

解三角形_题集1

试题

T1

| 新月

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$, 则 $B =$ _____ .

T2

| 新月

2022年“极光”最后一卷

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $a = 3, b = 2, \sin A = m$, 若 $\triangle ABC$ 唯一确定, 则 $m =$ _____ .

T3

| 上弦月

2022年成都七中高一下期末

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AC = 2, \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\tan B} = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\tan A} + 1$, 则 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 () .

- A. $2\sqrt{5} + 4$
- B. $2\sqrt{7} + 4$
- C. $2\sqrt{5} + 7$
- D. $2\sqrt{7} + 7$

T4

| 上弦月

2024年武汉四调

设 A, B, C 是一个三角形的三个内角, 则 $\cos A(3 \sin B + 4 \sin C)$ 的最小值为 _____.

T5

| 上弦月

在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{1}{\tan A}, \frac{1}{\tan B}, \frac{1}{\tan C}$ 依次成等差数列. 则 B 的最大值为 _____.

T6

| 上弦月

在 $\triangle ABC$ 中, $3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C$ 的最大值为 _____.

T7

| 上弦月

2016江苏卷

在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A = 2 \sin B \sin C$, 则 $\tan A \tan B \tan C$ 的最小值为 _____.

T8

| 上弦月

2022年新高考一卷

已知 $\triangle ABC$ 满足 $\frac{\cos A}{1+\sin A} = \frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

(1) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 B .

(2) 求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

T9

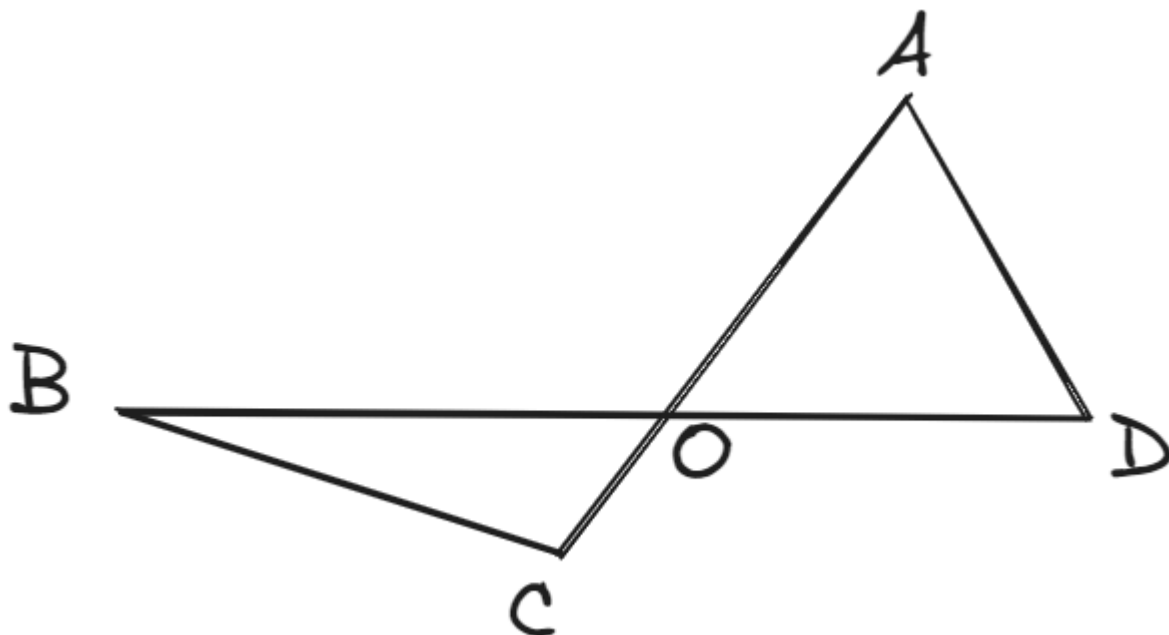
| 上弦月

2025年武汉二调

如图, $\triangle AOD$ 与 $\triangle BOC$ 存在对顶角 $\angle AOD = \angle BOC = \frac{\pi}{4}$, $AC = 2$, $BD = 2\sqrt{2}$, 且 $BC = AD$.

(1) 证明: O 为 BD 中点.

(2) 若 $\sqrt{5} \sin 2A + \cos B = \sqrt{5}$, 求 OC 的长.



答案

T1

答案: $\frac{\pi}{3}$

提示: 由 $a^2 + c^2 - b^2$ 联想到余弦定理 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 再把面积 S 用 $\frac{1}{2}ac \sin B$ 表达。

T2

答案: 1

提示: 显然如果 A 不是直角, 那么在锐角域 $(0, \frac{\pi}{2})$ 和钝角域 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 一定能分别找到两个 A_1, A_2 , 满足 $A_1 + A_2 = \pi$ 且 $\sin A_1 = \sin A_2 = m$ 。

T3

答案： A

提示：本题的条件式难以化简，不妨从目标式着手，对待求的周长作化简。考虑到条件式是关于角的，因此用正弦定理进行边化角：

$$\begin{aligned}a + b + c &= 2 + \frac{2 \sin A}{\sin B} + \frac{2 \sin C}{\sin B} \\&= 2 + \frac{2 \sin A}{\sin B} + \frac{2 \sin(A+B)}{\sin B} \\&= 2 + \frac{2 \sin A}{\sin B} + \frac{2 \sin A \cos B + 2 \cos A \sin B}{\sin B} \\&= 2 + \frac{2 \sin A}{\sin B} + \frac{2 \sin A}{\tan B} + 2 \cos A \\&= 2 + 2 \sin A \left(\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\tan B} \right) + 2 \cos A\end{aligned}$$

到这里我们发现 $\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\tan B}$ 。它可以用条件式替换成关于 A 的式子，这样一来就变成单变量的函数了：

$$\begin{aligned}a + b + c &= 2 + 2 \sin A \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\tan A} + 1 \right) + 2 \cos A \\&= 4 + 2 \sin A + 4 \cos A \\&\leq 4 + 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

上面的解法看似十分自然，其实不容易想到。因为绝大多数的此类问题都是需要化简条件式，最后把化简结果代入目标式，而本题逆其道而行之。参见 b 站 上的一个视频：[法一神来之笔！法二恐怖如斯！_哔哩哔哩_bilibili](#)。

T4

答案： $-\frac{125\sqrt{3}}{108}$

提示：本题比较难。

有三个变量，那么肯定要消元。观察结构，最自然的想法是先消去 A ：

$$\begin{aligned}\cos A(3 \sin B + 4 \sin C) &= -\cos(B+C)(3 \sin B + 4 \sin C) \\&= (\sin B \sin C - \cos B \cos C)(3 \sin B + 4 \sin C)\end{aligned}$$

到这里有两个变量，肯定要**固定主元**。我们把 B 作为主元， C 看作参数，于是

$$\begin{aligned}(\sin B \sin C - \cos B \cos C)(3 \sin B + 4 \sin C) \\&= 3 \sin C \sin^2 B + 4 \sin^2 C \sin B - 3 \cos C \sin B \cos B - 4 \sin C \cos C \cos B \\&= f(B)\end{aligned}$$

我们希望能求出上面这个关于 B 的函数 $f(B)$ 的最小值，然而遗憾的是，无论是用三角恒等变换直接对 $f(B)$ 进行化简，还是动用导数，都无法求解其最小值。

此路不通，我们换一种思路，先消去 B ：

$$\begin{aligned}
\cos A(3 \sin B + 4 \sin C) &= \cos A(3 \sin(A + C) + 4 \sin C) \\
&= \cos A(3 \sin A \cos C + 3 \cos A \sin C + 4 \sin C) \\
&= (3 \cos^2 A + 4 \cos A) \sin C + 3 \sin A \cos A \cos C
\end{aligned}$$

把 C 作为主元, A 看作参数, 上面这个关于 C 的函数可以用辅助角公式求出最小值:

$$\begin{aligned}
&(3 \cos^2 A + 4 \cos A) \sin C + 3 \sin A \cos A \cos C \\
&= \sqrt{(3 \cos^2 A + 4 \cos A)^2 + 9 \sin^2 A \cos^2 A} \sin(C + \varphi) \\
&\geq -\sqrt{(3 \cos^2 A + 4 \cos A)^2 + 9 \sin^2 A \cos^2 A}
\end{aligned}$$

再求上面这个关于 A 的函数的最小值:

$$\begin{aligned}
&-\sqrt{(3 \cos^2 A + 4 \cos A)^2 + 9 \sin^2 A \cos^2 A} \\
&= -\sqrt{9 \cos^4 A + 24 \cos^3 A + 16 \cos^2 A + 9(1 - \cos^2 A) \cos^2 A} \\
&= -\sqrt{24 \cos^3 A + 25 \cos^2 A}
\end{aligned}$$

令 $x = \cos A \in (-1, 1)$, 考虑函数 $g(x) = 24x^3 + 25x^2$ 的最大值。这需要用导数

$$g'(x) = 72x^2 + 50x$$

所以, $g(x)_{\max} = g(-\frac{25}{36})$ 。从而

$$\cos A(3 \sin B + 4 \sin C)_{\min} = -\sqrt{g(-\frac{25}{36})} = -\frac{125\sqrt{3}}{108}$$

等号成立当且仅当 $\cos A = -\frac{25}{36}$ 且 $\tan C = \frac{3 \sin A}{3 \cos A + 4} = \dots$, 其中第二个条件是根据辅助角公式得到的。

T5

答案: $\frac{\pi}{3}$

提示: 由题意有 $\frac{2}{\tan B} = \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C}$, 显然 $\tan B$ 是正数 (否则会出现两个钝角), 考虑消元, 根据结构特点应该消去 B 。用 $\tan B = -\tan(A + C)$ 代入得

$$\begin{aligned}
\frac{2(\tan A \tan C - 1)}{\tan A + \tan C} &= \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} \\
\iff (\tan A + \tan C)^2 &= 2 \tan A \tan C (\tan A \tan C - 1)
\end{aligned}$$

由于 $(\tan A + \tan C)^2 \geq 4 \tan A \tan C$, 故 $2 \tan A \tan C (\tan A \tan C - 1) \geq 4 \tan A \tan C$, 解得 $\tan A \tan C \leq 0$ 或 $\tan A \tan C \geq 3$ 。于是

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\tan^2 B} &= \left(\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} \right)^2 \\
&= \frac{(\tan A + \tan C)^2}{\tan^2 A \tan^2 C} \\
&= \frac{2(\tan A \tan C - 1)}{\tan A \tan C} \\
&= 2 - \frac{2}{\tan A \tan C} \\
&\geq 2 - \frac{2}{3} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

故 $\tan B \leq \sqrt{3}$, $B \leq \frac{\pi}{3}$ 。

T6

答案: $\frac{35\sqrt{7}}{4}$

提示: 与 T4 一样, 考虑消元, 这里消去 A :

$$\begin{aligned}
&3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C \\
&= 3 \sin B \cos C + 3 \cos B \sin C + 4 \sin B + 18 \sin C \\
&= (3 \cos C + 4) \sin B + 3 \sin C \cos B + 18 \sin C
\end{aligned}$$

然后把 B 作为主元, C 视作参数:

$$\begin{aligned}
&(3 \cos C + 4) \sin B + 3 \sin C \cos B + 18 \sin C \\
&= \sqrt{(3 \cos C + 4)^2 + 9 \sin^2 C} \sin(B + \varphi) + 18 \sin C \\
&\leq \sqrt{(3 \cos C + 4)^2 + 9 \sin^2 C} + 18 \sin C \\
&= \sqrt{25 + 24 \cos C} + 18 \sin C
\end{aligned}$$

考虑函数 $f(x) = \sqrt{25 + 24 \cos x} + 18 \sin x$ ($0 < x < \pi$) 的最大值, 用导数求解:

$$f'(x) = -\frac{12 \sin x}{\sqrt{25 + 24 \cos x}} + 18 \cos x$$

令 $f'(x) = 0$,

$$\begin{aligned}
&2 \sin x = 3 \cos x \sqrt{25 + 24 \cos x} \\
\iff &4(1 - \cos^2 x) = 9 \cos^2 x (25 + 24 \cos x) \\
\iff &4 - 4t^2 = 225t^2 + 216t^3 \\
\iff &216 \cos^3 x + 229 \cos^2 x - 4 = 0 \\
\iff &(8 \cos x - 1)(27 \cos^2 x + 32 \cos x + 4) = 0
\end{aligned}$$

(这里最大的困难是看出一个根为 $\frac{1}{8}$) 解得 $\cos x = \frac{1}{8}$ 或 $\cos x = \frac{2\sqrt{37}-16}{27}$ 或 $\cos x = \frac{-2\sqrt{37}-16}{27}$ (舍去)。不难分析出 $\cos x = \frac{1}{8}$ 对应的才是函数 $f(x)$ 的极大值点(也是最大值点), 所以

$$f(x)_{\max} = \sqrt{25 + 24 \times \frac{1}{8}} + 18 \times \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{35\sqrt{7}}{4}$$

综合上述过程，取到该最小值当且仅当 $\cos C = \frac{1}{8}$ 且 $\tan B = \frac{3\sin C}{3\cos C+4} = \frac{9\sqrt{7}}{35}$ ，其中第二个条件是根据辅助角公式得到的。

T7

答案：8

提示： $\sin A = 2 \sin B \sin C$ 根据结构特点应该先考虑消去 A ，得

$$\begin{aligned}\sin B \cos C + \cos B \sin C &= 2 \sin B \sin C \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} &= 2 \\ \Leftrightarrow \tan B + \tan C &= 2 \tan B \tan C\end{aligned}$$

根据三角形中的**正切恒等式**： $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ ，以及 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A + 2 \tan B \tan C \geq 2\sqrt{2 \tan A \tan B \tan C}$ ，得 $\tan A \tan B \tan C \geq 2\sqrt{2 \tan A \tan B \tan C}$ ，从而 $\tan A \tan B \tan C \geq 8$ 。等号成立当且仅当 $B = C$ 。

注：三角形中常见的三个恒等式：

$$\begin{aligned}\tan A + \tan B + \tan C &= \tan A \tan B \tan C \\ \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C &= 1 \\ \frac{1}{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} + \frac{1}{\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}} + \frac{1}{\tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2}} &= 1\end{aligned}$$

T8

答案：(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $4\sqrt{2} - 5$

提示：先处理条件式，只是常规的三角恒等变换

$$\begin{aligned}\frac{\cos A}{1 + \sin A} &= \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B} \\ \Leftrightarrow \cos A(1 + \cos 2B) &= \sin 2B(1 + \sin A) \\ \Leftrightarrow 2 \cos A \cos^2 B &= 2 \sin B \cos B(1 + \sin A) \\ \Leftrightarrow \cos A \cos B &= \sin B(1 + \sin A) \\ \Leftrightarrow \cos(A + B) &= \sin B \\ \Leftrightarrow \cos(A + B) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \\ \Leftrightarrow A + B &= \frac{\pi}{2} - B \\ \Leftrightarrow A &= \frac{\pi}{2} - 2B\end{aligned}$$

进而得到 $C = \frac{\pi}{2} + B$ ，于是三个角元都可以用 B 表示，这为第二问的消元求取值范围作铺垫。

对于第二问，显然应该边化角：

$$\begin{aligned}\frac{a^2 + b^2}{c^2} &= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 C} \\&= \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2} - 2B) + \sin^2 B}{\sin^2(\frac{\pi}{2} + B)} \\&= \frac{\cos^2 2B + \sin^2 B}{\cos^2 B} \\&= \frac{(2\cos^2 B - 1)^2 + 1 - \cos^2 B}{\cos^2 B} \\&= 4\cos^2 B + \frac{2}{\cos^2 B} - 5 \\&\geq 4\sqrt{2} - 5\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $\cos^2 B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，根据 $A = \frac{\pi}{2} - 2B$ 知 $B < \frac{\pi}{4}$ ，所以只能是 $\cos B = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ 。

T9

答案：(1) 略 (2) $\frac{2}{3}$

提示：本题的难点在于第一问，要求学生在这样一个显然有平面几何背景的图形中，用高中的解三角形方法从代数上证明几何关系。这很像解析几何的思想。

第一问，需要证明 $BO = OD$ ，题目的条件中已知对角和对边（尽管 BC 和 AD 的具体数值不明），那么应该用正弦定理：

$$\begin{aligned}\frac{BC}{\sin \frac{\pi}{4}} &= \frac{BO}{\sin C} = \frac{CO}{\sin B} \\ \frac{AD}{\sin \frac{\pi}{4}} &= \frac{OD}{\sin A} = \frac{OA}{\sin D}\end{aligned}$$

由于 $BC = AD$ ，故上下两个连等式应该全相等，对于连等式常常设其等于 k ，于是

$$\begin{aligned}BO &= k \sin C \\ OD &= k \sin A \\ CO &= k \sin B \\ OA &= k \sin D\end{aligned}$$

我们要证明 $BO = OD$ ，即证明 $\sin C = \sin A$ ，要么 $C = A$ ，要么 $A + C = \pi$ ，从图上看应该是后一种情况。

由 $BD = BO + OD = 2\sqrt{2}$ ， $AC = CO + OA = 2$ 得到

$$\begin{aligned}k(\sin C + \sin A) &= 2\sqrt{2} \\ k(\sin B + \sin D) &= 2\end{aligned}$$

接下来要处理这个方程组，这就考验数学素养了，核心思想还是老生常谈的消元。首先， k 可以通过上下之比消去：

$$\frac{\sin C + \sin A}{\sin B + \sin D} = \sqrt{2}$$

我们期望得到 A, C 之间的关系，那么应该把 B, D 消去。根据三角形内角和， $B = \frac{3\pi}{4} - C$ ， $D = \frac{3\pi}{4} - A$ ，于是

$$\begin{aligned} & \frac{\sin C + \sin A}{\sin(\frac{3\pi}{4} - C) + \sin(\frac{3\pi}{4} - A)} = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{\sin C + \sin A}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin C + \cos C + \sin A + \cos A)} = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \sin C + \sin A = \sin C + \cos C + \sin A + \cos A \\ \Leftrightarrow & \cos C + \cos A = 0 \\ \Leftrightarrow & A + C = \pi \end{aligned}$$

这就证明了 $\sin C = \sin A$ ，从而 $BO = OC$ 。

以上是本人第一次做这个题目时的方法，下面是官方答案，比较简洁：

17. (15 分) 解：

(1) 设 $BO = x$ ， $CO = y$ ，则 $DO = 2\sqrt{2} - x$ ， $AO = 2 - y$ 。

在 $\triangle BOC$ 和 $\triangle AOD$ 中， $BC = AD$ ，由余弦定理可得：

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{4} = (2\sqrt{2} - x)^2 + (2 - y)^2 - 2(2\sqrt{2} - x)(2 - y) \cos \frac{\pi}{4}.$$

整理得： $x = \sqrt{2}$ 。

所以 $BO = \frac{1}{2}BD$ ，即 O 为 BD 中点。

第二问，由于在第一问中我们已经得到 $A + C = \pi$ ，而条件式也可以写成：

$$\sqrt{5} \sin 2A + \cos(\frac{3\pi}{4} - C) = \sqrt{5}$$

于是 A, C 都可以求出来，进而可以求出 B, D ，那么在 $\triangle OBC$ 中，三个角都知道， $OB = \sqrt{2}$ 也可以从第一问的结论中得到，从而 OC 容易求得。