「特别篇」三次函数_题集1

试题

T1

> 新月

已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbb{R})$，若不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $\{x|x>m,且x\neq n\}$ ，且 $n-m=1$，则函数 $f(x)$ 的极大值为( )

$A.\ \frac{1}{4}$

$B.\ \frac{4}{27}$

$C.\ 0$

$D.\ \frac{4}{9}$

T2

> 新月

2021年全国乙卷[理]

设 $a\neq 0$，若 $x=a$ 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则 (　　　) .

$A.\ a<b$

$B.\ a>b$

$C.\ ab<a^2$

$D.\ ab>a^2$

T3

> 新月

2025年江苏新高考基地学校第一次大联考

已知三次函数 $f(x)=2ax(x-b)^2$ 的定义域和值域都是 $[a,b]$，则 $b=$ ______ .

T4

上弦月

2024苏州调研卷

若 $\sin\frac{\pi}{10}$ 是函数 $f(x)=ax^3-bx+1(a,b\in\mathbb{N}^*)$ 的一个零点，则 $f(1)=$ ______ .

T5

上弦月

2024年广东省广州市高三调研

设直线 $y=t$ 与 $f(x)=x(x-3)^2$ 的图像的三个交点分别为 $A(a,t),B(b,t),C(c,t)$，且 $a<b<c$，则 (　　) .

A. $f(x)$ 图像的对称中心为 $(2,2)$

B. abc 的取值范围是 $(0,12)$

C. ac 的取值范围是 $(0,4)$

D. $c-a$ 的取值范围是 $(3,2\sqrt{3}]$.

T6

上弦月

2017年江苏卷[理]

已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1(a>0,b\in\mathbb{R})$ 有极值，且导函数 $f'(x)$ 的极值点是 $f(x)$ 的零点 .

(1) 求 b 关于 a 的函数关系式，并写出定义域 .

(2) 证明：$b^2>3a$.

(3) 若 $f(x)$，$f'(x)$ 这两个函数的所有极值之和不小于 $-\frac{7}{2}$，求 a 的取值范围 .

T7

上弦月

2019 年江苏卷[理]

设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$，$a,b,c\in\mathbb{R}$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 若 $a=b=c$，$f(4)=8$，求 a 的值.

(2) 若 $a\neq b$，$b=c$，且 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，求 $f(x)$ 的极小值.

(3) 若 $a=0$，$0<b\leq 1$，$c=1$，且 $f(x)$ 的极大值为 M，求证：$M\leq\frac{4}{27}$.

T8

> 满月

设函数 $f(x)=x^3+ax$ （$a\in\mathbb{R}$） ，定义函数 $y=g(x)$ 在 $x=m$ 处的函数值为关于 x 的方程 $f(f(x))=m$ 的不同实根个数。若 $\{g(x)|x\in\mathbb{R}\}=\{1,5,9\}$，求 a 的值 .

T9

> 满月

2016 年天津卷
设函数 $f(x)=(x-1)^3-ax-b$，$x,a,b\in\mathbb{R}$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间 .
(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0，且 $f(x_1)=f(x_0)$，其中 $x_1\neq x_0$，求证：$x_1+2x_0=3$.
(3) 设 $a>0$，函数 $g(x)=|f(x)|$，求证：$g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

答案

T1

答案：B
提示：由题意，函数 $f(x)$ 有两个零点 m,n，其中 n 为重根，则

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=(x-m)(x-n)^2=(x-m)(x-m-1)^2$$

求导 $f'(x)=(x-m-1)(3x-3m-1)$ ，故 $f(x)$ 的极大值为 $f(m+\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$ 。

T2

答案： D
提示：若 $a>0$，则 $a<b$；若 $a<0$，则 $a>b$，无论哪种情况都有 $ab>a^2$ 。

T3

答案：5
提示：$\frac{\pi}{5}$，$\frac{\pi}{10}$ 的三角函数值一般有两种方法求解：构造顶角为 $\frac{\pi}{5}$ 的等腰三角形（黄金三角

形）；利用三倍角公式。下面我们用三倍角公式进行推导。
根据三倍角公式：$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$，我们有

$$\begin{aligned}
\sin\frac{2\pi}{5} &= \sin\frac{3\pi}{5} \\
&= 3\sin\frac{\pi}{5} - 4\sin^3\frac{\pi}{5} \\
\iff 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} &= 3\sin\frac{\pi}{5} - 4\sin^3\frac{\pi}{5} \\
\iff 2\cos\frac{\pi}{5} &= 3 - 4\sin^2\frac{\pi}{5} \\
\iff 2\cos\frac{\pi}{5} &= 4\cos^2\frac{\pi}{5} - 1
\end{aligned}$$

到这里可以求出经典的 $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ，进而根据二倍角公式求出 $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 。下面计算：

$$\begin{aligned}
f(\sin\frac{\pi}{10}) &= a\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\Big)^3 - b\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\Big) + 1 \\
&= \frac{a}{8}(\sqrt{5}-2) - \frac{b}{4}(\sqrt{5}-1) + 1 \\
&= \Big(-\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + 1\Big) + \Big(\frac{a}{8} - \frac{b}{4}\Big)\sqrt{5}
\end{aligned}$$

故 $-\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + 1 = 0$ 且 $\frac{a}{8} - \frac{b}{4} = 0$，解得 $a = 8$，$b = 4$，从而 $f(1) = 8 - 4 + 1 = 5$ 。

顺带一提，$\frac{\pi}{5}$ 这个角的特殊之处是它的二倍角和三倍角之和等于 π，所以它的三角函数值能够用上面的方法求出根号解。

T4

答案：$\frac{3}{2}$
提示：首先注意到 $f(b) = 0$，则定义域要包含 0 ，知 $a < 0, b \geq 0$， 求导 $f'(x) = 2a(x-b)(3x-b)$ ，于是在定义域 $[a,b]$ 上，有

$$\begin{aligned}
f(x)_{min} &= f(\frac{b}{3}) = \frac{8ab^3}{27} \\
f(x)_{max} &= \max\{f(a), f(b)\} = \max\{2a^2(a-b)^2, 0\} = 2a^2(a-b)^2
\end{aligned}$$

由题意，有 $\frac{8ab^3}{27} = a$ 且 $2a^2(a-b)^2 = b$，解得 $b = \frac{3}{2}$ 。

T5

答案：ACD
提示：本题考察了三次函数的两个知识点：

- 三次函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的对称中心为二阶导数的零点（称为拐点），即 $-\frac{b}{3a}$ ；

- 三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的根 x_1,x_2,x_2 满足韦达定理：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

对于 BCD 选项，由题意知 a,b,c 是三次方程 $x(x-3)^2=t$ 的三个根，展开得

$$x^3-6x^2+9x-t=0$$

于是由三次方程的韦达定理得 $a+b+c=6$，$ab+bc+ca=9$，$abc=t$ 。

B 选项：由于 $abc=t$，只需要考虑 t 的范围，画出 $f(x)$ 的图像后易得。
C 选项：$ac=9-b(a+c)=9-b(6-b)=(b-3)^2$，只需要考虑 b 的范围，同样根据 $f(x)$ 的图像易得。
D 选项：$c-a=\sqrt{(c+a)^2-4ac}=\sqrt{(6-b)^2-4[9-b(a+c)]}=\sqrt{(6-b)^2-4[9-b(6-b)]}$，也是只需要考虑 b 的范围。

T6

答案：(1) $(3,+\infty)$ (2) 略 (3) $(3,6]$
提示： 前两问比较简单，题目的意思是说 $f(x)$ 的对称中心恰好为一个零点，根据此条件容易求出 $b=\frac{2a^2}{9}+\frac{3}{a}$，而 a 的范围可根据 $f'(x)$ 有两个零点，即 $\Delta>0$ 来求解，解得 $a>3$ 。
第三问，$f'(x)=3x^2+2ax+b$ ，设 $f(x)$ 的极值点为 x_1,x_2，则

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=-\frac{2a}{3} \\ x_1x_2&=\frac{b}{3} \\ x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{4a^2-6b}{9} \end{aligned}$$

$f'(x)$ 的极值为 $b-\frac{a^2}{3}$ ；
$f(x)$ 的极值之和为

$$\begin{aligned} f(x_1)+f(x_2)&=x_1^3+x_2^3+a(x_1^2+x_2^2)+b(x_1+x_2)+2 \\ &=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)+a(x_1^2+x_2^2)+b(x_1+x_2)+2 \\ &=-\frac{2a}{3}\cdot\left(\frac{4a^2-6b}{9}-\frac{b}{3}\right)+a\cdot\frac{4a^2-6b}{9}-\frac{2ab}{3}+2 \\ &=0 \qquad (\text{化简到最后使用} b=\frac{2a^2}{9}+\frac{3}{a}\text{代入}) \end{aligned}$$

还有一种更简便的算法： $f(x)$ 的对称中心为 $(-\frac{a}{3},0)$ ，而 $f(x_1),f(x_2)$ 关于对称中心对称，故 $f(x_1)+f(x_2)=0$ 。

综上，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的极值之和为 $b-\frac{a^2}{3}=-\frac{a^2}{9}+\frac{3}{a}$ ，其中 $a>3$，根据 $-\frac{a^2}{9}+\frac{3}{a}\geq-\frac{7}{2}$，解得 $a\leq 6$，故 $3<a\leq 6$ 。

T7

答案： (1) 2 (2) -32 (3) 略
提示： 前两问比较简单。
第三问，$f(x)=x(x-1)(x-b)$ ，需要求出极大值 M，有两种方法：

- 法一：求导 $f'(x)=3x^2-2(b+1)x+b$ ，设其两个零点分别为 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，我们想要的是极大值点 x_1，当然可以根据求根公式得到

$$x_1=\frac{b+1-\sqrt{b^2-b+1}}{3}$$

  但是如果把这一大坨奇形怪状的东西直接代入 $f(x_1)$ 进行计算也太抽象了，比较好的方法是：注意到 $0<x_1<b\leq 1$ ，我们可以把 b 放缩成 1 ：

$$\begin{aligned}f(x_1)&\leq x_1(x_1-1)(x_1-1)\\&=x_1(x_1-1)^2\end{aligned}$$

  然后再考虑函数 $g(x)=x(x-1)^2,0<x<1$，求导易证 $g(x)\leq\frac{4}{27}$，从而 $M=f(x_1)\leq\frac{4}{27}$ 。
- 法二：前面与法一相同，只不过在求解函数 $x(x-1)^2$ 的最大值时，可以用**三元平均值不等式：**

$$\begin{aligned}x(x-1)^2&=x(1-x)(1-x)\\&=\frac{1}{2}\cdot 2x(1-x)(1-x)\\&\leq\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2x+1-x+1-x}{3}\right)^2\\&=\frac{4}{27}\end{aligned}$$

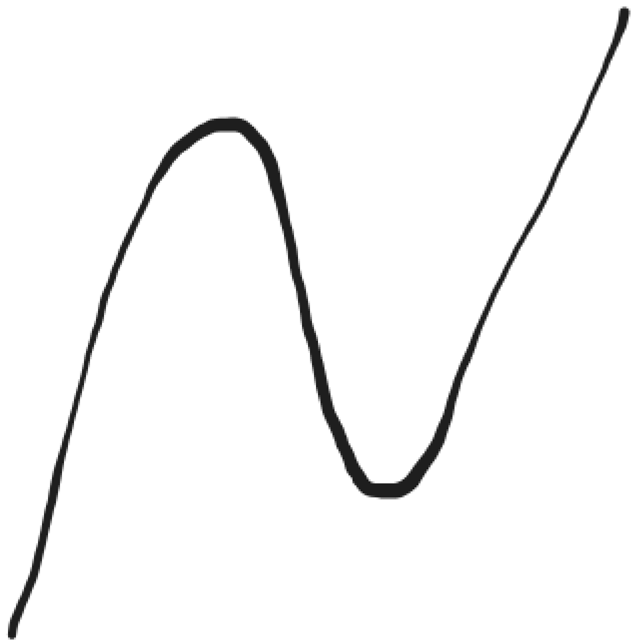
  等号成立当且仅当 $2x=1-x$，即 $x=\frac{1}{3}$ 时。

T8

答案：-3
提示：本题非常有意思，也颇有难度。
题干其实不难理解，就是作一条平行于 x 轴的直线 $y=m$ 与函数 $f(f(x))$ 的图像相交，交点个数只可能是 $1,5,9$ 个。这里的 $f(f(x))=(x^3+ax)^3+a(x^3+ax)$ ，是一个九次函数，把它展开后求导讨论不太现实。

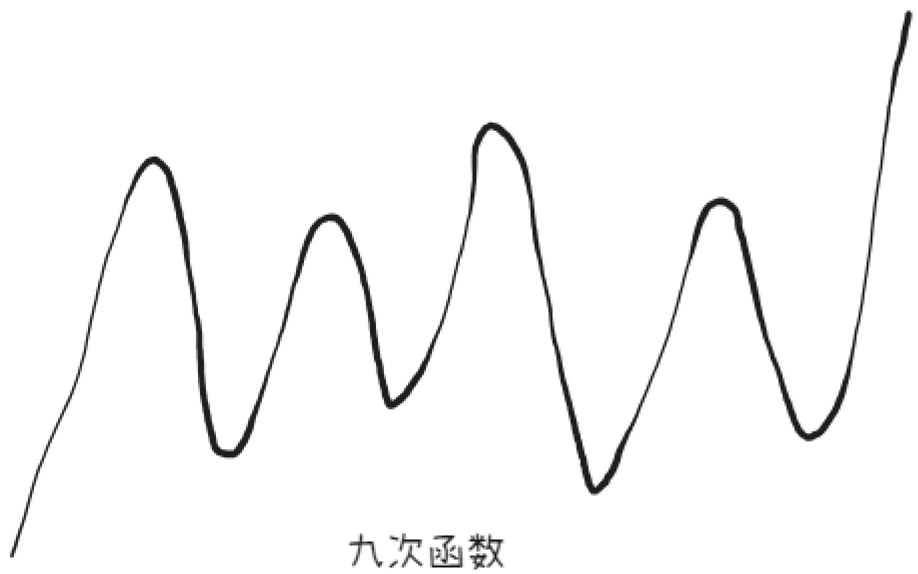
> ***“数缺形时少直观，形缺数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休”***

既然从“数”的角度行不通，那么我们来思考这样一个问题：九次函数的图像长什么样子？类比三次函数，三次函数的导数是二次函数，它最多有两个极值点，图像最多“拐”两次：



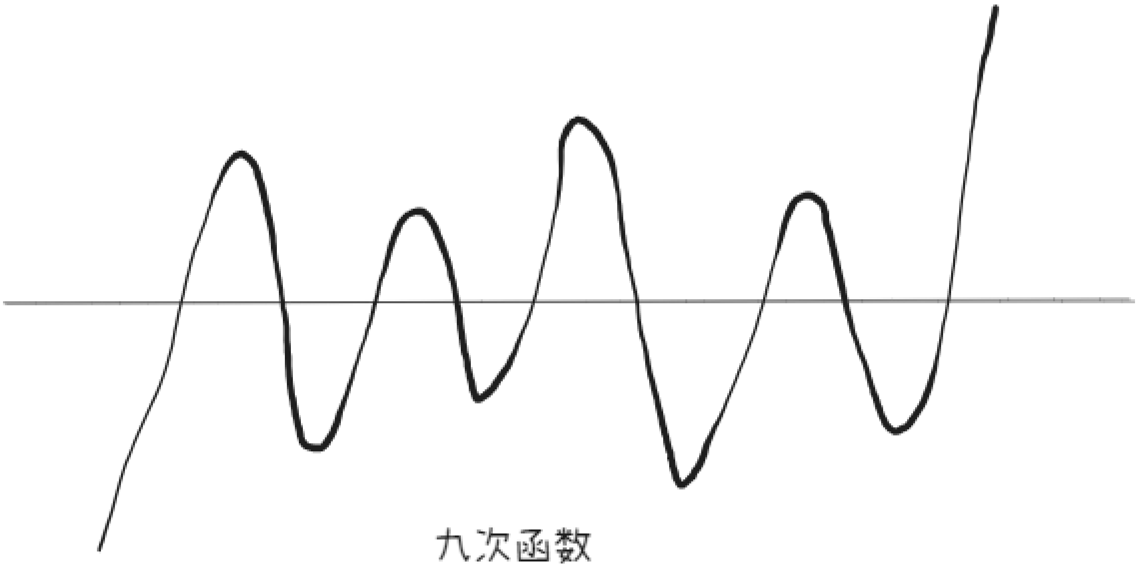
三次函数

九次函数的导数是八次函数，所以它最多“拐”八次：



九次函数

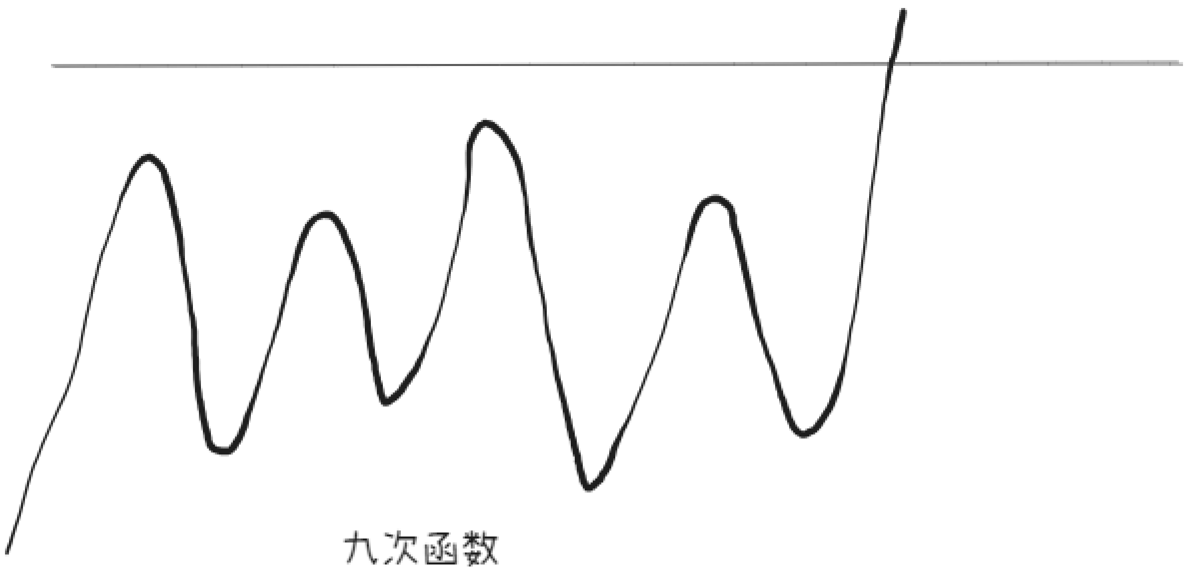
不难发现，只有“拐”八次的情况下，才可能存在 9 个交点：



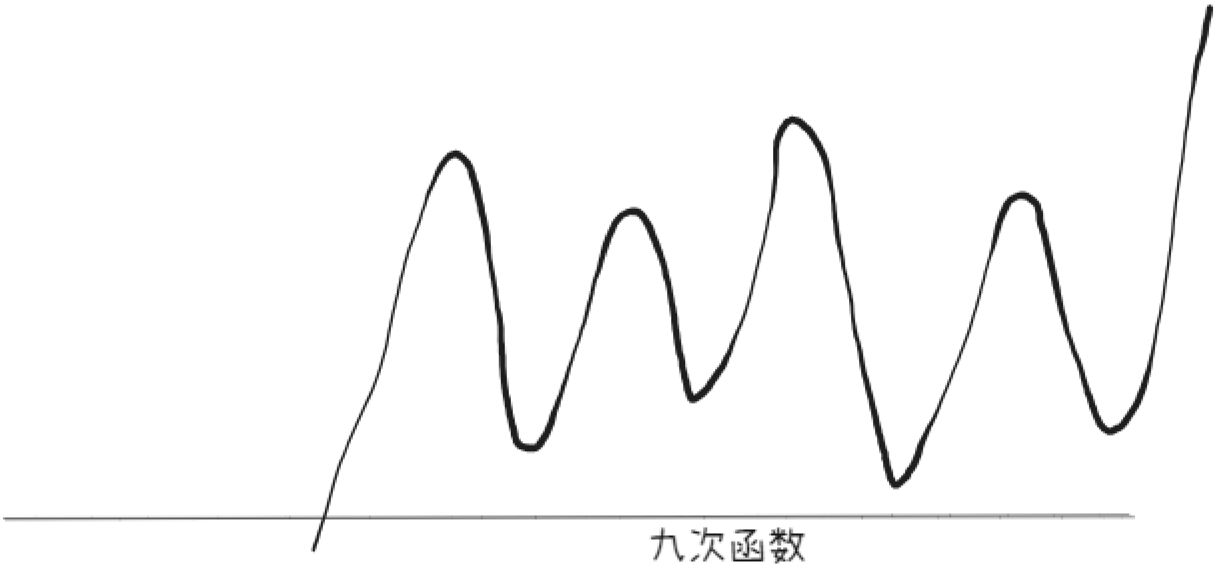
所以本题的九次函数一定是“拐”八次的，我们记住这个条件。

题目还要求交点个数可以是 1 和 5，分别考虑之：

- 1 个交点，显然为：

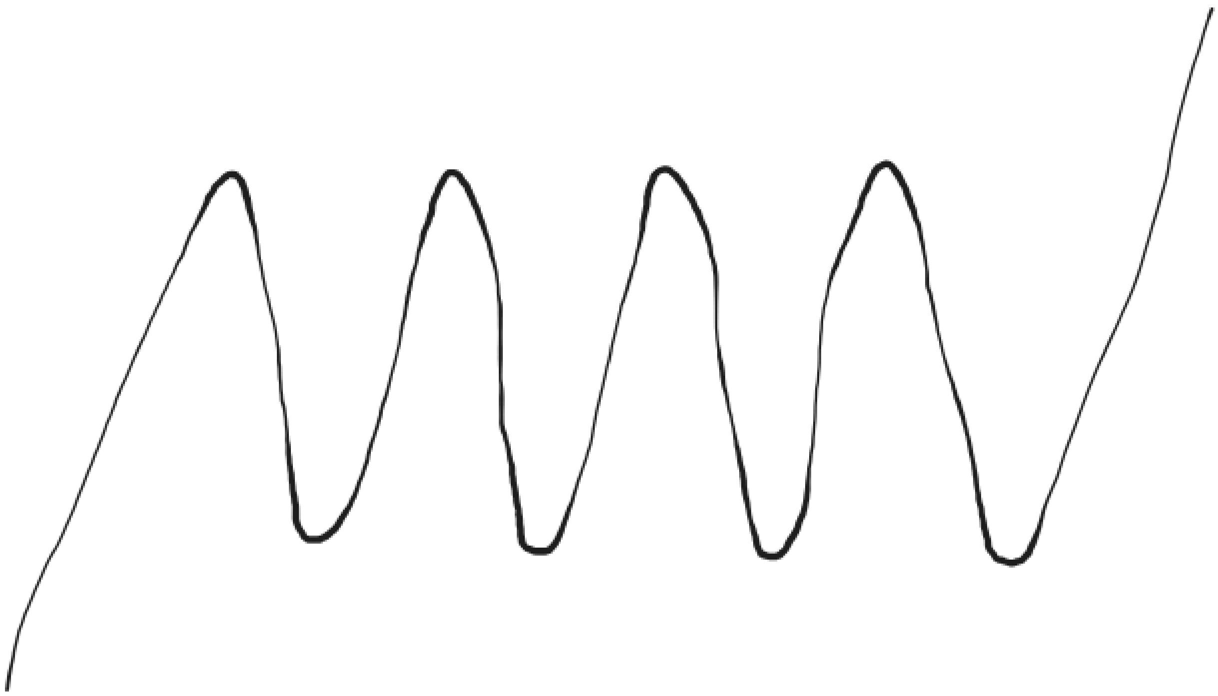


或者：

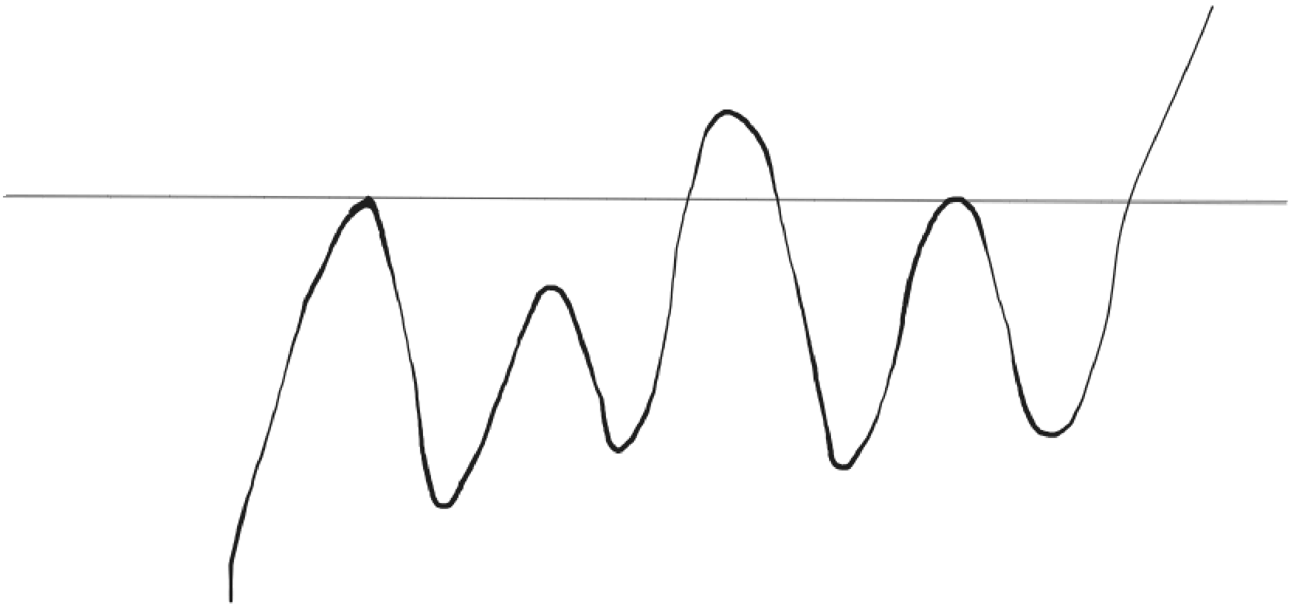


这是一定可以满足的。

- 5 个交点，这种情况比较有意思了。仔细观察上面九次函数的图像，什么时候会和直线有 5 个交点呢？在上面画出的图中，是不可能的，但是如果九次函数长下面这个样子：



其中的所有极大值都相等，所有极小值都相等，那么如果直线经过所有极大值，或者所有极小值，此时的交点个数正好是 5 。
难道除了上面这种极为特殊的情形之外，就不能有 5 个交点了吗？**有的兄弟，有的**，比如下面这个图：



确实也有 5 个交点，但是注意题目要求交点个数**只能**是 $1,5,9$ 。对于上面这个图，显然交点个数的情形不止这三种，所以是不符合题意的。

综上，我们弄清楚了本题的九次函数需要满足的两条性质：

1. 有 8 个极值点;
2. 所有极大值都相等，所有极小值都相等。

现在的新问题，就是把这两个性质翻译成数学表达式，从而解出 a 的值。

考虑 $f(f(x))$ 的导数，当然我们不直接对具体的解析式求导，可以使用复合函数求导的链式法则，得到

$$[f(f(x))]'=f'(f(x))f'(x)$$

函数 $f(f(x))$ 的极值点也就是上面函数的零点，即 $f'(f(x))$ 的零点和 $f'(x)$ 的零点。

先考虑 $f'(f(x))$ 的零点，设其中一个为 x_0，那么 $f(x_0)$ 应该是 $f'(x)$ 的零点，而 $f'(x)=3x^2+a$，零点为 $\pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$（从这里也能看出 a 一定小于 0 ），所以 $f(x_0)=\pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 。下面计算 $f(f(x))$ 的极值 $f(f(x_0))$ ：

若 $f(x_0)=\sqrt{-\frac{a}{3}}$，则

$$f(f(x_0))=f(\sqrt{-\frac{a}{3}})=\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

若 $f(x_0)=-\sqrt{-\frac{a}{3}}$，则

$$f(f(x_0))=f(-\sqrt{-\frac{a}{3}})=-\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

考虑到正负性，$-\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 应该是函数 $f(f(x))$ 的极大值，$\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 是极小值。

再考虑 $f'(x)$ 的零点，为 $\pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$，所以 $f(f(x))$ 的极值为

$$f(f(\sqrt{-\frac{a}{3}}))=\frac{2a^2(27-4a^2)}{81}\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

以及

$$f(f(-\sqrt{-\frac{a}{3}}))=\frac{2a^2(4a^2-27)}{81}\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

这两个极值哪个是极大值、哪个是极小值，由 $27-4a^2$ 的正负决定。

如果 $27-4a^2>0$，即 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}<a<0$，则有

$$\frac{2a^2(27-4a^2)}{81}\sqrt{-\frac{a}{3}}=-\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

解得 $a=3$ (舍去)。

如果 $27-4a^2<0$，即 $a<-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，则有

$$\frac{2a^2(4a^2-27)}{81}\sqrt{-\frac{a}{3}}=-\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

解得 $a=-3$ 或 $\frac{3}{2}$ (舍去)。

所以，$a=-3$ 。

T9

答案：(1) $a\le 0$ 时，单增区间为 $\mathbb{R}$； $a>0$ 时，单增区间为 $(-\infty,1-\sqrt{\frac{a}{3}})$ 和 $(1+\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty)$ ；单减区间为 $(1-\sqrt{\frac{a}{3}},1+\sqrt{\frac{a}{3}})$； (2) 略 (3) 略
提示：
第一问比较简单。

第二问是三次函数的一个重要性质：对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ，设对称中心的横坐标为 x_0，一个极值点为 x_1，若有 $x_2\neq x_1$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $2x_1+x_2=3x_0$ 。下面给出证明：

由 $f(x_1)=f(x_2)$ 得

$$\begin{aligned}&ax_1^3+bx_1^2+cx_1=ax_2^3+bx_2^2+cx_2\\ \iff\ & a(x_1^3-x_2^3)+b(x_1^2-x_2^2)+c(x_1-x_2)=0\\ \iff\ & a(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+b(x_1+x_2)+c=0\qquad(1)\end{aligned}$$

由 $f'(x_1)=0$ 得

$$3ax_1^2+2bx_1+c=0\qquad(2)$$

两个条件用完了。现在证明 $2x_1+x_2=3x_0=-\frac{b}{a}$ 。我们设 $t=2x_1+x_2$，则 $x_2=t-2x_1$，再由 (2) 式得 $x_1^2=\frac{-c-2bx_1}{3a}$，把这两个式子代入 (1) 式得：

$$\begin{aligned}\frac{-c-2bx_1}{3}+ax_1(t-2x_1)+a(t-2x_1)^2+b(t-x_1)+c=0\\ \iff at^2+(b-3ax_1)t+\frac{2c}{3}+2ax_1^2-\frac{5bx_1}{3}=0\\ \iff at^2+(b-3ax_1)t+\frac{2c}{3}+\frac{-2c-4bx_1}{3}-\frac{5bx_1}{3}=0\\ \iff at^2+(b-3ax_1)t-3bx_1=0\\ \iff (at+b)(t-3x_1)=0\end{aligned}$$

解得 $t=-\frac{b}{a}$ 或 $t=3x_1$，但由于 $x_2\neq x_1$，故 $t=2x_1+x_2\neq 3x_1$，所以 $t=-\frac{b}{a}=3x_0$ ，证毕。

第三问，考虑到 $(x-1)^3$ 不太方便，我们设函数 $g(x)=|f(x+1)|=|x^3-ax-a-b|$，再设 $c=-a-b$，则 $g(x)=|x^3-ax+c|$ 。设在 $[-1,1]$ 上 $g(x)$ 的最大值为 M ，则问题等价于 $M\geq\frac{1}{4}$ 。
这是一个经典问题，背景是 **“切比雪夫多项式”** 。这个问题有很简洁的解法：

注意到

$$\begin{aligned}g(-1)&=|-1+a+c|\\ g(1)&=|1-a+c|\\ g(\frac{1}{2})&=|\frac{1}{8}-\frac{a}{2}+c|\\ g(-\frac{1}{2})&=|-\frac{1}{8}+\frac{a}{2}+c|\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}M&\geq\frac{g(-1)+g(1)+2g(-\frac{1}{2})+2g(\frac{1}{2})}{6}\\ &=\frac{|-1+a+c|+|1-a+c|+|\frac{1}{4}-a+2c|+|-\frac{1}{4}+a+2c|}{6}\\ &=\frac{|1-a-c|+|1-a+c|+|-\frac{1}{4}+a-2c|+|-\frac{1}{4}+a+2c|}{6}\\ &\geq\frac{|1-a-c+1-a+c-\frac{1}{4}+a-2c-\frac{1}{4}+a+2c|}{6}\\ &=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

证毕！

一般地，有如下定理：

> 对任意首一多项式(最高次项系数为 1 的多项式) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+x^n$ ，设 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 M，则 $M\geq\frac{1}{2^{n-1}}$ 。等号成立当且仅当 $f(x)\equiv\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ ，其中 $T_n(x)$ 为**切比雪夫多项式** 。

切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 的递归定义如下：

1. $T_0(x)=1$
2. $T_1(x)=x$
3. $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$

可以写出 $T_n(x)$ 的前几项：

$$\begin{aligned}
&T_1(x)=x\\
&T_2(x)=2x^2-1\\
&T_3(x)=4x^3-3x\\
&T_4(x)=8x^4-8x^2+1\\
&T_5(x)=16x^5-20x^3+5x
\end{aligned}$$

有没有一种似曾相识的感觉？我们熟知：

$$\begin{aligned}
\cos x&=\cos x\\
\cos 2x&=2\cos^2 x-1\\
\cos 3x&=4\cos^3 x-3\cos x
\end{aligned}$$

没错，切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 就是把 $\cos nx$ 用 n 倍角公式展开后的 $\cos x$ 替换成 x 得到的。
求解本题的时候，我们之所以要取 $g(\pm\frac{1}{2})$ 和 $g(\pm 1)$ ，是因为方程 $|T_3(x)|=1$（或者说 $T_3(x)$ 取到最大值 1 或最小值 -1 ） 在区间 $[-1,1]$ 上的所有根为 $\pm\frac{1}{2},\pm 1$ 。具体解释，参见 最佳逼近 切比雪夫——切比雪夫多项式再研究 - 知乎 （其中还有若干例题可供参考）。
天津卷的这道题，出题人有意把定义域限制在 $[0,2]$ 上，而非 $[-1,1]$ 上（文科卷则没有这样做），还给了一个暗示性很强的函数形式 $(x-1)^3$ ，就是在引导我们先把函数向左平移到 $[-1,1]$ 上。