论“对数单身狗、指数找朋友”

指数函数、对数函数、三角函数都是**超越函数**。超越函数比多项式函数难处理得多，尤其是多种超越函数混杂的情形，例如 $f(x)=\sin x-\ln(x+1)$ 。本文介绍的技术，能帮助你尽量避免研究超越函数的性质。

1. 对数单身狗

函数 $\ln x$ 的导数是 $\frac{1}{x}$，这意味着如果一个函数中有 $\ln x$，求导一次之后就消失了。因此如果 $\ln x$ 的前面乘上了其他函数，我们可以考虑把 $\ln x$ 单独提出来。例如：

{{}}
已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$，证明当 $x>1$ 时，$f(x)>0$.
{{}}

如果直接对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$，一阶导函数仍然有超越函数 $\ln x$，性质不明显，需要继续求二阶导。要是函数复杂的话，可能需要求很多次导才能让 $\ln x$ 消失。这时候可以使用“对数单身狗”，把 $f(x)>0$ 转化为

$$\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}>0$$

构造函数 $g(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$ ，求导得 $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，可以看到在一阶导的时候就没有 $\ln x$ 了。

2. 指数找朋友

函数 e^x 的任意阶导数都是本身，所以如果 e^x 单独出现，它永远都不会消失。但是，e^x 有这样一个性质：

$$\left(e^x f(x)\right)'=e^x\left(f(x)+f'(x)\right)$$

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$$

可以看到，如果把 e^x 和其它函数乘除，那么求导之后的式子虽然还有 e^x ，但我们实际上已经不需要考虑它了，因为我们只关心导函数的正负情况，而 e^x 是恒正的。

{{}}
证明：$e^x\geq\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$
{{}}

我们先来看看这道题常规方法怎么做。令 $f(x)=e^x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-1$，求导

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$$

继续求导

$$f''(x)=e^x-x-1$$

继续求导

$$f'''(x)=e^x-1$$

直到三阶导的时候我们才能看出函数的性质。如果本题用“指数找朋友”，则简单得多：令

$$g(x)=\frac{\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1}{e^x}$$

求导

$$g'(x)=-\frac{x^3}{6e^x}$$

一阶导的时候性质就明显了，省去了很多麻烦。
下面这道题目，是“指数找朋友”的经典案例：

{{}}
(2021年八省联考节选)已知函数 $f(x)=e^x-\sin x-\cos x$，证明：当 $x>-\frac{5\pi}{4}$ 时，$f(x)\geq 0$.
{{}}

如果直接对 $f(x)$ 求导，不管求多少次导数，指数和三角都挥之不去。但如果把待证不等式转化为

$$\frac{\sin x+\cos x}{e^x}\leq 1$$

对左边函数求导，得

$$\frac{-2\sin x}{e^x}$$

性质立马明晰。

3. 其它技巧

利用 x 的导数是常数，也能衍生出一种技巧。例如，要证明

$$\sin x\tan x\geq x^2\quad 0\leq x<\frac{\pi}{2}$$

如果直接构造函数 $f(x)=\sin x\tan x-x^2$，那么到二阶导的时候就会很复杂。因此我们构造函数

$$g(x)=\sqrt{\sin x\tan x}-x=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}-x$$

求导得

$$g'(x)=\frac{(\sqrt{\cos x}-1)[(\sqrt{\cos x})^3-(\sqrt{\cos x})^2-\sqrt{\cos x}-1]}{2\cos^{\frac{3}{2}}x}$$

性质就明显了。