

常用导数不等式汇总

指数函数类

1. $e^x \geq x + 1$

取等条件: $x = 0$

备注: 这是 $x = 0$ 处的切线不等式

2. $e^x \geq \frac{1}{2}x^2 + x + 1 (x \geq 0)$

取等条件: $x = 0$

备注: 这是 $x = 0$ 处对 e^x 进行二阶泰勒展开得到的不等式, 当 $x \leq 0$ 时, 不等号反向

3. $e^x \geq \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

取等条件: $x = 0$

备注: 这是 $x = 0$ 处对 e^x 进行三阶泰勒展开得到的不等式

3. $e^x \geq ex$

取等条件: $x = 1$

备注: 这是 $x = 1$ 处的切线不等式

4. $e^x \geq x^2 + 1 (x \geq 0)$

取等条件: $x = 0$

备注: 这个不等式不是“最佳”的, 事实上存在比 1 更大的系数 λ , 使得 $e^x \geq \lambda x^2 + 1 (x \geq 0)$, 这里的 λ 是函数 $\frac{e^x - 1}{x^2}$ 在 $x > 0$ 时的最小值, 约为 1.54414

5. $e^x \geq \frac{e^2}{4}x^2 (x \geq 0)$

取等条件: $x = 2$

6. $e^x \leq \frac{1}{1-x} (x < 1)$

取等条件: $x = 0$

备注: 这是最常用的向上估计 e^x 的不等式, 可以把 $e^x \geq x + 1$ 中的 x 替换成 $-x$ 得到

7. $e^x \leq \frac{2+x}{2-x} (x < 2)$

取等条件: $x = 0$

对数函数类

$$1. 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$$

取等条件: $x = 1$

备注: 右侧为 $x = 1$ 处的切线不等式, 左侧可以在右侧不等式中把 x 替换为 $\frac{1}{x}$ 得到

$$2. \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

取等条件: $x = 0$

备注: 这是 $x = 0$ 处对 $\ln(1+x)$ 进行二阶泰勒展开得到的不等式

$$3. \ln x \leq \frac{x}{e}$$

取等条件: $x = e$

备注: 这是 $x = 1$ 处的切线不等式

$$4. \begin{cases} \ln x \leq \frac{2(x-1)}{x+1} & 0 < x \leq 1 \\ \ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1} & x \geq 1 \end{cases}$$

取等条件: $x = 1$

备注: 本质是对数平均不等式:

$$\frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$$

$$5. \begin{cases} \ln x \geq \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) & 0 < x \leq 1 \\ \ln x \leq \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) & x \geq 1 \end{cases}$$

取等条件: $x = 1$

$$6. \begin{cases} \ln x \geq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x \leq 1 \\ \ln x \leq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} & x \geq 1 \end{cases}$$

取等条件: $x = 1$

备注: 本质是对数平均不等式:

$$\frac{a-b}{\ln a - \ln b} > \sqrt{ab}$$

也可以在不等式 5. 中把 x 替换为 \sqrt{x} 得到。这个不等式比不等式 5. 更精确。

三角函数类

1. $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x (x \geq 0)$

取等条件: $x = 0$

备注: 左侧是 $x = 0$ 处对 $\sin x$ 进行二阶泰勒展开得到的, 右侧是 $x = 0$ 处的切线不等式。当 $x \leq 0$ 时, 不等号反向

2. $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4$

取等条件: $x = 0$

备注: 左侧是 $x = 0$ 处对 $\cos x$ 进行二阶泰勒展开得到的, 右侧是 $x = 0$ 处对 $\cos x$ 进行四阶泰勒展开得到的

3. $\tan x \geq x (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$

取等条件: $x = 0$

备注: 这是 $x = 0$ 处的切线不等式

4. $\tan x \geq x + \frac{x^3}{3} (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$

取等条件: $x = 0$

备注: 这是在 $x = 0$ 处对 $\tan x$ 进行三阶泰勒展开得到的, 显然比不等式 3. 更紧

5. $\tan x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} (0 \leq x < 1)$

取等条件: $x = 0$

备注: 这等价于不等式 1. 的右边