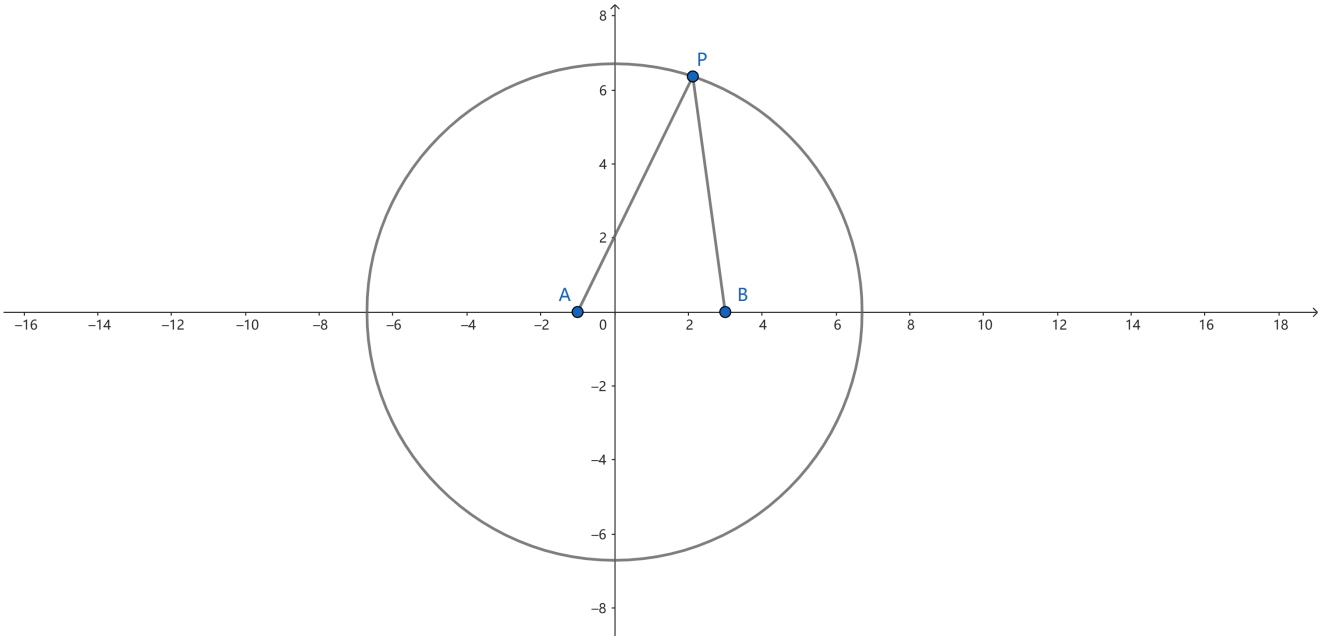
论解析几何中的最大张角问题

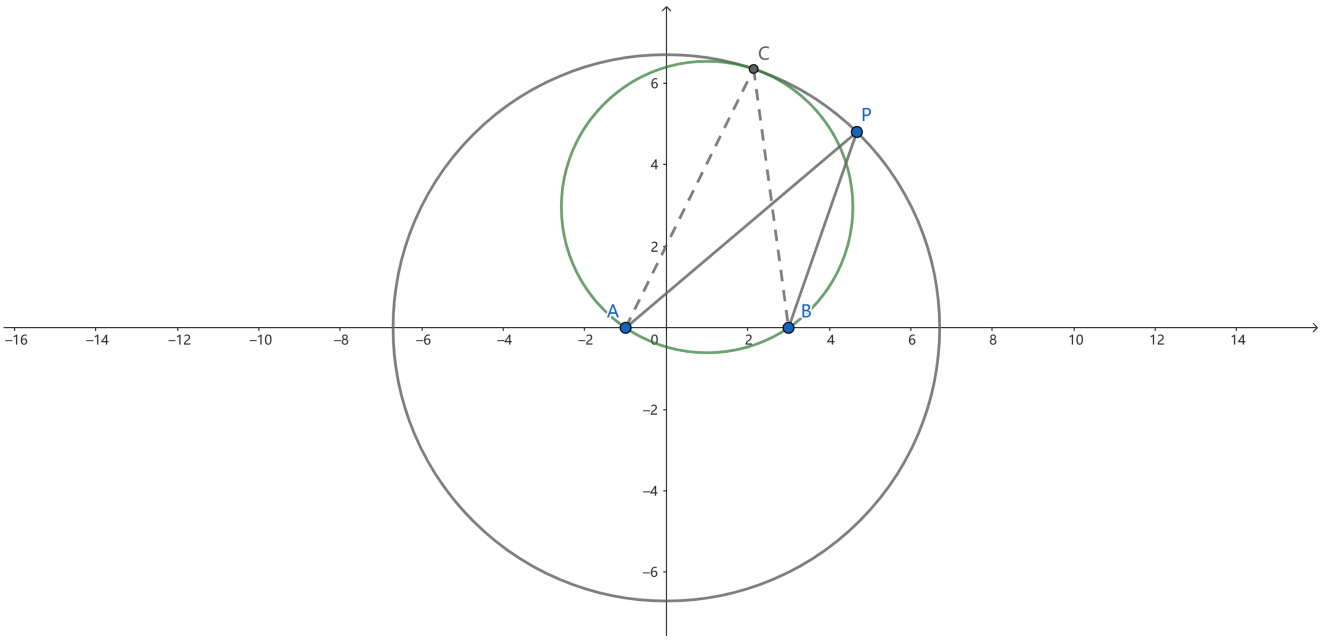
先来看一道题目：

{{}}
已知 $A(-1,0),B(3,0)$，P 是圆 $O:x^2+y^2=45$ 上的一个动点，则 $\sin\angle APB$ 的最大值为 _____ .
{{}}

设变量爆算是可行的，不过本题的背景是所谓的“最大张角问题”，这类问题有一种巧妙的几何解法。
首先画出本题的图像：



显然 $\angle APB$ 是一个锐角（因为 P 与圆的左右顶点连线所成的角是直角），于是求 $\sin\angle APB$ 的最大值，等价于求张角 $\angle APB$ 的最大值。另外考虑到对称性，不妨设 P 位于圆的上半部分。
现在，我们作一个圆：它经过 A,B 两点，且内切于圆 O，切点为 C，如下：



不难发现当 P 与 C 重合时，$\angle APB$ 最大。这基于一个常识：弦所对的圆周角，一定比圆外一点对弦张成的角大，一定比圆内一点对弦张成的角小。
下面只需要求出这个内切于圆 O 的圆即可。设其方程为：$(x-1)^2+(y-t)^2=t^2+4$，联立方程：

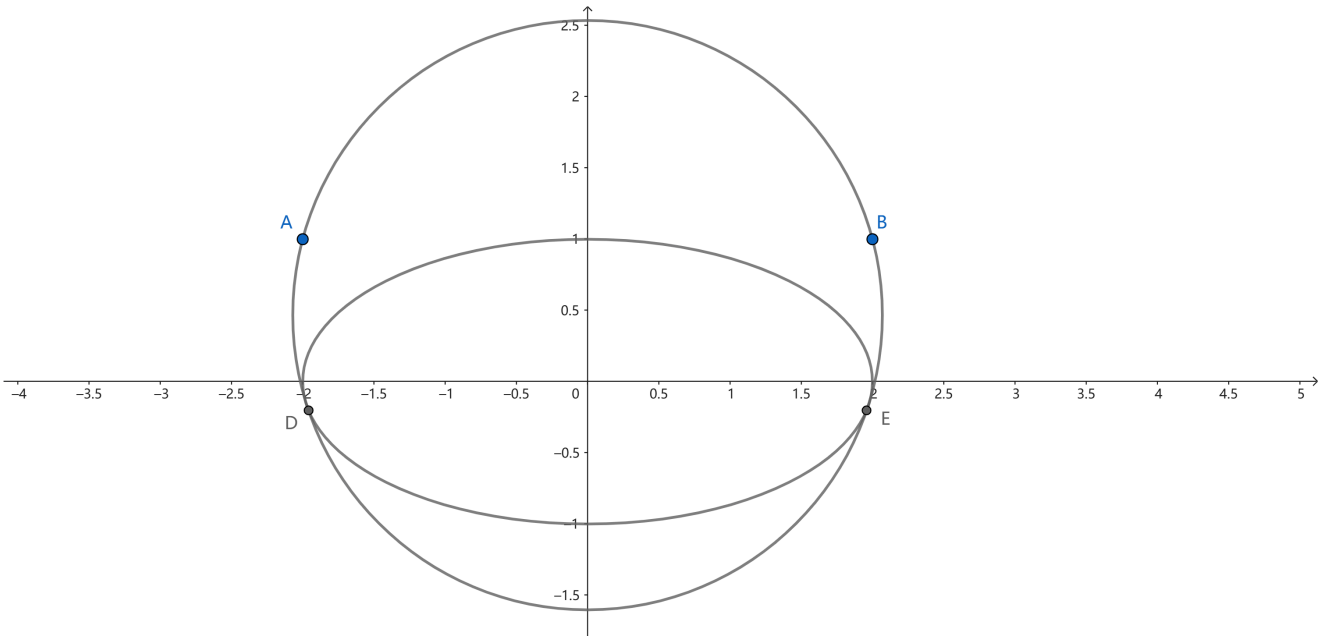
$$\begin{cases} x^2+y^2=45 \\ (x-1)^2+(y-t)^2=t^2+4 \end{cases}$$

根据 $\Delta=0$ 可求得 $t=\frac{2\sqrt{55}}{5}$，进一步可以求出切点 C 的坐标与 $\sin\angle ACB$。

与“最大张角问题”相关的一个定理，称为**米勒定理**，参见
https://zhuanlan.zhihu.com/p/653262335
依据上面的原理，试着解决下面这道题，它来自**2020年成都七中高中毕业班三诊模拟**

{{}}
已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上一动点，$A(-2,1)$，$B(2,1)$，则 $\cos\angle APB$ 的最大值为 _____ .
{{}}

答案是 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，作图如下：



当 P 是切点 D 或 E 时，$\angle APB$ 最小，$\cos\angle APB$ 。