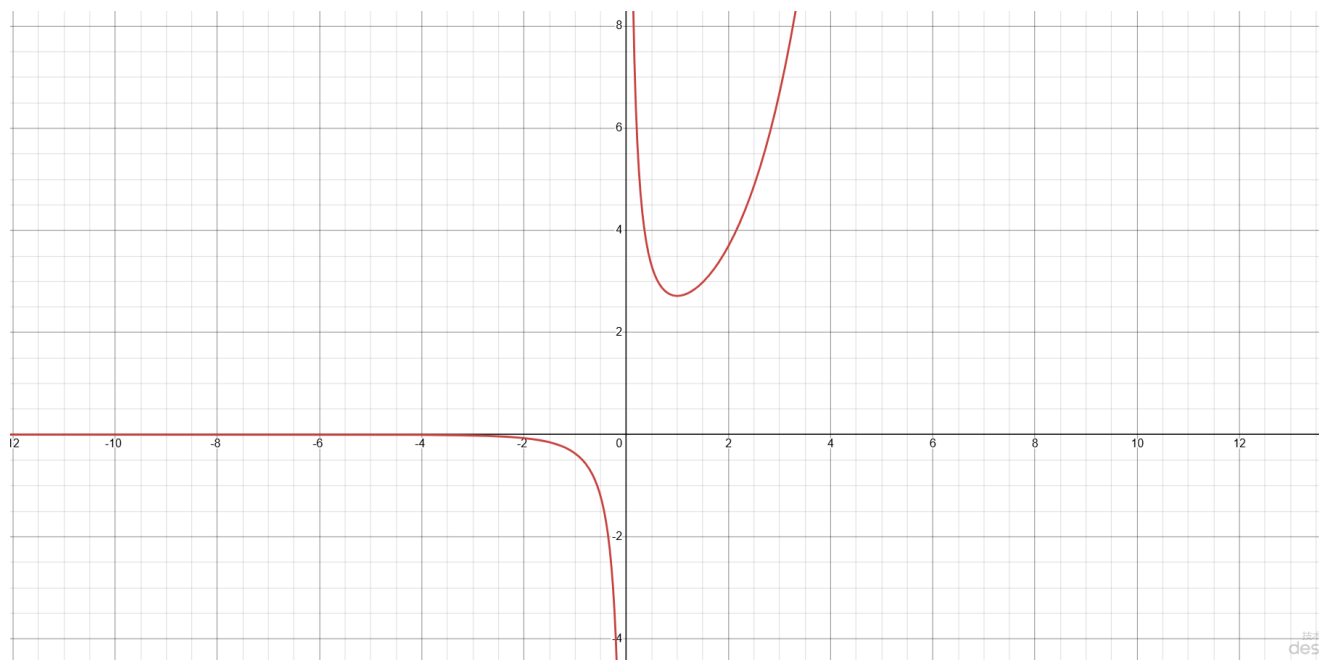
上面定义域 $x > \ln a$ 的原因是 $g(x)$ 相当于把 x_2 看成自变量 x 。现在只需要证明 $g(x) > 0$ 恒成立即可。求导 $g'(x) = e^x - e^{2-x}$ ，由于 $x > 1$ ，易知 $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单增，故 $g(x) > g(1) = 0$ ，得证。

{}

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ ，若 $f(x_1) = f(x_2)$ ， $x_1 \neq x_2$ ，证明 $x_1 x_2 > 1$ 。

{}

先考虑 $f(x)$ 的单调性。求导 $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ ，先减后增，极值点为 1，图像如下



不妨设 $x_1 < x_2$ ，从图像可以看出 $0 < x_1 < 1 < x_2$ 。要证明 $x_1 x_2 < 1$ ，转化为 $x_1 < \frac{1}{x_2}$ ，两边都落在单减区间上，转化为 $f(x_1) > f(\frac{1}{x_2})$ ，再利用 $f(x_1) = f(x_2)$ 转化为 $f(x_2) > f(\frac{1}{x_2})$ 。

构造函数

$$g(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \quad x > 1$$

只需要证明 $g(x) < 0$ 恒成立。求导 $g'(x) = \frac{(x-1)(e^x - xe^{\frac{1}{x}})}{x^2}$ 。其中 $e^x - xe^{\frac{1}{x}}$ 恒正，因为

$$e^x - xe^{\frac{1}{x}} = e^{x-1} \cdot e - xe^{\frac{1}{x}} \geq x \cdot e - xe^{\frac{1}{x}} = x(e - e^{\frac{1}{x}}) > 0$$

上面用到了常见不等式 $e^x \geq x + 1$ 。于是 $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单增， $g(x) > g(1) = 0$ ，得证。

下面举两个近几年高考的例子

{{}}

(2021年新高考一卷)已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$ 。

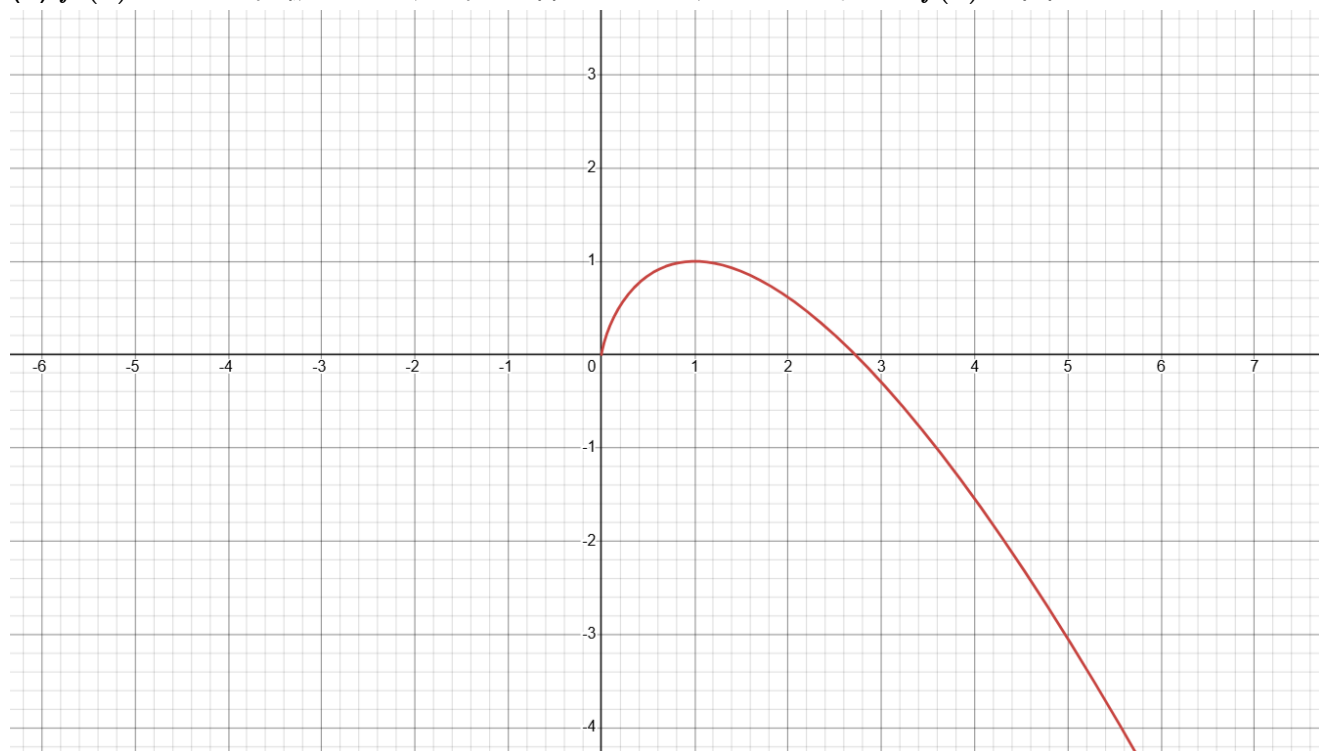
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性。

(2) 设 a, b 为两个不相等的正数，且 $b \ln a - a \ln b = a - b$ ，证明 $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$ 。

{{}}

解析：

(1) $f'(x) = -\ln x$ ，极大值点为1，先增后减。可以在草稿纸上把 $f(x)$ 的图像画出来：



这里要注意当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) \rightarrow 0$ ，这是因为 $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ 。这个极限需要记住。

(2) 先把题目的条件整理一下：

$$\frac{\ln a + 1}{a} = \frac{\ln b + 1}{b}$$

于是可以设函数 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ ，这样就有 $g(a) = g(b)$ 。但这样做的坏处是，我们要证明的式子就不是 $x_1 + x_2$ 类型的，而是 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 类型的。

我们发现题目给的 $f(x)$ 还没用上，导数题的上下文是有联系的， $f(x)$ 的作用不可能只是用来出第一问送分。考虑 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的关系，容易发现 $f(\frac{1}{x}) = g(x)$ 。于是 $g(a) = g(b)$ 变成了 $f(\frac{1}{a}) = f(\frac{1}{b})$ ，如果设 $x_1 = \frac{1}{a}$ ， $x_2 = \frac{1}{b}$ 并且不妨设 $x_1 < x_2$ ，那么我们要证明的式子就变成了

$$2 < x_1 + x_2 < e$$

这就是标准的 $x_1 + x_2$ 类型。本题还有一个比较特别的地方是，上面是一个双边不等式，意味着我们需要分别对左右两边的不等式进行证明。 $f(x)$ 的极值点是 1，于是左边不等式是常规的极值点偏移不等式，应该是非常好证的，我们就从左边不等式开始开始。

$x_1 + x_2 > 2$ 等价于 $x_2 > 2 - x_1$ ，由于我们预设了 $x_1 < x_2$ ，而它们位于极值点 1 的左右两侧，以及零点 e 的左侧，故 $x_1 < 1 < x_2 < e$ ， $2 - x_1 > 1$ ，这意味着 $x_1, 2 - x_1$ 都位于 $f(x)$ 极值点右侧的单减区间上，两边套上 f ，转化为证明 $f(x_2) < f(2 - x_1)$ ，又因为 $f(x_1) = f(x_2)$ ，转化为证明 $f(x_1) < f(2 - x_1)$ 。构造函数

$$h(x) = f(x) - f(2 - x) \quad 0 < x < 1$$

注意上面 $0 < x < 1$ 的原因是我们把 x_1 看作自变量。下面只需要证明 $h(x) < 0$ 恒成立即可。对其求导 $h'(x) = \ln \frac{2-x}{x} > 0$ 恒成立，故 $h(x) < h(1) = 0$ ，左边不等式得证。

再来看右边的不等式 $x_1 + x_2 < e$ ，如果把它写成 $x_1 < e - x_2$ ，这时候不等号两边不一定位于同一单调区间内，因为 $e - x_2$ 不是一定小于 1 的，但是如果 $e - x_2 \geq 1$ ，也就是 $x_2 \leq e - 1$ ，由于 $x_1 < 1$ ，故此时一定有 $x_1 + x_2 < e$ 。所以下面只需要考虑 $e - x_2 < 1$ 的情况，此时 x_1 和 $e - x_2$ 均落在单增区间上，只需要证明 $f(x_1) < f(e - x_2)$ ，等价于 $f(x_2) < f(e - x_2)$ ，于是构造函数

$$l(x) = f(x) - f(e - x) \quad e - 1 < x < e$$

只需要证明 $l(x) < 0$ 恒成立。求导 $l'(x) = \ln \frac{e-x}{x} < 0$ 恒成立，则

$l(x) < l(e - 1) = f(e - 1) - f(1)$ ，由于 $f(1)$ 是 $f(x)$ 的最大值，故 $l(x) < 0$ 。右边不等式得证。

{{}}

(2022年全国甲卷)已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x + x - a$ 。

(1) 若 $f(x) \geq 0$ ，求 a 的取值范围。

(2) 证明：若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 ，则 $x_1 x_2 < 1$ 。

{{}}

解析：

(1) $f'(x) = \frac{(x-1)(e^x+x)}{x^2}$ ，先减后增，最小值 $f(1) = e + 1 - a \geq 0$ ，得 $a \leq e + 1$ 。

(2) 条件是 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 要证明 $x_1 x_2 < 1$, 转化为 $x_1 < \frac{1}{x_2}$, 由于 $x_1, \frac{1}{x_2}$ 均位于单减区间上, 转化为 $f(x_1) > f(\frac{1}{x_2})$, 即 $f(x_2) > f(\frac{1}{x_2})$, 构造函数

$$h(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \quad x > 1$$

只需要证明 $h(x) > 0$ 恒成立即可。求导 $h'(x) = \frac{(x-1)(e^x + x - e^{\frac{1}{x}} - 1)}{x^2}$, 显然 $e^x + x - e^{\frac{1}{x}} - 1 > 0$, $h'(x) > 0$, 故 $h(x)$ 单增, $h(x) > h(1) = 0$, 证毕。

现在, 你可以回到[第 0 节](#), 独立完成2010年天津卷导数题的第三问。

2. 比值换元/差值换元

换元 $t = \frac{x_1}{x_2}$ 或者 $t = x_1 - x_2$ 。这种方法适用于特定类型的函数。比值换元一般适用于形如 $a \ln x + bx + \frac{c}{x}$ 的函数; 差值换元一般适用于形如 $ae^x + bx$ 的函数。

一般分为两种情形: 要证明的不等式带参数, 例如 $x_1 + x_2 > 2a$; 以及不带参数的情况, 例如 $x_1 + x_2 > 2$ 。下面分别加以说明

不带参数

这是之前的例子, 现在我们用新的方法来做这道题目。

根据条件 $f(x_1) = f(x_2)$, 有

$$\begin{cases} e^{x_1} - ax_1 = 0 \\ e^{x_2} - ax_2 = 0 \end{cases}$$

消去 a , 得 $e^{x_1 - x_2} = \frac{x_1}{x_2}$ 。作换元 $t = x_1 - x_2$, 不妨设 $x_1 > x_2$, 则 $t > 0$ 。代入 t 得到

$$e^t = \frac{t + x_2}{x_2}$$

解得 $x_2 = \frac{t}{e^t - 1}$, $x_1 = t + x_2 = \frac{te^t}{e^t - 1}$ 。要证明 $x_1 + x_2 > 2$, 现在转化为证明

$$\frac{t(e^t + 1)}{e^t - 1} > 2$$

如果直接求左边函数的最小值，会发现最小值在 $t = 0$ 时取到，需要用洛必达法则或者其它高等数学的手段求极限。为了避免使用超纲知识，我们把分母挪下来，变成

$$t(e^t + 1) - 2(e^t - 1) > 0$$

然后构造函数 $g(t) = t(e^t + 1) - 2(e^t - 1)$ ， $t > 0$ ，证明 $g(t) > 0$ 恒成立即可。后面省略。

带参数

这种情形的思路是根据条件 $f(x_1) = f(x_2)$ 把参数提取出，表示成 x_1, x_2 的表达式，再代入需要证明的不等式中。说白了就是消元。注意，与不带参数的情况不同，此时我们进行换元的时候一般不是在处理条件 $f(x_1) = f(x_2)$ 的时候，而是把参数代入不等式后。看下面一个题目：

{}

已知函数 $f(x) = \ln x - ax$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ ，证明：

(1) $x_1 + x_2 > \frac{2}{a}$

(2) $x_1 x_2 < \frac{1}{a^2}$

{}

解析：

根据题意我们有

$$\begin{cases} \ln x_1 - ax_1 = 0 \\ \ln x_2 - ax_2 = 0 \end{cases}$$

写成连等式

$$a = \frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2}$$

如果直接把 $a = \frac{\ln x_1}{x_1}$ 代入待证不等式 $x_1 + x_2 > \frac{2}{a}$ 中，不妥，因为另一个等式 $a = \frac{\ln x_2}{x_2}$ 没有用上。为了同时利用上两个等式，我们使用**等比定理**：

$$\text{若 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ 则 } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

根据等比定理，有

$$a = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$$

这样做还可以保持 x_1, x_2 的对称性。下面先证 $x_1 + x_2 > \frac{2}{a}$ ，把 a 代入，得

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}$$

可以看到代入 a 后，不等式还是对称的。如果上面不使用等比定理，而是直接把 $a = \frac{\ln x_1}{x_1}$ 或者 $\frac{\ln x_2}{x_2}$ 代入的话，不等式的对称性就被破坏了。现在两边同除 x_2 ，再换元 $t = \frac{x_1}{x_2}$ （看到了吗，换元的时机与不带参数的情况不一样），不妨设 $x_1 > x_2$ ，则 $t > 1$ ，只需要证明

$$\frac{t+1}{2} > \frac{t-1}{\ln t}$$

可以构造函数 $g(t) = (t+1)\ln t - 2(t-1)$ ， $t > 1$ ，求导证明 $g(t) > 0$ 恒成立，略过。

再证 $x_1 x_2 < \frac{1}{a^2}$ ，代入 a 后，只需要证明

$$\sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}$$

即

$$\sqrt{t} < \frac{t-1}{\ln t}$$

构造函数 $h(t) = \sqrt{t}\ln t - t + 1$ ， $t > 1$ ，求导证明 $h(t) < 0$ 恒成立，略过。

从本题可以总结出下面这个不等式：对任意 $a, b > 0$ ， $a \neq b$ ，有

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$$

称为**对数平均不等式**。

换元法的优势是，可以把 x_1, x_2 转换成具体的函数表达式，这意味着我们能做一些比较精细的事情，有些比较难的问题甚至只能使用换元法解决，例如下面这道本人命制的题目：

{{}}

已知 $f(x) = \ln x - x$ ，若对任意 $x_1 \neq x_2$ 且 $f(x_1) = f(x_2)$ 都有 $x_1^a + x_2^a > 2$ ，求实数 a 的取值范围。

{{}}

答案是 $(-\infty, 0] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$ 。这道题目难度比较大，限于篇幅，这里不给出过程，或许以后会专门写一篇文章解答这道题。

3. 变体

以现在的考试难度，直接考 $x_1 + x_2$ 或 $x_1 x_2$ 型的概率不大。本节讨论那些非常规的情况。

{{}}

已知函数 $f(x) = (x-1)^2 e^x - x$ ， x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明： $f'(\frac{x_1+x_2}{2}) > -1$ 。

{{}}

解析：

首先我们要确定两个零点 x_1, x_2 的范围。求导 $f'(x) = (x^2 - 1)e^x - 1$ ，正负性不显然，于是我们继续求二阶导 $f''(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x$ ，虽然正负性可求，但零点过于复杂。比较好的方法是不直接对 $f(x)$ 求导，而是考虑 $g(x) = (x - 1)^2 - \frac{x}{e^x}$ ，容易发现 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的零点是相同的。对 $g(x)$ 求导 $g'(x) = (x - 1)(2 + \frac{x}{e^x})$ ，则 $g(x)$ 先减后增，极小值点为 1， $g(x)_{\min} = g(1) = -\frac{1}{e} < 0$ ，在两侧的无穷处 $g(x)$ 都趋向于 $+\infty$ ，于是 $g(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 ，不妨设 $x_1 < x_2$ ，则 $x_1 < 1 < x_2$ 。

现在着手证明 $f'(\frac{x_1+x_2}{2}) > -1$ ，也就是

$$\left[\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - 1\right]e^{\frac{x_1+x_2}{2}} > 0$$

注意到如果 $x_1 + x_2 > 2$ 的话，不等式就成立。于是我们可以尝试证明 $x_1 + x_2 > 2$ 。这里的 2 恰好是 $g(x)$ 的极值点的两倍，到这里应该能明白，本题的 $f(x)$ 不过是一个障眼法，真正的主函数是我们构造的 $g(x)$ 。下面就是极值点偏移的常规操作了，把 $x_1 + x_2 > 2$ 转化成 $x_2 > 2 - x_1$ ，两边都落在 $g(x)$ 的单增区间上，转化成 $g(x_2) > g(2 - x_1)$ ，再用 $g(x_1) = g(x_2) = 0$ 转化成 $g(x_1) > g(2 - x_1)$ ，构造函数

$$h(x) = g(x) - g(2 - x) \quad x < 1$$

求导证明 $h(x) > 0$ 恒成立即可，过程略。

本题最大的难点是把 $(x - 1)^2 e^x - x$ 的零点转化为 $(x - 1)^2 - \frac{x}{e^x}$ 的零点，要想在有限的考试时间内想到这一步，需要对常见函数的导数极其熟悉，能看出 $\frac{x}{e^x}$ 的导数含有 $x - 1$ ，与 $(x - 1)^2$ 的导数提取公因式。

{}

已知函数 $f(x) = \ln x + (2 - a)x - ax^2$ ，若 $f(x_1) = f(x_2)$ ， $x_1 \neq x_2$ ，证明： $f'(\frac{x_1+x_2}{2}) < 0$

{}

解析：

首先，需要研究 x_1, x_2 的范围。求导 $f'(x) = \frac{(2x+1)(1-ax)}{x}$ ，注意定义域 $x > 0$ ，要想使得 $f(x_1) = f(x_2)$ ，则 $f(x)$ 不能是单调的，故 $a > 0$ ， $f(x)$ 先增后减，极大值点为 $\frac{1}{a}$ 。当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) \rightarrow -\infty$ ；当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) \rightarrow -\infty$ ，不妨设 $x_1 < x_2$ ，则有 $0 < x_1 < \frac{1}{a} < x_2$ 。

现在着手证明 $f'(\frac{x_1+x_2}{2}) < 0$ 。注意到 $f'(\frac{1}{a}) = 0$ ，如果 $x_1 + x_2 < \frac{2}{a}$ 的话，就得证了。因此下面我们尝试证明 $x_1 + x_2 < \frac{2}{a}$ ，这是标准的极值点偏移问题，构造函数 $f(x) - f(\frac{2}{a} - x)$ 即可，不再赘述了。

本题还可以用比值换元来做。这属于待证不等式带参数的情形（虽然表面上看 $f'(\frac{x_1+x_2}{2}) < 0$ 不含有参数 a ，但把左边展开后含有参数 a ），根据前面的内容，步骤是先把 a 表示成 x_1, x_2

的表达式，再代入待证不等式进行消元。

条件 $f(x_1) = f(x_2)$ ，即

$$\ln x_1 + (2-a)x_1 - ax_1^2 = \ln x_2 + (2-a)x_2 - ax_2^2$$

把 a 提取出来，得到

$$a = \frac{\ln \frac{x_1}{x_2} + 2(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(1 + x_1 + x_2)}$$

代入待证不等式 $f'(\frac{x_1+x_2}{2}) < 0$ 中，得到

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) &= \frac{2}{x_1+x_2} + 2 - a - a(x_1+x_2) \\ &= \frac{2}{x_1+x_2} + 2 - \frac{\ln \frac{x_1}{x_2} + 2(x_1-x_2)}{x_1-x_2} \end{aligned}$$

于是 $f'(\frac{x_1+x_2}{2}) < 0$ 等价于

$$\frac{2}{x_1+x_2} < \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$$

现在换元 $t = \frac{x_1}{x_2}$ ，不妨设 $x_1 > x_2$ ，则 $t > 1$ ，上式变成

$$\frac{2}{t+1} < \frac{\ln t}{t-1}$$

这是常见不等式 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1)$ ，构造函数 $g(t) = 2(t-1) - (t+1)\ln t$ ，证明 $g(t) < 0$ 即可，过程略。

{}

已知函数 $f(x) = x - \ln x$ ， $f(x_1) = f(x_2)$ ， $x_1 \neq x_2$ ，证明： $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$ 。

{}

解析：

待证不等式不是常规的 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 x_2$ 型。参考在**构造函数**一节中我提供的**2021年新高考一卷**导数题解析，我们可以构造函数 $g(x) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + \ln x$ ，这样一来，条件 $f(x_1) = f(x_2)$ 就变成了 $g(\frac{1}{x_1}) = g(\frac{1}{x_2})$ ，用 x_3 代替 $\frac{1}{x_1}$ ， x_4 代替 $\frac{1}{x_2}$ ，就有 $g(x_3) = g(x_4)$ ，待证不等式变成

$$x_3 + x_4 > 2$$

这就归结为最常规的情形了，用构造函数法或者比值换元法都可以轻松解决。

本题不构造 $g(x) = f(\frac{1}{x})$ 的话，也可以使用比值换元法来做。根据条件 $f(x_1) = f(x_2)$ ，写出

$$x_1 - \ln x_1 = x_2 - \ln x_2$$

换元 $t = \frac{x_1}{x_2}$ ，不妨设 $x_1 > x_2$ ，则 $t > 1$ ，上式写成

$$(t-1)x_2 = \ln t$$

解得 $x_2 = \frac{\ln t}{t-1}$, $x_1 = tx_2 = \frac{t \ln t}{t-1}$ 。待证不等式 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2$ 即为

$$\frac{t^2 - 1}{t \ln t} > 2$$

这是常见不等式 $\ln t < \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})(t > 1)$, 构造 $g(t) = \ln t - \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})$ 或者 $g(t) = 2t \ln t - t^2 + 1$ 都可以轻松证明。

前面说过换元法能做一些比较精细的活, 本题还可以衍生很多变体, 它们都能用比值换元来解决。下面给出这方面的两个例子, 分别是不带参数型和带参数型的, 读者可以根据之前总结的步骤解决它们。

{}

已知函数 $f(x) = x - \ln x$, $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 \neq x_2$, 证明: $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 2$ 。

{}

{}

已知函数 $f(x) = x - \ln x$, $f(x_1) = f(x_2) = a$, $x_1 \neq x_2$, 证明: $x_1 + x_2 > 1 + a$ 。

{}

4. 未竟

限于篇幅, 本文到此为止。还有一些进阶的方法(放缩、拟合)以及进阶题型(拐点偏移), 我会放在另一篇文章[再论极值点偏移](#)中加以介绍。