

数列大纲

+++

date = '2025-01-29T00:08:34+08:00'

title = '数列大纲'

author = 'zkr'

tags = ["数列"]

categories = ["复习参考"]

summary = "数列题型详解"

+++

1.概念

数列：顾名思义，就是一列数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ，用 $\{a_n\}$ 表示。注意以下几点：

⚠ Caution

1. 高中阶段，数列的下标 n 都是从 1 开始的，也就是没有 a_0 。
2. 数列里面可以有无穷个数，此时称为无穷数列；否则是有穷数列。
3. 数列并不要求 a_n 有规律、有递推式、有通项公式，它们仅仅是一列数而已，完全没有规律也是可以的。另外，即使有规律，也不一定有递推式和通项公式，例如**质数列**： $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ 没有通常意义下的递推公式和通项公式。
4. 数列中的元素称为数列的**项**，元素个数称为**项数**。

前n项和： $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ， S_n 本身也构成一个数列 $\{S_n\}$ 。 a_n 和 S_n 的关系是：

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

其中 $n \geq 2$ 。对于 $n = 1$ ，直接有 $a_1 = S_1$ 。

通项公式： 如果 a_n 能写成 $a_n = f(n)$ 的形式（其中 $f(n)$ 是一个关于 n 的函数），那么 $f(n)$ 就称为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。例如数列 $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 的通项公式是 $a_n = n$ 。注意以下几点：

⚠ Caution

1. 数列并不一定有通项公式，实际上恰恰相反，几乎所有的数列都求不出通项公式，只有极少数的特殊数列能求出通项公式，例如等差和等比。
2. 根据一个通项公式，不能唯一确定一个数列。例如 $a_n = n$ 对于数列 $\{1, 2, 3, 4\}$ 和 $\{1, 2, 3\}$ 都是成立的。
3. 对于一个数列，它的通项公式也不唯一。例如数列 $1, 2, 3$ 的通项公式可以是 $a_n = n$ ，也可以是 $a_n = -\frac{1}{6}n^3 + n^2 - \frac{5}{6}n + 1$ 。（这实际上是多项式函数的**插值**，经过点

(1, 1), (2, 2), (3, 3) 的多项式函数有无数个)即使是无穷数列也如此, 例如 $1, 2, 3, 4, \dots$ 的通项公式可以是 $a_n = n$ 也可以是 $a_n = \begin{cases} -\frac{1}{6}n^3 + n^2 - \frac{5}{6}n + 1 & n = 1, 2, 3 \\ n & n \geq 4 \end{cases}$ 。

递推公式: 如果 a_n 能写成 $a_n = f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$ 的形式 (其中 $f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$ 是一个关于 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ 的表达式), 那么 $f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1})$ 就称为数列 $\{a_n\}$ 的递推公式。简单来

说, 就是数列中的任意一项 a_n 都能通过它之前的 $n - 1$ 项求出来。注意以下几点:

⚠ Caution

1. 根据通项公式不一定能求出递推公式, 例如 $a_n = \sin(n) + n$ 。
2. 根据递推公式也不一定求出通项公式, 例如 $a_{n+1} = \sin a_n + a_n$ 。
3. 如果我们要求出数列中的某一项, 有时候用递推公式反而比通项公式方便。例如斐波那契数列的递推公式是 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, 通项公式是 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$ 。如果我们要手算出第20项 a_{20} , 显然应该用递推公式。插一句题外话, 某 top2 大学的自主招生考过一个题目:

🔍 Question

求 $(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{20}$ 的整数部分

利用斐波那契数列的递推公式, 我们可以算出 $a_{20} = 6765$, 另一方面利用斐波那契数列的通项公式, 我们可以得到 $a_{20} = \frac{1}{\sqrt{5}} [(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{20} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{20}]$ 。所以 $(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{20} = 6765\sqrt{5} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{20}$, 由于 $6765\sqrt{5} \approx 15126.9$, $|\frac{1-\sqrt{5}}{2}| < 0.7$, $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{20}$ 小到可以忽略不计, 故答案就是 15126。

2. 根据递推式求通项公式

这是数列中最最常考的题型。下面介绍一些常见案例:

$$a_n = pa_{n-1} + q$$

最常见的情况。这时 a_n 相当于 a_{n-1} 的一次函数。我们分几种情况讨论:

1. $a_n = pa_{n-1}$

简单, 显然是等比数列 (如果 $p \neq 0$)。

2. $a_n = a_{n-1} + q$

简单，显然是等差数列。

$$3. a_n = pa_{n-1} + q, \text{ 其中 } p \neq 1$$

重头戏来了，由于字母 p, q 看着不方便，我们不妨设置 $p = 2, q = 1$ 且 $a_1 = 1$ ，即

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, a_1 = 1$$

先说结论：上面的递推公式可以写成 $a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$ ，从而数列 $\{a_n + 1\}$ 就成为一个等比数列， $a_n + 1 = 2^n$ ，得到 $a_n = 2^n - 1$ 。

我们关心两个问题：为什么这个递推公式能写成上面的形式，为什么是 $\{a_n + 1\}$ 而不是 $\{a_n + 2\}$ (或者其它)。

回答第一个问题：我们之前讨论过 $q = 0$ 的情况，即 $a_n = pa_{n-1}$ ，此时很明显是一个等比数列。但是如果右边加上一个非零常数后，就不是等比数列了。这其实相当于把一个经过原点的一次函数进行平移，那么平移后的函数就不再经过原点了，也就是 a_n 不再是等比数列。那如果我们再把这个一次函数“平移回去”，是不是又会得到一个等比数列了？例如在本题中， $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ，相当于把 $a_n = 2a_{n-1}$ 向上平移了 1，那么我们把 a_n 向左平移 1 得到的 $a_n + 1$ 就是一个等比数列了。因为对于一次函数 $y = ax + b$ 而言，把 y 向上平移和把 x 向左平移是等价的。

回答第二个问题：根据上面的讨论，我们已经知道，对于递推公式 $a_n = pa_{n-1} + q$ ， $q \neq 0, p \neq 1$ ，它总能写成 $a_n + x = p(a_{n-1} + x)$ 的形式，把它展开后，得到 $a_n = pa_{n-1} + (p-1)x$ ，从而有 $(p-1)x = q$ ，得到 $x = \frac{q}{p-1}$ 。例如在本题中， $x = \frac{1}{2-1} = 1$ ，所以 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列，公比就是 $p = 2$ 。

再看一个例子： $a_n = 3a_{n-1} - 1, a_1 = 0$ ，求通项公式。我们计算得到 $x = \frac{-1}{3-1} = -\frac{1}{2}$ ，因此 $\{a_n - \frac{1}{2}\}$ 就是一个首项为 $-\frac{1}{2}$ ，公比为 3 的等比数列，从而 $a_n = -\frac{1}{2}3^{n-1} + \frac{1}{2}$ 。

$$a_n = pa_{n-1}^q$$

两边取对数，得到 $\ln a_n = q \ln a_{n-1} + \ln p$ ，令 $b_n = \ln a_n$ ，则 $b_n = qb_{n-1} + \ln p$ ，这就变成了上面那种情形了。

看一个例子： $a_n = 3a_{n-1}^2, a_1 = 1$ ，求通项。两边取对数得到 $\ln a_n = 2 \ln a_{n-1} + \ln 3$ ，计算得 $x = \frac{\ln 3}{2-1} = \ln 3$ ，因此 $\{\ln a_n + \ln 3\}$ 是一个首项为 $\ln 3$ ，公比为 2 的等比数列，……

再看一个例子： $a_n = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1}, a_1 = 1$ ，求通项。两边加 1 得到 $a_n + 1 = (a_{n-1} + 1)^2$ ，把 $a_n + 1$ 看成整体即可。

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$$

这是所谓的**二阶常系数齐次递推公式**。很多著名数列，例如斐波那契数列 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ，佩尔数列 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ 都属于这种类型。

要想求解这个递推公式，一种方法是使用**矩阵**的特征根。虽然高中不涉及，但是曾经在高考卷上出现过。感兴趣的同学，可以上网搜索，关键词“**不动点**”和“**特征根**”。

还有一种方法，就是所谓的“**母函数法**”，这种方法在高中知识的范围内，详情见本资料后面部分。

$$a_n = \frac{pa_{n-1}+q}{sa_{n-1}+t}$$

这种递推式需要用**不动点**求解，这里不做介绍。但是有两个特例：

1. $p = 0$

这种情况一般是周期数列，可以算出前几项来检验。举个例子： $a_n = \frac{1}{1-a_{n-1}}$ ， $a_1 = \frac{1}{2}$ 。可以算出 $a_2 = 2, a_3 = -1, a_4 = \frac{1}{2}$ ，所以周期为 3。

2. $q = 0$

把两边取倒数即可。举个例子： $a_n = \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$ ，转换成 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + 1$ ，从而 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是一个等差数列。

$$a_n = pa_{n-1} + f(n)$$

这种情况也是比较常见的。我们直接举例说明：(假设下面各例中都有 $a_1 = 1$)

1. $a_n = a_{n-1} + n$

累加，就有

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. $a_n = a_{n-1} + 2^n$

同样是累加

3. $a_n = 2a_{n-1} + n$

两边同除 2^n ，得到 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^{n-1}}$ ，把 $\frac{a_n}{2^n}$ 看成一个整体，累加即可。

可见，如果 $p \neq 1$ ，那么我们在两边同时除以 p^n ，就能化为 $p = 1$ 的情况。

$$a_n = f(n) * a_{n-1}$$

这种情况比较简单，累乘即可，例如 $a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$ 。

$$a_n = f(S_n)$$

一般都要用 $a_n = S_{n+1} - S_n$ 来转换。这里就有两种情况，要么从左到右转换，要么从右到左，这就要具体题目具体分析了。但是尤其要注意 n 的取值范围，举几个例子：

1. $a_{n+1} = S_n + 2, a_1 = 1$

把 $a_{n+1} = S_n + 2$ 与 $a_n = S_{n-1} + 2$ 相减，得到 $a_{n+1} - a_n = a_n$ ，即 $a_{n+1} = 2a_n$ ，但是要注意这里 $n \geq 2$ ，这是因为上面用到了式子 $a_n = S_{n-1} + 2$ ，要求下标 $n - 1 \geq 1$ 。所以不能简单地认为数列 a_n 是一个等比数列，只能说从第二项开始是等比的，公比为 2，但第一项和第二项的比值却不一定为 2。我们可以算出 $a_2 = 3$ ，从而 $\frac{a_2}{a_1} = 3 \neq 2$ ，因此通项公式为：

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 3 * 2^{n-2} & n > 1 \end{cases}$$

2. $S_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}), a_1 = 1$

把 $S_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ 和 $S_{n-1} = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}})$ 相减，得到

$a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1} + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}})$ 。注意这里 $n \geq 2$ 。我们把 a_n 和 a_{n-1} 移到两边，得到

$$a_n - \frac{1}{a_n} = -(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}})$$

两边平方，得到

$$a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} = a_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} + 4$$

很明显，数列 $\{a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}\}$ 是一个公差为 4 的等差数列。

3.技术

裂项相消

直接说结论：分式 $\frac{1}{(n-x_1)(n-x_2)(n-x_3)\dots(n-x_m)}$ 可以写成 $\frac{\lambda_1}{n-x_1} + \frac{\lambda_2}{n-x_2} + \dots + \frac{\lambda_m}{n-x_m}$ 的形式。例如：

Example

1. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

2. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{n+1}$

3. $\frac{1}{n^2-3n+2} = \frac{1}{(n-1)(n-2)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}$

系数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 可以通过待定系数法求出来，例如上面的第二个式子，我们令

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\lambda_1}{n} + \frac{\lambda_2}{n+1} + \frac{\lambda_3}{n+2}$$

把右边的式子通分，得到

$$\frac{\lambda_1(n+1)(n+2) + \lambda_2n(n+2) + \lambda_3n(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)n^2 + (3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)n + 2\lambda_1}{n(n+1)(n+2)}$$

比较系数，应该有 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $2\lambda_1 = 1$ 。解得 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ 。

错位相减

我们把等差数列与等比数列的乘积叫做差比数列，例如 $a_n = n * 2^n$ 。错位相减是用来求解差比数列的前n项和的。

以 $a_n = n * 2^n$ 为例，写出

$$\begin{array}{r} S_n = 1 * 2^1 + 2 * 2^2 + 3 * 2^3 + \dots + n * 2^n \\ 2 * S_n = 1 * 2^2 + 2 * 2^3 + \dots + (n-1) * 2^n + n * 2^{n+1} \end{array}$$

其中第二行是把第一行乘以公比2得到的。然后把两行按照上面的对应顺序相减，得到

$$-S_n = 1 * 2^1 + (2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n) - n * 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 - n * 2^{n+1}$$

于是 $S_n = 2 + (n-1) * 2^{n+1}$ 。

母函数法

前排提示： 本节内容仅供学有余力的同学学习

对于一个数列 $\{a_n\}$ ，我们称函数

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

为 $\{a_n\}$ 的**母函数**。

不难发现母函数的一个性质是 $f(1) = S_n$ ，这里 S_n 是前 n 项和。

母函数定义很简单，但是威力令人难以置信地强大。下面我们用母函数来求解斐波那契数列

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

的通项公式。

母函数为 $f(x) = F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \dots + F_nx^n$ 。于是

$$\begin{aligned} xf(x) &= F_1x^2 + F_2x^3 + F_3x^4 + \dots + F_nx^{n+1} \\ x^2f(x) &= F_1x^3 + F_2x^4 + F_3x^5 + \dots + F_nx^{n+2} \end{aligned}$$

计算

$$\begin{aligned}
 (1-x-x^2)f(x) &= F_1x + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + (F_4 - F_3 - F_2)x^4 + \cdots + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n \\
 &\quad - (F_{n-1} + F_n)x^{n+1} - F_nx^{n+2} \\
 &= x - F_{n+1}x^{n+1} - F_nx^{n+2}
 \end{aligned}$$

等式左边， $1-x-x^2$ 有两个零点，分别记作 $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ， $\beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 。把这两个零点代入上式，左边为 0，右边也应当为 0，于是就有

$$\begin{aligned}
 \alpha - \alpha^{n+1}F_{n+1} - \alpha^{n+2}F_n &= 0 \\
 \beta - \beta^{n+1}F_{n+1} - \beta^{n+2}F_n &= 0
 \end{aligned}$$

这相当于一个关于 F_n, F_{n+1} 的二元一次方程组，解之，得到

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^n\beta^n(\beta - \alpha)}$$

$\alpha\beta = -1$ ， $\beta - \alpha = -\sqrt{5}$ ，代入上式化简得到

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

这就是斐波那契数列的通项公式。

母函数的作用远不止如此，例如，在之前求出的

$$(1-x-x^2)f(x) = x - F_{n+1}x^{n+1} - F_nx^{n+2}$$

中，我们取 $x = 1$ ，注意到 $f(1) = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ 是前 n 项和，于是有

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+1} + F_n - 1 = F_{n+2} - 1$$

这就得到了斐波那契数列一个特别性质。如果取 x 为其它数，还能得到更多等式。例如 $x = 2$ ， $f(2) = 2F_1 + 2^2F_2 + \cdots + 2^nF_n$ ，就有

$$2F_1 + 2^2F_2 + \cdots + 2^nF_n = \frac{2^{n+1}F_{n+1} + 2^{n+2}F_n - 2}{5}$$

读者可以发挥想象力，探索母函数的其它作用。

🕒 Todo

作为练习，读者可以试着用母函数求解佩尔数列：

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 1, \quad P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

的通项公式。

💡 Tip

除了上面三种技术，感兴趣的同学还可以上网搜索“蛛网工作法”。

4. 数列求和

数列求和是最古老的数列问题之一。

等差等比求和公式

例: $a_n = 2^n + n + 1$, 求 S_n

$$S_n = 2 * \frac{1-2^n}{1-2} + \frac{n(n+1)}{2} + n = 2^{n+1} - 2 + \frac{n(n+3)}{2}$$

裂项相消

例1: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, 求 S_n

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, S_n = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$$

上面这种对根号的裂项本质上就是分母有理化, 一定要掌握。一般地, 我们有

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+k}} = \frac{1}{k}(\sqrt{n+k} - \sqrt{n})$$

例2: $a_n = \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}$, 求 S_n

$$a_n = 1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right), S_n = \dots$$

首先把分子变成常数, 然后运用之前讲的方法裂项即可。本题实际上不需要待定系数了, 直接能看出来。

例3: $a_n = \frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$, 求 S_n

$$a_n = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}, S_n = \dots$$

总之先裂开再说, 然后发现 $(2^{n+1}-1) - (2^n-1)$ 刚好是 2^n 。

例4: $a_n = \frac{n+2}{n(n+1)2^n}$, 求 S_n

$$a_n = 2 \left[\frac{1}{n2^n} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \right], S_n = \dots$$

这题比较难, 总之还是先裂开再说, 我们希望裂项后是两个分数相减, 它们的分母上分别有一个 n 和 $n+1$, 然后要想使得裂项后的结果求和时能够相消, 它们的分母上还应该分别有一个 2^n 和 2^{n+1} 。于是就有 $\frac{1}{n2^n} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$, 我们通分后发现还要乘以系数 2。

例5: $a_n = \tan(n-1) \tan n$, 求 S_n

$$a_n = \frac{1}{\tan 1} [\tan n - \tan(n-1)] - 1, S_n = \dots$$

冷门的三角裂项，看看就好。

分段通项公式的求和

例： $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & n \text{ 是奇数} \\ 2a_n & n \text{ 是偶数} \end{cases}$ ， $a_1 = 1$ ，求 S_n

首先我们需要求出 a_n 的通项公式。如果题干按照奇偶分段，那么一般要分别考虑数列中的奇数项和偶数项。

考虑偶数项 a_{2n} ，则 $a_{2n} = a_{2n-1} + 1 = 2a_{2(n-1)} + 1$ ，这说明 $\{a_n\}$ 的偶数项构成的数列 $\{b_n\}$ 的递推公式是 $b_n = 2b_{n-1} + 1$ ，这里的 $b_n = a_{2n}$ 。容易求出 $b_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ ，所以 $a_{2n} = b_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ 。

考虑奇数项 a_{2n-1} ，则 $a_{2n-1} = a_{2n} - 1 = b_n - 1 = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$ ，则 $\{a_n\}$ 的奇数项构成的数列 $\{c_n\}$ 的通项公式是 $c_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$ ，这里 $c_n = a_{2n-1}$ 。

综上， $a_n = \begin{cases} 3 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} - 2 & n \text{ 是奇数} \\ 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} - 1 & n \text{ 是偶数} \end{cases}$ 。实际上并不需要求出这个通项公式。

下面求和 S_n 的时候，注意也要分奇偶：

$$S_{2n} = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}) = (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + (c_1 + c_2 + \cdots + c_n) = (3 \cdot 2^n - 4) + (3 \cdot 2^n - 5) = 6 \cdot 2^n - 9。$$

$$S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} = 6 \cdot 2^n - 9 - (3 \cdot 2^{n-1} - 1) = 9 \cdot 2^{n-1} - 8。$$

综上， $S_n = \begin{cases} 9 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} - 8 & n \text{ 是奇数} \\ 6 \cdot 2^{\frac{n}{2}} - 9 & n \text{ 是偶数} \end{cases}$

错位相减

常规的就不再赘述了，下面介绍一个特别的例子：

$$a_n = n^2 \cdot 2^n, \text{ 求 } S_n$$

这里的 a_n 不是一个差比数列，因为 n 的次数是2。因此这道题目需要错位相减两次。

5.数列与数论

等差数列中的数论问题

先引入一个例子

☰ Example

把数列 $\{3n - 2\}$ 和数列 $\{6n + 1\}$ 的公共项依次取出作为一个新数列 $\{a_n\}$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式

首先需要指出，本题与数论有关。数论是一门研究整数的数学分支，虽然高中书本上没有介绍，但现在的高考有意将其引入，尤其是与数列相结合作为压轴题，一般难度较大。

从数论的角度来看，数列 $\{3n - 2\}$ 中的项都有这样的性质：除以 3 余 1，称为“模 3 余 1”。而数列 $\{6n + 1\}$ 中的项都是“模 6 余 1”的。因此它们的公共项是既模 3 余 1 又模 6 余 1 的。

下面是关键：由于 $6n + 1 = 3 * 2n + 1 = 3 * (2n + 1) - 2$ ，这说明在数列 $\{6n + 1\}$ 中，每一个奇数项都是数列 $\{3n - 2\}$ 中的项（因为它们符合 $3 * f(n) - 2$ 的形式）。因此这两个数列的公共项就是数列 $\{6n + 1\}$ 的奇数项，通项公式为 $a_n = 6(2n - 1) + 1 = 12n - 5$ 。

我们发现， $\{a_n\}$ 还是一个等差数列，其中的每一项都是模 12 余 7 的，其中的 12 既是模数，也是公差，而且恰好是题目中两个数列的公差 3 和 6 的**最小公倍数**。这很符合直觉。于是可以从中总结出下面这个结论：

Note

等差数列 $\{pn + q\}$ 和 $\{sn + t\}$ （其中 p, q 为正整数， s, t 为整数）的公共项组成的数列也是等差数列，且公差为 p 和 s 的最小公倍数。

这个结论的证明需要数论的知识，略过。使用这个结论来做本题，我们马上能得到 $\{a_n\}$ 是公差为 12 的等差数列。但除了公差，我们还需要知道首项 a_1 ，这个简单，只需要把两个数列 $\{3n - 2\}$ 和 $\{6n + 1\}$ 的前几项写出来，找出它们第一个公共项就行了，很快就能得到 $a_1 = 7$ ，于是 a_n 就能求出来了。

再来看下一个例子：

Example

无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是正整数，公差大于 1，且 520 和 1314 都是 $\{a_n\}$ 中的项。问 2025 是不是 $\{a_n\}$ 中的项？

首先， $\{a_n\}$ 的通项公式应该是 $pn + q$ (p 为正整数且 $p > 1$ ， q 为整数) 形式的。

现在，520 和 1314 都是 $\{a_n\}$ 中的项，假设 $520 + kp = 1314$ ，则 $p = \frac{794}{k}$ ，这说明模数（或者说公差） p 应该是 794 的一个因子。假设 2025 是 $\{a_n\}$ 中的项， $1314 + mp = 2025$ ，则 $p = \frac{711}{m}$ ，这说明模数 p 应该是 711 的一个因子。于是 p 应该是 794 和 711 的公因子。通过质因数分解，可以得到 $794 = 2 * 397$ ， $711 = 3^2 * 79$ ，其中 397 和 79 都是质数，因此 794 和 711 的公因子只有 1，但是题目说公差大于 1，从而 2025 不可能是 $\{a_n\}$ 中的项。

其它数论问题

本节介绍一般性的数论的问题，它们非常考验数学思想，因而比较困难。

首先，我们介绍一下数论中的一些基本概念：

整除

a, b 是整数。若存在整数 k 使得 $b = ka$ ，则称 a 整除 b ，记作 $a|b$ 。

带余除法

a, b 是正整数。显然一定存在正整数 p, r ， $0 \leq r < b$ ，使得 $a = pb + r$ ，称为带余除法，其中 p 称为 b 除 a 的商， r 称为 b 除 a 的余数。

因子

a 是正整数。称整除 a 的数为 a 的因子。特别地，若因子为素数，则称为质因子。

素数

p 是正整数。若 p 除了 1 和 p 之外没有其它因子，则称 p 是素数。

- 规定 1 不是素数，2 是最小的素数，也是唯一的偶素数。
- 素数也称质数。
- 不是素数的正整数称为合数。
- 素数有无穷多个。

公因子和最大公因子

a, b 是正整数。若一个数 c 既是 a 的因子，又是 b 的因子，则称 c 为 a, b 的一个公因子。最大的公因子称为最大公因子，也叫做最大公约数，记作 (a, b) 。它的一些性质如下：

- $(a + kb, b) = (a, b)$
- $(ka, kb) = k(a, b)$

其中 k 是任意正整数。

这两个性质不难证明，例如第一个性质， (a, b) 既是 b 的因子也是 a 的因子，因此一定是 $a + kb$ 的因子，从而是 $a + kb$ 和 b 的公因子。假设还有比 (a, b) 更大的公因子 m ，则

$m|a+kb$, $m|b$, 推出 $m|a$, 这说明 m 是 a 和 b 的公因子, 而且比 (a, b) 更大, 是矛盾的。故得证。

公倍数和最小公倍数

a, b 是正整数。若存在一个数 c , a 和 b 都是 c 的因子, 则称 c 为 a, b 的一个公倍数。最小的公倍数称为最小公倍数, 记作 $[a, b]$ 。

互素

a, b 是正整数。若 a, b 除了 1 之外没有其它公因子, 即 $(a, b) = 1$, 则称 a, b 互素, 或者称为互质。

- 对任意正整数 a , 都有 $(a, a+1) = (a, 1) = 1$ 。利用这个性质以及下面将要介绍的质因子唯一分解定理可以证明素数有无穷多个, 留给读者思考。

下面, 介绍数论中最基本的一个定理:

质因子唯一分解

任意一个大于 1 的正整数 N 都能被唯一的分解为若干质因子的乘积。

例如 120 的质因子为 2, 3, 5, 它可以被分解为 $2^3 \cdot 3 \cdot 5$, 这种分解是唯一的。

下面举几例数列中的数论问题。提前说明一下, 有些解答我使用了数学归纳法, 你可以查阅教材来了解这种方法。(虽然打了星号, 但我认为非常有必要掌握)

题1

用 (a, b) 表示两个整数 a, b 的最大公因子。设数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且每一项都是正整数。证明对任意正整数 n 均有:

$$\frac{(a_1, a_2)}{a_1 a_2} + \frac{(a_2, a_3)}{a_2 a_3} + \dots + \frac{(a_n, a_{n+1})}{a_n a_{n+1}} < 1$$

解答

我们需要认识最大公因子的性质。设两个正整数 a, b , $a < b$, 由于 (a, b) 是 a 和 b 的公因子, 故存在正整数 k_1, k_2 使得 $a = k_1(a, b), b = k_2(a, b)$, 其中 $k_2 > k_1$ 。于是我们有 $b - a = (k_2 - k_1)(a, b) \geq (a, b)$, 得到一个不等式:

$$(a, b) \leq b - a$$

显然有 $(a, b) \leq a$, 这是第二个不等式。

另一方面, $\frac{a+b}{2} = \frac{k_1+k_2}{2}(a, b) \geq (a, b)$, 于是有第三个不等式:

$$(a, b) \leq \frac{a+b}{2}$$

上面三个不等式, 刻画了最大公因子的上界。本题的不等式证明则需要用到上面的第一个不等式, 这是因为 $\frac{(a_i, a_{i+1})}{a_i a_{i+1}} \leq \frac{a_{i+1} - a_i}{a_i a_{i+1}} = \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}$, 变成了裂项相消的典型形式。于是就有

$$\frac{(a_1, a_2)}{a_1 a_2} + \frac{(a_2, a_3)}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{(a_n, a_{n+1})}{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_1}$$

证毕。

🔍 题2

k 为给定的正整数, 数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = k + 1, \quad a_{n+1} = a_n^2 - k a_n + k, \quad n = 1, 2, \cdots$$

证明: 对任意不同的正整数 m, n , 必有 a_m 与 a_n 互素。

✓ 解答

显然, 求出 a_n 的通项公式是**不可能的**, 因为题目给出的是一个二次多项式型的递推公式。于是我们只能在递推公式上做文章。

任取 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 不妨设 $m > n$ 。我们要证明 $(a_m, a_n) = 1$ 。把递推公式稍做变形就有

$$a_{n+1} - k = a_n(a_n - k)$$

于是 $a_m - k = a_{m-1}(a_{m-1} - k) = a_{m-2}a_{m-1}(a_{m-2} - k) = \cdots = a_n a_{n+1} \cdots a_{m-1}(a_n - k)$ 。注意到右边是 a_n 的倍数, 不妨记作 λa_n , 则 $a_m = \lambda a_n + k$ 。利用前面介绍的最大公因子的第一个性质, 得到:

$$(a_m, a_n) = (\lambda a_n + k, a_n) = (k, a_n)$$

于是只需要证明 $(k, a_n) = 1$ 即可。题目告诉我们 $a_1 = k + 1$, 那么显然 $(a_1, k) = 1$ 。我们还可以计算出 $a_2 = 2k + 1, a_3 = 2k^2 + 4k + 1$, 一个明显的规律是它们都是 k 的倍数加 1, 因而都与 k 互素。而且根据递推公式, 不难发现所有的 a_n 都是这个形式。下面要证明这个结论, 需要用到数学归纳法。

1. $a_1 = k + 1$, 是 k 的倍数加 1。
2. 假设 $a_n = pk + 1$, 是 k 的倍数加 1。
3. $a_{n+1} = a_n^2 - k a_n + k = (p^2 - p)k^2 + 2pk + 1$, 也是 k 的倍数加 1。

这就证明了所有 a_n 都是 k 的倍数加 1 的形式, 因而都与 k 互素。证毕。

② 题3

非负有理数数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $a_{mn} = a_m + a_n$ 。证明: $\{a_n\}$ 中有相等的项。

✓ 解答

本题这个数列的性质类似于对数函数。

易知条件 $a_{mn} = a_m + a_n$ 可以扩展为 $a_{n_1 n_2 n_3 \dots n_m} = a_{n_1} + a_{n_2} + \dots + a_{n_m}$, 其中 n_1, n_2, \dots, n_m 是任意正整数。

根据质因子唯一分解定理, 任意正整数 N 唯一分解为 $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, 其中 p_i 是 N 的所有质因子。我们有

$$a_N = a_{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}} = \alpha_1 a_{p_1} + \alpha_2 a_{p_2} + \dots + \alpha_k a_{p_k}$$

受此启发, 我们设 $a_2 = \frac{t_1}{s_1}$, $a_3 = \frac{t_2}{s_2}$, 则 $a_{2^{s_1 t_2}} = s_1 t_2 a_2 = t_1 t_2$, $a_{3^{s_2 t_1}} = s_2 t_1 a_3 = t_1 t_2$, 从而 $a_{2^{s_1 t_2}} = a_{3^{s_2 t_1}}$ 。由于 $2^{s_1 t_2}$ 与 $3^{s_2 t_1}$ 奇偶性不同, 不可能相等, 故 $a_{2^{s_1 t_2}}$ 与 $a_{3^{s_2 t_1}}$ 是数列 $\{a_n\}$ 中相等的项, 证毕。

② 题4

用 (a, b) 表示两个整数 a, b 的最大公因子。设 $\{a_n\}$ 是一个正整数列, 若对任意 $i \neq j$, 有 $(a_i, a_j) = (i, j)$, 证明: $a_n = n$ 。

✓ 解答

本题的做法不容易想到。

由题意, $(a_i, a_{2i}) = (i, 2i) = i$, 则 $i | a_i$, 于是 $(a_i, a_{a_i}) = (i, a_i) = i$ 。

另一方面, $(a_{a_i}, a_{2a_i}) = (a_i, 2a_i) = a_i$, 则 $a_i | a_{a_i}$ 。于是 $(a_i, a_{a_i}) = a_i$ 。综上有 $a_i = i$, 证毕。

6. 其它数列问题举隅

本节介绍除了数论外的其它类型问题, 有时会出现新定义。这类问题更加没有章法, 灵活多变。

② 题1

已知 $a_i (i = 1, 2, 3 \dots 2025)$ 为 2025 个实数, 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2025} = 0$, 且 $|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = \dots = |a_{2025} - 2a_1|$, 证明: $a_1 = a_2 = \dots = a_{2025} = 0$ 。

✓ 解答

设 $|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = \dots = |a_{2025} - 2a_1| = k$ 。

若 $k = 0$, 则 $a_1 = 2a_2, a_2 = 2a_3, \dots, a_{2025} = 2a_1$, 由 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2025} = 0$ 知它们全为 0。

若 $k > 0$, 则 $a_1 - 2a_2, a_2 - 2a_3, a_3 - 2a_4, \dots, a_{2025} - 2a_1$ 这 2025 个数要么为 k 要么为 $-k$, 它们的和不可能为 0。但事实上它们的和为 $-(a_1 + a_2 + \dots + a_{2025}) = 0$, 矛盾表明 $k > 0$ 不成立。而 $k = 0$ 的情况上面已经证明。

证毕。

🔍 题2

已知数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 2)$ 具有性质 P : 对任意的 $i, j (1 \leq i \leq j \leq n)$, $a_i a_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两个数中至少有一个属于 A 。

(1) 分别判断数集 $\{1, 3, 4\}$ 和 $\{1, 2, 3, 6\}$ 是否具有性质 P , 并说明理由。

(2) 证明: $a_1 = 1$ 且 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} = a_n$ 。

(3) 证明: 当 $n = 5$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等比数列。

✓ 解答

本题的第三问很神奇, 不知道有什么背景。

(1) 略。

(2) 取 $i = j = n$, 则 a_n^2 和 1 中至少有一个属于 A 。但是 a_n^2 显然不可能属于 A , 因为它比 A 中的最大者 a_n 还要大, 故 1 属于 A , 只能是 $a_1 = 1$ 。

从刚才这个过程中能得到一个启发: 如果取 $j = n$, i 为 $2, 3, \dots, n-1$ 中的任意正整数, 则 $a_i a_j = a_i a_n > a_n$ 一定不在集合 A 中, 相应的 $\frac{a_n}{a_i}$ 一定属于集合 A 。依次取 $i = 2, 3, \dots, n-1$, 得到 $\frac{a_n}{a_2}, \frac{a_n}{a_3}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}}$ 均属于集合 A 。这 $n-2$ 个数依次递减, 加上集合首尾的 a_1 和 a_n 正好组成集合 A 。于是就有 $a_2 = \frac{a_n}{a_{n-1}}, a_3 = \frac{a_n}{a_{n-2}}, \dots, a_{n-1} = \frac{a_n}{a_2}$, 而且 $a_1 = \frac{a_n}{a_n}, a_n = \frac{a_n}{a_1}$, 这说明数集 A 中的任一元素 $a_k = \frac{a_n}{a_{n-k+1}}$ 。下面计算

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}} = \frac{a_n(a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1})}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}} = a_n$$

证毕。

(3) 根据(2), 我们有 $a_1 = 1, a_2 = \frac{a_5}{a_4}, a_3 = \frac{a_5}{a_3}, a_4 = \frac{a_5}{a_2}$, 则 $a_5 = a_2 a_4 = a_3^2$ 。另一方面我们取 $i = 3, j = 4$, 则 $a_3 a_4$ 与 $\frac{a_4}{a_3}$ 中至少有一个属于集合 A 。由于 $a_3 a_4 > a_2 a_4 = a_5$, 故只可能是 $\frac{a_4}{a_3}$ 属于集合 A 。由于 $1 < \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} < a_3$, 故 $\frac{a_4}{a_3}$ 对应的是 a_2 , 即 $a_4 = a_2 a_3$ 。综合前面的结论, 就有 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = a_2$, 故这是等比数列。证毕。

② 题3

是否存在正整数数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有

$$a_{n+1}^2 \geq 2a_n a_{n+2}$$

✓ 解答

把条件稍作变形, 得到

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{2a_n}$$

令 n 从 1 到 $n-1$ 累乘, 得到 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{a_n}{a_1}$, 即 $a_{n+1} \leq \frac{a_n^2}{2^{n-1} a_1}$ 。直观上看, a_n 的增长速度至少应该是指数量级的, 否则 a_{n+1} 会越来越小, 不可能保持为正整数。但是如果 a_n 的增长速度太快了, 又不会符合 $a_{n+1}^2 \geq 2a_n a_{n+2}$ 。因此我们推测 a_n 的增长速度应该恰好是指数量级的, 例如 $a_n = 2^n$ 。由于指数函数的性质, $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$, 这与题目也产生了矛盾, 到这里我们应该可以推测这样的正整数列是不存在的。

落实到具体证明上, 也不是一件容易的事情。首先, 审视我们得到的这个不等式

$$a_{n+1} \leq \frac{a_n^2}{2^{n-1} \cdot a_1}$$

我们发现它的形式上和之前在“由递推式求通项公式”小节中讲过的 $a_n = pa_{n-1}^q$ 型类似。于是两边取对数, 得到 $\ln a_{n+1} \leq 2 \ln a_n - (n-1) \ln 2 - \ln a_1$ 。令 $b_n = \ln a_n$, 则递推不等式为 $b_{n+1} \leq 2b_n - (n-1) \ln 2 - \ln a_1$, 这又和我们之前讲过的 $a_n = pa_{n-1} + f(n)$ 型一样, 两边除以 2^{n+1} , 得到 $\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} \leq \frac{b_n}{2^n} - \frac{(n-1) \ln 2}{2^{n+1}} - \frac{\ln a_1}{2^{n+1}}$ 。再令 $c_n = \frac{b_n}{2^n}$, 则 $c_{n+1} - c_n \leq -\frac{(n-1) \ln 2}{2^{n+1}} - \frac{\ln a_1}{2^{n+1}}$ 。累加得 $c_{n+1} \leq \frac{\ln a_1 + \ln 2(n+1)}{2^{n+1}} - \frac{\ln 2}{2}$, 再把 $c_n = \frac{\ln a_n}{2^n}$ 代入并化简, 最终我们有:

$$a_n \leq a_1 \cdot 2^{n+1-2^n}$$

不等式右边会越来越小，最终趋于 0，所以 a_n 不可能始终保持为正整数。

🔍 题4

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 。已知 $b_n = a_n - a_{n+2}$, $c_n = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2}$, 若 $b_n \leq b_{n+1}$, $\{c_n\}$ 是等差数列, 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列。

✓ 解答

本题来自于某年江苏高考。

$b_n \leq b_{n+1}$ 等价于

$$a_n - a_{n+2} \leq a_{n+1} - a_{n+3}$$

或写成

$$a_{n+1} - a_n \geq a_{n+3} - a_{n+2} \quad (1)$$

注意到上面式子左右两边都是 a_n 相邻两项之差, 中间隔了 $a_{n+2} - a_{n+1}$ 。于是我们考虑

$$c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} - a_n) + 2(a_{n+2} - a_{n+1}) + 3(a_{n+3} - a_{n+2}) \quad (2)$$

和

$$c_{n+3} - c_{n+2} = (a_{n+3} - a_{n+2}) + 2(a_{n+4} - a_{n+3}) + 3(a_{n+5} - a_{n+4}) \quad (3)$$

由式(1)知, 式(2)右边每个括号都 \geq 式(3)右边每个括号, 则 $c_{n+1} - c_n \geq c_{n+3} - c_{n+2}$, 但 c_n 是等差数列, 说明等号取到了, 也就是式(1)的等号应该成立, 即

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+3} - a_{n+2} \quad (4)$$

还不能推出 a_n 是等差数列。我们再考虑中间缺失的 $c_{n+2} - c_{n+1}$:

$$c_{n+2} - c_{n+1} = (a_{n+2} - a_n) + 2(a_{n+3} - a_{n+1}) + 3(a_{n+4} - a_{n+2}) \quad (5)$$

式(5)和式(2)的左边相等, 故右边也相等。利用式(4)化简得到 $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 。所以 $\{a_n\}$ 是等差数列。

7.New Horizons

下面介绍三个与数列相关的著名问题, 它们常常作为题目的背景。

自然数的幂和

令 $f(n, k) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ ($n, k \in \mathbb{N}^*$), 称为自然数的幂和。

当 $k = 1$ 时, $f(n, 1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, 我们使用等差数列的求和公式可以轻易求出。

一个自然的问题是, 对于 $k \geq 2$, 上面的式子该如何求和。

首先, 我们再来回顾一下 $k = 1$ 时是如何求和的。对于 $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, 我们使用倒序相加, 或者称为高斯求和的方法, 把首尾两两配对, 每一对的和都是 $n + 1$, 一共有 $\frac{n}{2}$ 对, 所以求和的结果就是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 。然而, 这种方法并不适用于 $k \geq 2$ 的情况, 因为这时候首尾相加就不是定值了。所以, 我们需要找到另一种更加通用和普适的方法。

注意到 $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, 于是 $n = \frac{1}{2}[(n + 1)^2 - n^2] - \frac{1}{2}$, 从 1 到 n 求和, 就有

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n &= \frac{1}{2}[(2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \cdots + (n + 1)^2 - n^2] - \frac{n}{2} \\ &= \frac{1}{2}[(n + 1)^2 - 1] - \frac{n}{2} \\ &= \frac{n(n + 1)}{2} \end{aligned}$$

这种方法就能适用于 $k \geq 2$ 的情形了, 下面就以 $k = 2$ 为例, 我们来证明:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

注意到 $(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$, 于是

$$n^2 = \frac{1}{3}[(n + 1)^3 - n^3] - n - \frac{1}{3}$$

把上面的式子从 1 到 n 累加, 就有

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \frac{1}{3}[(n + 1)^3 - 1] - \frac{n(n + 1)}{2} - \frac{n}{3} \\ &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \end{aligned}$$

使用上面的方法, 很容易证明:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4} = \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2$$

于是我们发现了一个惊人的恒等式: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$ 。以这个恒等式为背景, 可以延申出下面这个题目:

Question

已知数列 $\{a_n\}$, 前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 1$ 且 $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots + a_n^3 = S_n^2$, 求 a_n

不难看出, $a_n = n$

斐波那契数列

最著名的数列，没有之一。曾经也是考卷上的常客，现在考的少了是因为早在几十年前就考烂了。

数列 $\{F_n\}$ ，满足 $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ，称为斐波那契数列。

可以求出 F_n 的通项公式为：

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

斐波那契数列与黄金比例（黄金分割率） $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 有关。当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\frac{F_n}{F_{n+1}} \rightarrow \varphi$ 。因此斐波那契数列也称为黄金分割数列。

斐波那契数列的性质很多，不胜枚举，列举几个：

Example

1. $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
2. $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
3. $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
4. $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
5. $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$
6. $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$

这些性质的证明都要利用递推公式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ 以及 $F_1 = F_2 = 1$ ，下面仅证明第一个公式：

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n &= F_1 + F_2 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n - 1 \\ &= F_3 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n - 1 \\ &= F_4 + F_3 + F_4 + \cdots + F_n - 1 \\ &= F_5 + F_4 + \cdots + F_n - 1 \\ &= \cdots \\ &= F_{n+2} - 1 \end{aligned}$$

这些公式只会出现在选择题中，其实相当于送分了，因为要选出正确选项的话，你不需要循规蹈矩地去证明它们，只需要代入几个特殊值(例如 $n = 1, 2, 3, 4$) 进去验证就行了。

与斐波那契数列类似的，还有一个所谓的**佩尔数列** $\{P_n\}$ ，也叫白银分割数列。佩尔数列的定义如下： $P_1 = 0, P_2 = 1, P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$ 。它的性质是当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\frac{P_{n+1}}{P_n} \rightarrow \sqrt{2}$ 。其中的 $\sqrt{2}$ 就是白银分割率。

调和级数

$a_n = \frac{1}{n}$ 称为**调和数列**，它的每一项是相邻两项的调和平均： $a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}}}$ 。

$\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 称为**调和级数的部分和**。当 $n \rightarrow \infty$ 时，和式 $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 称为**调和级数**。

直观上看， S_n 的每一项都越来越小，当 n 足够大的时候， $\frac{1}{n}$ 可以忽略不计。那么调和级数 S 会趋近于一个常数吗？答案是不会，它会达到正无穷。也就是 $S = \infty$ 。下面我们用导数来证明这个结论

我们熟知 $\ln x \leq x - 1$ ，于是 $\ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$ ，把这个式子从 1 到 n 求和，得到：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1)$$

即 $S_n \geq \ln(n+1)$ ，由于对数函数可以达到正无穷，故 S_n 也会达到正无穷，证毕。

上面这个结论，就是所谓的“调和级数发散”定理。它说明了，即使 S_n 增长地越来越慢，但它仍然可以达到无穷。这跟对数函数很像。

值得一提的是，对于下面这个式子

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots \quad (s \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*)$$

根据调和级数发散定理，我们得到 $\zeta(1) = \infty$ ，也很容易知道对任意 $s \in \mathbb{R}, 0 < s < 1$ ，都有 $\zeta(s) = \infty$ 。（因为当 $0 < s < 1$ 时， $\frac{1}{n^s} > \frac{1}{n}$ ）。

实际上，当 $s > 1$ 时， $\zeta(s)$ 就不会抵达无穷，而是收敛为一个确定的常数，例如

$$\zeta(2) = 1^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

上面这个等式就是著名的**巴塞尔恒等式**，由大数学家欧拉在28岁时证明。它与一些著名的数学问题有关，例如下面这个：

🔍 Question

在所有正整数中随机取两个数，求它们互质的概率

这个问题的答案是 $\frac{6}{\pi^2}$ ，也就是 $\frac{1}{\zeta(2)}$ 。2023年新高考一卷有一道概率题，背景疑似是这个问题。