E-BOOK

สรุปสูตรคณิตม.ปลาย

อัพเดตหลักสูตรใหม่!!

"ติวเตอร์ผู้ให้No.1 ตลอดกาล"

ว้าว คณิต มันโคตรง่าย

ว้าว คณิต มันโคตรง่าย

songtames

wow.math_pthames

ว้าว คณิต มันโคตรง่าย

wow.math_pthames

โดย พี่เทมส์ ป.ตรี-โท คณิต มช.

E-book

สรุปสูตรคณิตศาสตร์ ม.ปลาย

อัพเดตตามหลักสูตรใหม่ สสวท. 2560

โดย รังสิวุฒิ เสาวภาคสุข (ครูพี่เทมส์)

ถึงน้องๆทุกคน...

หนังสือสรุปสูตรเล่มนี้ พี่รวบรวมทุกสูตรที่จำเป็นต้องใช้ในการเรียนคณิตม.ปลาย มาให้น้องๆแล้ว ที่สำคัญคือพี่ได้อัพเดตเนื้อหาตามหลักสูตรใหม่ทุกบทเรียบร้อยแล้วครับ น้องๆทุกคนไม่ต้องกังวลเลยว่าสูตรไหนใช้หรือสูตรไหนไม่ใช้ เพราะในเล่มนี้ทุกสูตรในแต่ละบทใช้กับเนื้อหาคณิตปัจจุบันครับผม นอกจากนี้พี่ยังเสริมสูตรลัด หรือทริคในการทำโจทย์ได้ง่ายขึ้นเข้าไปด้วย

น้องๆสามารถใช้เนื้อหาในเล่มนี้ประกอบการเรียน หรือฝึกทำโจทย์ได้สบายครับ ถ้ามีตรงไหนอ่านแล้วไม่เข้าใจ หรือสงสัย ทักมาถามพี่ได้ตลอดทุกเวลา เพราะพี่จะสู้ไปกับน้องๆทุกคนครับ และถ้ามีตรงไหนผิดพลาดพี่ขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วยนะครับ

และสิ่งสุดท้ายที่พี่อยากจะบอกน้องๆทุกคนก็คือ การเรียนเลขให้ประสบความสำเร็จนั้น ไม่ใช่การอ่านแค่เนื้อหา หรือแค่เรียนในห้องแล้วจบ แต่น้องทุกคนต้องทบทวนบทเรียนอย่างสม่ำเสมอ และที่สำคัญ ต้องฝึกทำโจทย์บ่อยๆด้วยนะ แรกๆอาจจะทำยังไม่ค่อยได้ ไม่เป็นไร แต่ถ้าเราฝึกบ่อยๆ เดี๋ยวมันจะง่ายเอง ขอแค่น้องอย่าหยุด “พยายาม” ไม่ต้องแข่งกับใครนะครับ แข่งกับตัวเองคนเมื่อวานก็พอ น้องต้องเก่งกว่าตัวเองคนเมื่อวานให้ได้นะครับ สู้นะ น้องของพี่ทุกคนทำได้ พี่เชื่อมั่นในตัวน้องครับ ^^

ถ้าน้องต้องการถามโจทย์ ไม่เข้าใจบทเรียน ต้องการคำปรึกษา กำลังใจ หรือต้องการสอบถามคอร์สเรียนต่างๆของพี่ ติดต่อสอบถามพี่ได้ตลอดนะครับ

: ว้าว คณิต มันโคตรง่าย

: wow.math_pthames

: songtames

: 085-5352546

แล้วเราจะสู้ไปด้วยกัน...

สารบัญ

เซต

นิยาม **เซต (sets)** หมายถึง กลุ่มของสิ่งต่างๆไม่ว่าจะเป็น คน สัตว์ สิ่งของ ซึ่งสามารถระบุสมาชิกในกลุ่มได้ และเรียกสมาชิกในกลุ่มว่า **“สมาชิกของเซต”**

การเขียนเซต

การเขียนเซตนิยมใช้อักษรตัวใหญ่เขียนแทนชื่อเซต และสามารถเขียนได้ 2 แบบ คือ

1. แบบแจกแจงสมาชิก

ตัวอย่างเช่น $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$B = \{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$

$C = \{\ldots -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots\}$

2. แบบบอกเงื่อนไข

ตัวอย่างเช่น $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ $5\}$

$B = \{x \mid x$ เป็นสระในภาษาอังกฤษ$\}$

$C = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$

*** เครื่องหมาย "|" แทนคำว่า **“โดยที่”**

คำว่า “เป็นสมาชิกของ” หรือ “อยู่ใน” เขียนแทนด้วย " $\in$ "

คำว่า “ไม่เป็นสมาชิกของ” หรือ “ไม่อยู่ใน” เขียนแทนด้วย " $\notin$ "

ข้อตกลงเกี่ยวกับจำนวนสมาชิกในเซต

1. จำนวนสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $n(A)$

เช่น $A = \{0,\ 1,\ 3\}$ $n(A) = 3$

2. ถ้าสมาชิกในเซตซ้ำกันให้เขียนเพียงครั้งเดียว

เช่น $B = \{1,\ 1,\ 3\}$ เขียนได้เป็น $B = \{1, 3\}$ $n(B) = 2$

นิยาม **เซตจำกัด (finite sets)** หมายถึง เซตที่สามารถระบุจำนวนสมาชิกในเซตได้

ตัวอย่างเช่น $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ $n(A) = 5$

$B = \{\ i,\ o,\ u\}$ $n(A) = 3$

นิยาม **เซตอนันต์ (infinite sets)** หมายถึง เซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด หรือเซตที่มีจำนวนสมาชิกมากมายนับไม่ถ้วน

ตัวอย่างเช่น $C = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

เซตที่เท่ากัน

นิยาม เซต A และเซต B จะเป็น **เซตที่เท่ากัน** ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A = B

ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนนับ และ } x \leq 5\}$

$\therefore A = B$

นิยาม **เซตว่าง (empty sets)** หมายถึง เซตที่ไม่มีสมาชิก หรือเซตที่มีจำนวนสมาชิกในเซตเป็นศูนย์ สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ { } **หรือ** ∅

ตัวอย่างเช่น $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } 1 < x < 2\} \Rightarrow A = \emptyset$

*** **เนื่องจากเราสามารถบอกจำนวนสมาชิกในเซตว่างได้ ดังนั้น เซตว่างเป็นเซตจำกัด**

นิยาม **เอกภพสัมพัทธ์ (Relative Universe)** หมายถึง เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดของสิ่งที่เราศึกษา สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ U

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนเซตของจำนวนต่างๆ มีดังนี้

I^- หรือ Z^-	แทนเซตของจำนวนเต็มลบ	Q^-	แทนเซตของจำนวนตรรกยะที่เป็นลบ
I^+ หรือ Z^+	แทนเซตของจำนวนเต็มบวก	Q^+	แทนเซตของจำนวนตรรกยะที่เป็นบวก
I หรือ Z	แทนเซตของจำนวนเต็ม	Q	แทนเซตของจำนวนตรรกยะ
N	แทนเซตของจำนวนนับ	Q'	แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ
R	แทนเซตของจำนวนจริง		

สับเซต

$A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B

- ถ้า A ไม่เป็นสับเซตของ B เขียนแทนด้วย $\mathbf{A \not\subset B}$
- ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว จำนวนสับเซตของ $A = \mathbf{2^n}$

ถ้ามีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน เลือกมาคราวละ r สิ่งจะทำได้เท่ากับ $C_{n,r}$ หรือ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ วิธี

ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว แล้ว จำนวนสับเซตของ A ที่มีสมาชิก 0 ตัว เท่ากับ $\binom{n}{0}$ ตัว

ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว แล้ว จำนวนสับเซตของ A ที่มีสมาชิก 1 ตัว เท่ากับ $\binom{n}{1}$ ตัว

ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว แล้ว จำนวนสับเซตของ A ที่มีสมาชิก 2 ตัว เท่ากับ $\binom{n}{2}$ ตัว

$\vdots$

ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว แล้ว จำนวนสับเซตของ A ที่มีสมาชิก n ตัว เท่ากับ $\binom{n}{n}$ ตัว

ดังนั้น ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว จำนวนสับเซตของ $\mathbf{A = 2^n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \mathbf{2^n}$

กำหนดให้ $A \subset B$ จำนวนสมาชิกในเซต A จะน้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกในเซต B

ถ้า $n(A) < n(B) \implies A \subset B$ เป็นสับเซตแท้

ถ้า $n(A) = n(B) \implies A \subset B$ เป็นสับเซตที่เรียกว่าสับเซตไม่แท้

เซตว่าง

$\{\ \}$ หรือ $\emptyset$ คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก หรือเซตที่มีจำนวนสมาชิกในเซตเป็นศูนย์ (เซตว่างเป็นสับเซตของเซตทุกเซต และเป็นเซตจำกัด)

ต้องรู้!!! 1. $\emptyset \subset A$ ($\emptyset$ เป็นสับเซตของทุกเซต) และ $A \subset A$ (ตัวมันเองเป็นสับเซตของตัวมันเองเสมอ)

2. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset A$ แล้ว $A = B$

3. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

4. ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว จำนวนสับเซตของ $A = 2^n$

5. ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว จำนวนสับเซตแท้ของ $A = 2^n - 1$

เพาเวอร์เซต

นิยาม เพาเวอร์เซตของเซต A คือ เซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นสับเซตทั้งหมดของของเซต A และสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P(A)

$$P(A) = \{x \mid x \subset A\}$$

Ex. $A = \emptyset$

สับเซตทั้งหมดของ A คือ $\emptyset$

$\therefore P(A) = \{\emptyset\}$

Ex. $B = \{1\}$

สับเซตทั้งหมดของ B คือ $\emptyset, \{1\}$

$\therefore P(B) = \{\emptyset, \{1\}\}$

Ex. $C = \{1, 2\}$

สับเซตทั้งหมดของ C คือ $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$

$\therefore P(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

ต้องรู้!!! 1. เนื่องจาก $\emptyset \subset A$ และ $A \subset A$ เสมอทำให้ $\emptyset \in P(A)$ และ $A \in P(A)$

2. $n(P(A)) = 2^{n(A)}$ เมื่อ A เป็นเซตจำกัด

3. $P(A) \neq \emptyset$, $n(P(A))$ ที่น้อยที่สุดเมื่อ $n(A) = 0$ คือ $2^0 = 1$ จึงสรุปว่า $n(P(A)) \neq 0$ เสมอ

4. $n(P(A)) = 2^n, n\left(P(P(A))\right) = 2^{2^n}, n\left(P\left(P(P(A))\right)\right) = 2^{2^{2^n}}, \ldots$

5. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $P(A) \subset P(B)$

6. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

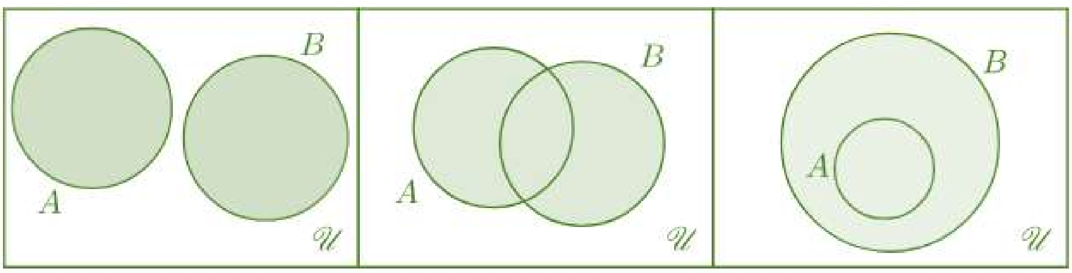
7. $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

โอเปอร์เรชันของเซต

1. **ยูเนียน (Union)** ใช้สัญลักษณ์ ∪ เช่น $A \cup B$

คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกจากเซต A หรือเซต B

Ex. $A = \{1,2,3\}, B = \{3,4,5\} \implies A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$



$A \cup B$ คือ พื้นที่ที่แรเงา

สมบัติของยูเนียน

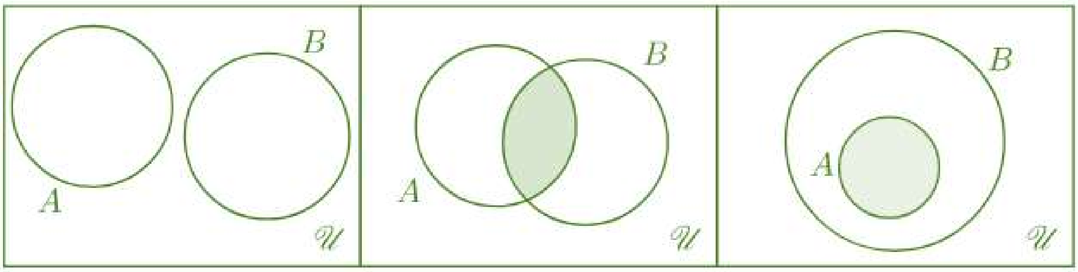
$A \cup B = B \cup A$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cup \emptyset = A = \emptyset \cup A$	$A \cup U = U = U \cup A$
$A \cup A = A$	$A \cup A' = U$
$A \cup B = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$	
$A \cup B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A = \emptyset$ และ $B = \emptyset$	

2. **อินเตอร์เซกชัน (Intersection)** ใช้สัญลักษณ์ $\cap$ เช่น $A \cap B$

คือ เซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกทั้งของเซต A และ B

<u>Ex.</u> $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{3, 2, 4\} \implies A \cap B = \{2, 3\}$

*** ถ้าหากว่า A กับ B ไม่มีสมาชิกที่ซ้ำกันเลย จะได้ $A \cap B = \emptyset$



$A \cap B = \emptyset$ เพราะไม่มีส่วนใดซ้ำกันเลย $A \cap B$ คือ พื้นที่ที่แรเงา

สมบัติของอินเตอร์เซกชัน

$A \cap B = B \cap A$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cap \emptyset = \emptyset = \emptyset \cap A$	$A \cap U = A = U \cap A$
$A \cap A = A$	$A \cap A' = \emptyset = A' \cap A$
$A \cap B = B$ ก็ต่อเมื่อ $B \subset A$	

สมบัติการแจกแจง

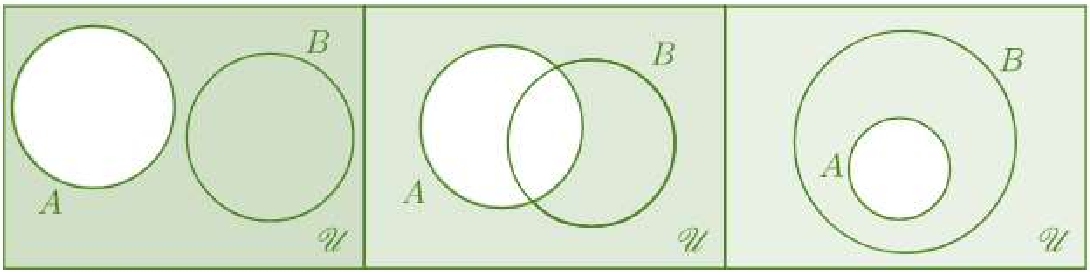
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. **คอมพลีเมนต์ (Complement)** ใช้สัญลักษณ์ ′ หรือ c เช่น A', A^c

คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ที่ไม่ใช่สมาชิกของ A

Ex. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{7,9,5\}$ $\Longrightarrow$ $A', A^c = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$



A', A^c คือ พื้นที่ที่แรเงา

สมบัติของคอมพลีเมนต์

$(A')' = A$ $U' = \emptyset$

$\emptyset' = U$

$(A \cap B \cap C \cap \dots)' = A' \cup B' \cup C' \cup \dots$

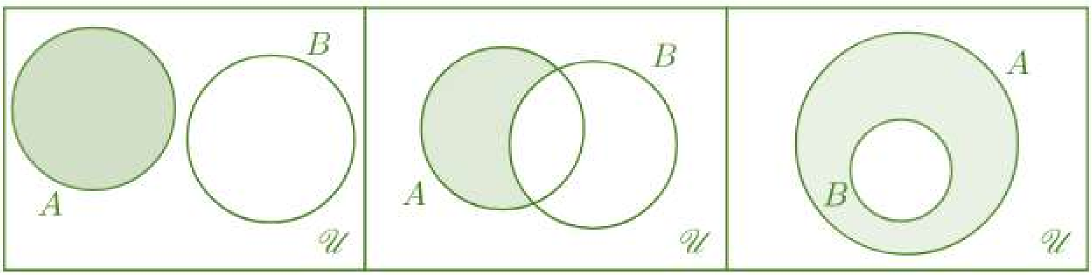
$(A \cup B \cup C \cup \dots)' = A' \cap B' \cap C' \cap \dots$

4. **ผลต่าง (Difference)** ใช้สัญลักษณ์ $(-)$ เช่น $A - B$

$A - B$ อ่านว่า คอมพลีเมนต์ของ B เมื่อเทียบกับ A คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต A ที่ไม่ใช่สมาชิกของ B

Ex. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, $C = \{5, 6, 7\}$

$\Longrightarrow$ $A - B = \{1, 2\}, B - A = \{5, 6\}, A - C = \{1, 2, 3, 4\} = A$



$A - B$ คือ พื้นที่ที่แรเงา

สมบัติของผลต่างระหว่างเซต

$A - A = \emptyset$	$A - \emptyset = A$
$\emptyset - A = \emptyset$	$A - A' = A$
$A - U = \emptyset$	$A - B \subset A$
$A - B = A$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \emptyset$	$A - B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$
$A - B = A \cap B', A \cap B = A - B'$	$A - B = B' - A', B - A = A' - B'$
$(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$	$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
$A - (B \cap C) = (A - C) \cup (B - C)$	$A - (B \cup C) = (A - C) \cap (B - C)$

สมบัติที่เจอบ่อยในการทำโจทย์

1. เดอ มอร์กอง $(A \cup B)' = A' \cap B'$
   $(A \cap B)' = A' \cup B'$
2. การเปลี่ยนกลุ่ม $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. การกระจาย $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$
4. ผลต่าง $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$

เรียนเซตแบบจัดเต็มสแกนเลย →

<u>สูตรการหาสมาชิกของเซตจำกัด</u>

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

<u>สมบัติที่ใช้บ่อยในการทำโจทย์</u>

1. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
2. $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$
3. $n(A') = n(U) - n(A)$
4. $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$

ตรรกศาสตร์

ประพจน์ เป็นประโยคบอกเล่า หรือปฏิเสธ ที่บอกได้ว่าจริงหรือเท็จ อย่างใดอย่างหนึ่ง แต่ประโยคคำถาม, คำสั่ง, ขอร้อง, อุทาน หรือประโยคที่ไม่มีค่าความจริงจะไม่เป็นประพจน์

ประโยคเปิด เป็นประโยคบอกเล่า หรือปฏิเสธที่ประกอบด้วยตัวแปรทำให้ไม่เป็นประพจน์ และเมื่อแทนที่ตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์แล้วจะได้ประพจน์

ตัวอย่าง

1. $x < 3$ เป็นประโยคเปิด ซึ่งเมื่อเติมค่าตัวแปรแล้วจะได้ประพจน์
2. $(9 \times 5) + 40$ ไม่เป็นประพจน์ หาค่าความจริงไม่ได้ และไม่เป็นประโยคเปิด เพราะไม่มีตัวแปร
3. มีจำนวนเต็ม x บางจำนวนที่น้อยกว่า 2 เป็นประพจน์
4. $5(x + y) = 5y + 5x$ เป็นประโยคเปิด เพราะมีตัวแปรที่ยังไม่ทราบค่า
5. สมการของ $x^2 + y^2 = 1$ เป็นสมการอะไร ไม่เป็นประพจน์ เพราะเป็นคำถาม

ตารางค่าความจริง

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$
T	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T	T	T

จากการสังเกต !!!

1. $p \vee \sim p \equiv T$
2. $p \wedge \sim p \equiv F$
3. ประพจน์ในรูป $p \vee q$ จะเป็นเท็จเมื่อ p และ q เป็นเท็จ
4. ประพจน์ในรูป $p \wedge q$ จะเป็นจริงเมื่อ p และ q เป็นจริง
5. ประพจน์ในรูป $p \rightarrow q$ จะเป็นเท็จเมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ
6. . ประพจน์ในรูป $p \leftrightarrow q$ จะเป็นเท็จเมื่อ p และ q มีค่าความจริงตรงข้ามกัน

ประพจน์ที่สมมูลกัน ($p \equiv q$)

คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริง**เหมือนกันทุกกรณี**ของค่าความจริงของประพจน์ย่อย

ประพจน์ที่เป็นนิเสธกัน ($\sim p$)

คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริง**ตรงข้ามกันทุกกรณี**ของค่าความจริงของประพจน์ย่อย

รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกัน

1. จัดหมู่ หรือ เปลี่ยนกลุ่ม

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$
$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$$

2. แจกแจง หรือ กระจาย

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$
$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

3. เดอร์มอแกน

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$
$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

4. การเปลี่ยนรูป

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$
$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

5. นิเสธ

$$\sim (\sim p) \equiv p$$
$$\sim [\sim (\sim p)] \equiv \sim p$$

เพิ่มเติม (รู้ไว้จะทำโจทย์ได้ง่ายขึ้น)

$p \wedge \sim p \equiv F$	$p \vee \sim p \equiv T$
$T \wedge p \equiv p$	$T \vee p \equiv T$
$F \wedge p \equiv F$	$F \vee p \equiv p$

****วิธีการตรวจสอบประพจน์ที่สมมูลกัน**

1. ใช้ตารางค่าความจริง (ต้องได้ค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี)
2. ใช้คุณสมบัติต่างๆเปลี่ยนรูป (เปลี่ยนรูปให้เหมือนกัน)

สัจนิรันดร์

คือ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี เช่น $p \vee \sim p$, $p \longrightarrow (p \vee q)$

การตรวจสอบประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์

1. สร้างตารางค่าความจริง
   - ต้องเป็น T ทุกกรณี
2. ใช้รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน
   - ถ้า A และ B สมมูลกันแล้ว $A \leftrightarrow B$ เป็นสัจนิรันดร์

     (ต้องแสดงให้ได้ว่า A และ B สมมูลกัน)
3. โดยหาข้อขัดแย้ง
   - สมมติประพจน์นั้นมีค่าความจริงเป็นเท็จ (F)
   - ถ้าเกิดข้อขัดแย้งจะเป็นสัจนิรันดร์

ตัวบ่งปริมาณ

1. $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x ทุกค่าที่อยู่ใน U ลงใน $P(x)$ ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

   $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ มีค่า x อย่างน้อย 1 ตัวที่อยู่ใน U แทนลงใน $P(x)$ ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ
2. $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x อย่างน้อย 1 ตัวที่อยู่ใน U ลงใน $P(x)$ ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

   $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ แทนค่า x ทุกตัวที่อยู่ใน U ลงใน $P(x)$ทำให้ $P(x)$เป็นเท็จ

นิเสธของตัวบ่งปริมาณ

$\sim \forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$ และ $\sim \exists x[P(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)]$

การอ้างเหตุผล

1. พิจารณาได้จากประพจน์ $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow c$ (เอาเหตุมาเชื่อมด้วย "และ" และเอาผลมาเชื่อมด้วย "ถ้า..แล้ว") ถ้าประพจน์ดังกล่าวมีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ **(เป็นสัจนิรันดร์)** เราสามารถสรุปได้ว่าการอ้างเหตุผลดังกล่าวเป็นการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผล

2. ใช้รูปแบบต่อไปนี้

1) การแจงผลตามเหตุ หรือ (Modus Ponen)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

2) การแจงผลค้านเหตุ หรือ (Modus Tollen)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

3) ตรรกบท หรือ (Law of Syllogism)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

4) ตรรกบทการเลือก หรือ (Disyunction Syllogism)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

5) การร่วม

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

6) การอนุมานโดยกรณี หรือ (Inferences by cases)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore (p \vee q) \rightarrow r \end{array}$$

7) การผนวก

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

8) การทำให้ง่าย

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

9) ข้อความแย้งสลับที่ หรือ (Equivalence from for Implication)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \hline \therefore \sim q \rightarrow \sim p \end{array}$$

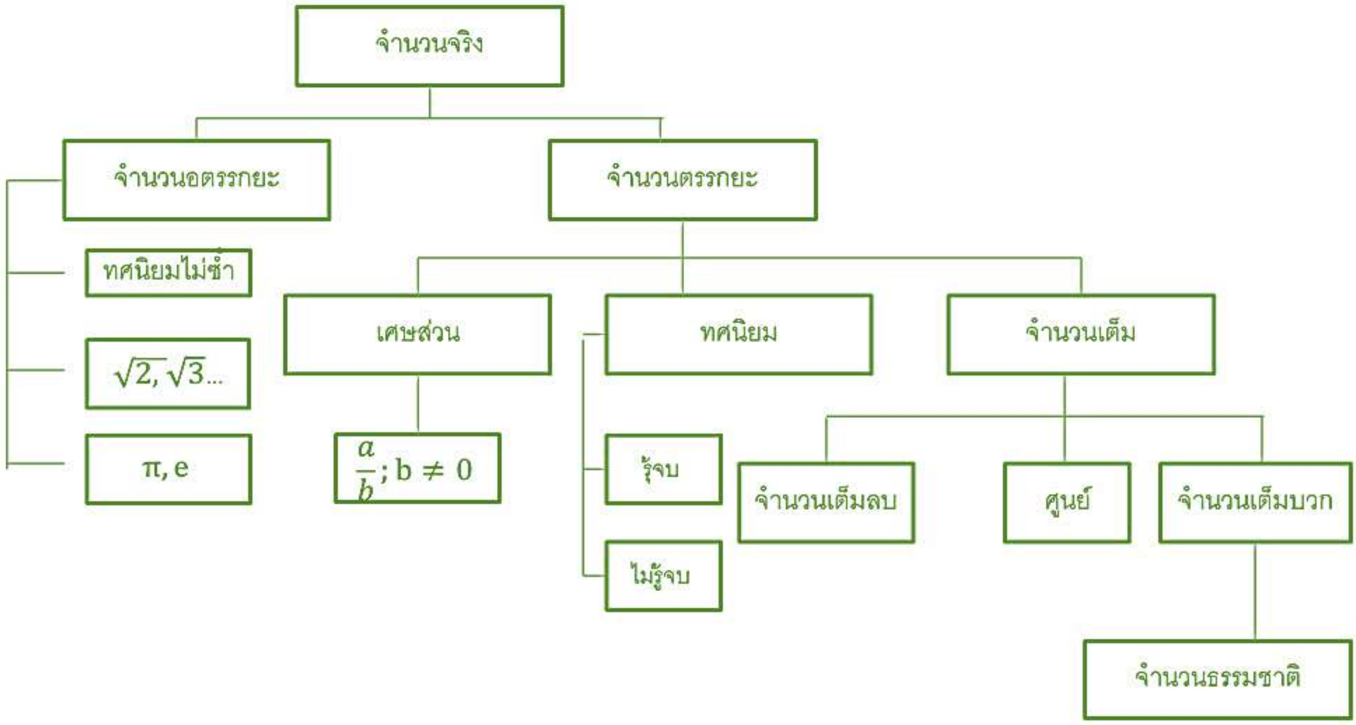
10) การเลือกผลตามเหตุแบบเสริม

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ q \rightarrow s \\ p \vee q \\ \hline \therefore r \vee s \end{array}$$

เรียนตรรกศาสตร์แบบจัดเต็มสแกนเลย →

ระบบจำนวนจริง

<u>โครงสร้างของจำนวนจริง</u>



จากแผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนข้างต้น จะพบว่าระบบจำนวนจริงประกอบไปด้วย

1. จำนวนอตรรกยะ ($\mathbb{Q}'$) หมายถึง จำนวนที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม หรือทศนิยมซ้ำได้ เช่น $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}$ หรือ π ซึ่งมีค่า 3.14159265...

2. จำนวนตรรกยะ ($\mathbb{Q}$) หมายถึง จำนวนที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม หรือทศนิยมซ้ำได้ เช่น $\frac{1}{2}$ หรือ 0.5 , $\frac{1}{3}$ หรือ $0.3333 \ldots$, $\frac{4}{2}$ หรือ 2 , $\frac{1}{7}$ หรือ $0.\dot{1}4285\dot{7}$

3. จำนวนเต็ม หมายถึง จำนวนที่เป็นสมาชิกของเซต $\mathbb{I} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ เมื่อกำหนดให้ $\mathbb{I}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม จำนวนเต็มยังสมารถแบ่งออกได้อีกเป็น 3 ประเภทด้วยกัน

3.1 **จำนวนเต็มลบ** $\mathbb{I}^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$

3.2 **จำนวนเต็มศูนย์** (0)

3.3 **จำนวนเต็มบวก** $\mathbb{I}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$

จำนวนเต็มบวก เรียกได้อีกอย่างว่า “**จำนวนนับ**” ซึ่งเขียนแทนเซตของจำนวนนับด้วยด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{N}$

การเท่ากันในระบบจำนวนจริง

กำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. **สมบัติการสะท้อน** $a = a$
2. **สมบัติการสมมาตร** ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
3. **สมบัติการถ่ายทอด** ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
4. **สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน** ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
5. **สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน** ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

สมบัติของระบบจำนวนจริง

	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a + b \in \mathbb{R}$	ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $ab \in \mathbb{R}$
สมบัติการสลับที่	$a + b = b + a$	$ab = ba$
สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	$0 + a = a = a + 0$	$1a = a = a1$
สมบัติการมีอินเวอร์ส	$(-a) + a = 0 = a + (-a)$	$\frac{1}{a}a = 1 = a\frac{1}{a}$ เมื่อ $a \neq 0$
สมบัติการแจกแจง	$a(b + c) = ab + ac$	

สูตรที่ควรจำ (ให้ได้)

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
7. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
8. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

สมการพหุนามดีกรีสอง

สมการ $ax^2 + bx + c = 0$ จะได้ว่า $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ แล้ว สมการมี 2 คำตอบ

ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ แล้ว สมการมี 1 คำตอบ

ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แล้ว สมการมีไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง

ทฤษฎีเศษเหลือ (Remainder Theorem)

ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x-c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง แล้วเศษเหลือจากการหารจะเท่ากับ $P(c)$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $ax-b$ แล้วเศษเหลือจากการหารจะเท่ากับ $P\left(\frac{b}{a}\right)$

ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)

กำหนดพหุนาม $P(x)$ และ c เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $x-c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ แล้ว $P(c)=0$ และ
2. ถ้า $P(c)=0$ แล้ว $x-c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ (Rational factor Theorem)

กำหนดพหุนาม $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ โดยที่ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม, n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n \neq 0$

ถ้า $x-\frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ เมื่อ m และ k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $m \neq 0$ และ ห.ร.ม.ของ m และ k เท่ากับ 1 แล้ว m จะเป็นตัวประกอบของ a_n

k จะเป็นตัวประกอบของ a_0

สมบัติการไม่เท่ากัน

กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริง

1. สมบัติการถ่ายทอด	ถ้า $a>b$ และ $b>c$ แล้ว $a>c$
2. สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน	ถ้า $a>b$ แล้ว $a+c>b+c$
3.สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน	1) ถ้า $a>b$ และ $c>0$ แล้ว $ac>bc$
	2) ถ้า $a>b$ และ $c<0$ แล้ว $ac<bc$
4.สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก	ถ้า $a+c>b+c$ แล้ว $a>b$
5..สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก	1) ถ้า $ac>bc$ และ $c>0$ แล้ว $a>b$
	2) ถ้า $ac>bc$ และ $c<0$ แล้ว $a<b$

การแก้อสมการตัวแปรเดียว

- พยายามจัดให้อยู่ในรูป $(Ax \pm a)(Bx \pm b)(Cx \pm c) \ldots <, \leq, >, \geq 0$ (ซ้ายมือวงเล็บ ตรงกลางเครื่องหมาย ขวามือเลข 0) โดยให้สัมประสิทธิ์ของ x เป็นบวกเสมอ
- จับแต่ละวงเล็บเท่ากับ 0 จะได้ค่า x ออกมา แล้วนำค่า x ลงไป plot บนเส้นจำนวน จะพบว่าเส้นจำนวนถูกแบ่งเป็นช่วงๆ
- ให้ช่องขวามือสุดเป็น + เสมอจากนั้นใส่ -, + สลับกันไปเรื่อยๆ
- โจทย์ต้องการ $<, \leq$ ตอบช่วงลบ ต้องการ $>, \geq$ ตอบช่วงบวก

ค่าสัมบูรณ์

นิยาม กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง

$$|a| = \begin{cases} a\,, & a > 0 \\ 0\,, & a = 0 \\ -a\,, & a < 0 \end{cases}$$

นั่นคือ ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนใดๆ ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ

สมบัติของค่าสัมบูรณ์

1. $|a| \geq 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|a - b| = |b - a|$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$
5. $|a - b| \geq |a| - |b|$
6. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
7. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
8. $|a|^2 = (a)^2$
9. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่
10. $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่
11. $|a + b| = |a| + |b| \leftrightarrow a \cdot b \geq 0$
12. $|a - b| = |a| + |b| \leftrightarrow a \cdot b \leq 0$

การแก้สมการค่าสัมบูรณ์ จำแนกรูปแบบของโจทย์ได้ดังนี้

1. $|\blacksquare| =$ ตัวเลข : แยก 2 กรณี
2. $|\blacksquare| =$ ก้อนที่มีตัวแปรแต่ไม่เหมือนในค่าสัมบูรณ์ทางซ้าย : แยก 2 กรณี : **ตรวจคำตอบ**
3. $|\blacksquare| =$ ก้อนที่มีตัวแปรและเหมือนในค่าสัมบูรณ์ทางซ้าย : ใช้นิยาม
4. $|\blacksquare| = |\Delta|$: ยกกำลังสองทั้งสองข้าง (วิธีนี้จะสอดคล้องกับ Concept ที่ว่า “ถ้าสองข้างไม่ติดลบ ยกกำลังสองได้เสมอ”)
5. ค่าสัมบูรณ์หลายตัว : แบ่งกรณีคิด / เขียนกราฟ

<u>การแก้อสมการค่าสัมบูรณ์</u>

$|■| > \Delta$: $■ > \Delta$ หรือ $■ < -\Delta$

$|■| \geq \Delta$: $■ \geq \Delta$ หรือ $■ \leq -\Delta$

$|■| < \Delta$: $-\Delta < ■ < \Delta$ $(-\Delta < ■ \cap ■ < \Delta)$

$|■| \leq \Delta$: $-\Delta \leq ■ \leq \Delta$ $(-\Delta \leq ■ \cap ■ \leq \Delta)$

ต้องจำให้ได้!!!

<u>หลักการแก้อสมการค่าสัมบูรณ์</u> จำแนกรูปแบบโจทย์ได้ดังนี้

1. ค่าสัมบูรณ์ในโจทย์มีเพียงตัวเดียว : นิยาม
2. $|■|$ เครื่องหมาย $|\Delta|$: ยกกำลังสองทั้งสองข้าง
3. ค่าสัมบูรณ์หลายตัว : แบ่งกรณีคิด / เขียนกราฟ

บทระบบจำนวนจริงถือเป็นบทที่เป็นฐานของเลขม.ปลาย ซึ่งสำคัญมากๆ น้องๆทุกคนควรที่จะเก็บเนื้อหาบทนี้ให้ดีที่สุด และให้เข้าใจมากที่สุด เพราะจะใช้กับทุกบทของม.ปลายเลยครับ สู้ๆน้า ^^

เรียนระบบจำนวนจริงแบบจัดเต็มสแกนเลย →

ฝึกทำโจทย์จำนวนจริงแบบจัดเต็มสแกนเลย →

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

<u>ผลคูณคาร์ทีเซียน</u> (Cartesian Product)

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

$=$ เซตของคู่อันดับที่เป็นไปได้ทั้งหมด เมื่อสมาชิกตัวหน้าอยู่ในเซต A และสมาชิกตัวหลังอยู่ในเซต B

สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใดๆ

1) $A \times B$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $B \times A$

   แต่ $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ หรือ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$

2) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

3) ถ้า A, B เป็นเซตจำกัดแล้ว $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

4) $A \times B = A \times C$ และ $A \neq \emptyset$ แล้ว $B = C$

5) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

   $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

6) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

   $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

7) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

   $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

8) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

9) ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \times C \subset B \times C$

เรียนฟังก์ชันแบบจัดเต็มสแกนเลย →

ความสัมพันธ์ (Relation)

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$ และเรียกความสัมพันธ์จาก A ไป A ว่า ความสัมพันธ์ใน A (ก็คือ r เป็นสับเซตของ $A \times A$)

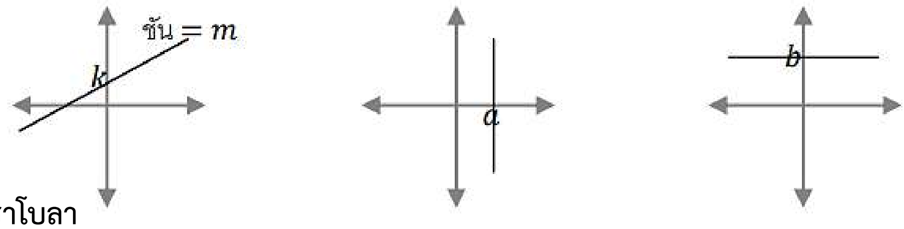
ต้องรู้!!!

1. ถ้า A มีสมาชิก m ตัว B มีสมาชิก n ตัว จำนวนความสัมพันธ์จาก A ไป B จะเท่ากับ 2^{mn}
2. $\emptyset$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เสมอ
3. "xry" หมายความว่า x มีความสัมพันธ์ r กับ y หรือ $(x, y) \in r$

รูปกราฟที่ควรต้องรู้!!!

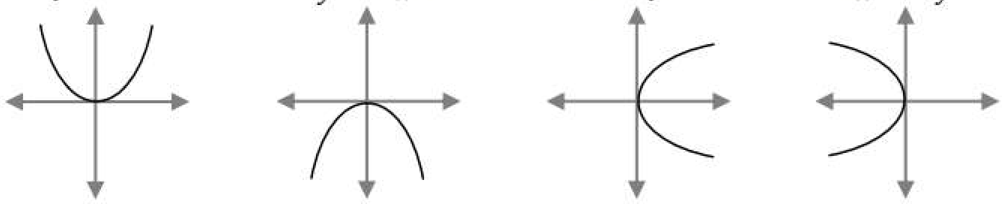
กราฟเส้นตรง

$y = mx + k$ $x = a$ $y = b$



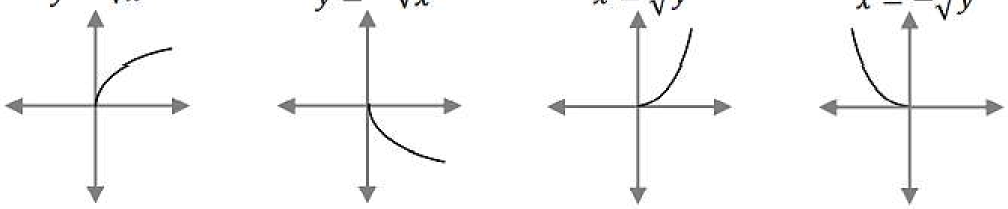
กราฟพาราโบลา

$y = x^2$ $y = -x^2$ $x = y^2$ $x = -y^2$



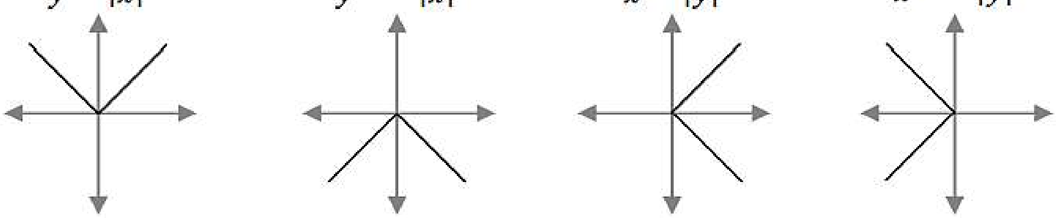
กราฟรูท

$y = \sqrt{x}$ $y = -\sqrt{x}$ $x = \sqrt{y}$ $x = -\sqrt{y}$

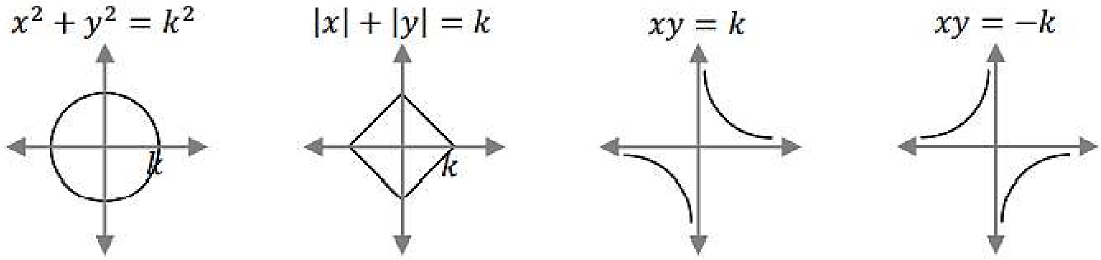


กราฟค่าสัมบูรณ์

$y = |x|$ $y = -|x|$ $x = |y|$ $x = -|y|$



กราฟอื่นๆ



โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ (Domain and Range of Relation)

โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับของความสัมพันธ์ เขียนแทนด้วย D_r

$$D_r = \{x \mid (x,y) \in r\}$$

เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับของความสัมพันธ์ เขียนแทนด้วย R_r

$$R_r = \{y \mid (x,y) \in r\}$$

หลักการหา D_r และ R_r แบบพิจารณาเงื่อนไข

1. หา D_r จัดรูปโดยเป็น $y =$ เทอมของ x
   - กรณีที่ 1 $y = \frac{\blacksquare}{\Delta}$ อ้าง $\Delta \neq 0$
   - กรณีที่ 2 $y = \sqrt{\blacksquare}$ อ้าง $\blacksquare \geq 0$
   - กรณีที่ 3 $y = \frac{\Delta}{\sqrt{\blacksquare}}$ อ้าง $\blacksquare > 0$

   หา R_r จัดรูปโดยเป็น $x =$ เทอมของ y
   - กรณีที่ 1 $x = \frac{\blacksquare}{\Delta}$ อ้าง $\Delta \neq 0$
   - กรณีที่ 2 $x = \sqrt{\blacksquare}$ อ้าง $\blacksquare \geq 0$
   - กรณีที่ 3 $x = \frac{\Delta}{\sqrt{\blacksquare}}$ อ้าง $\blacksquare > 0$

*** ถ้ามีมากกว่า 1 กรณี ให้นำมา ∩ กัน

2. โดยปกติแล้ว ถ้าขวามือเป็น $(\ \ )^2, |\ \ |$ อ้าง ซ้ายมือ ≥ 0
3. โจทย์รูปแบบ $y = \sqrt{\ \ }$ ให้พิจารณาค่า min, max ของ y จะได้เรนจ์ของ r
4. ถ้าเจอรูป $ax^2+bx+c=0$ ใช้ $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

รูปแบบ $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow D_r = \left\{x \,\middle|\, x \neq -\frac{d}{c}\right\},\ R_r = \left\{y \,\middle|\, y \neq \frac{a}{c}\right\}$

อินเวอร์สของความสัมพันธ์

$$r^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in r\}$$

ข้อสังเกต

1. $D_r = R_{r^{-1}}$ และ $R_r = D_{r^{-1}}$

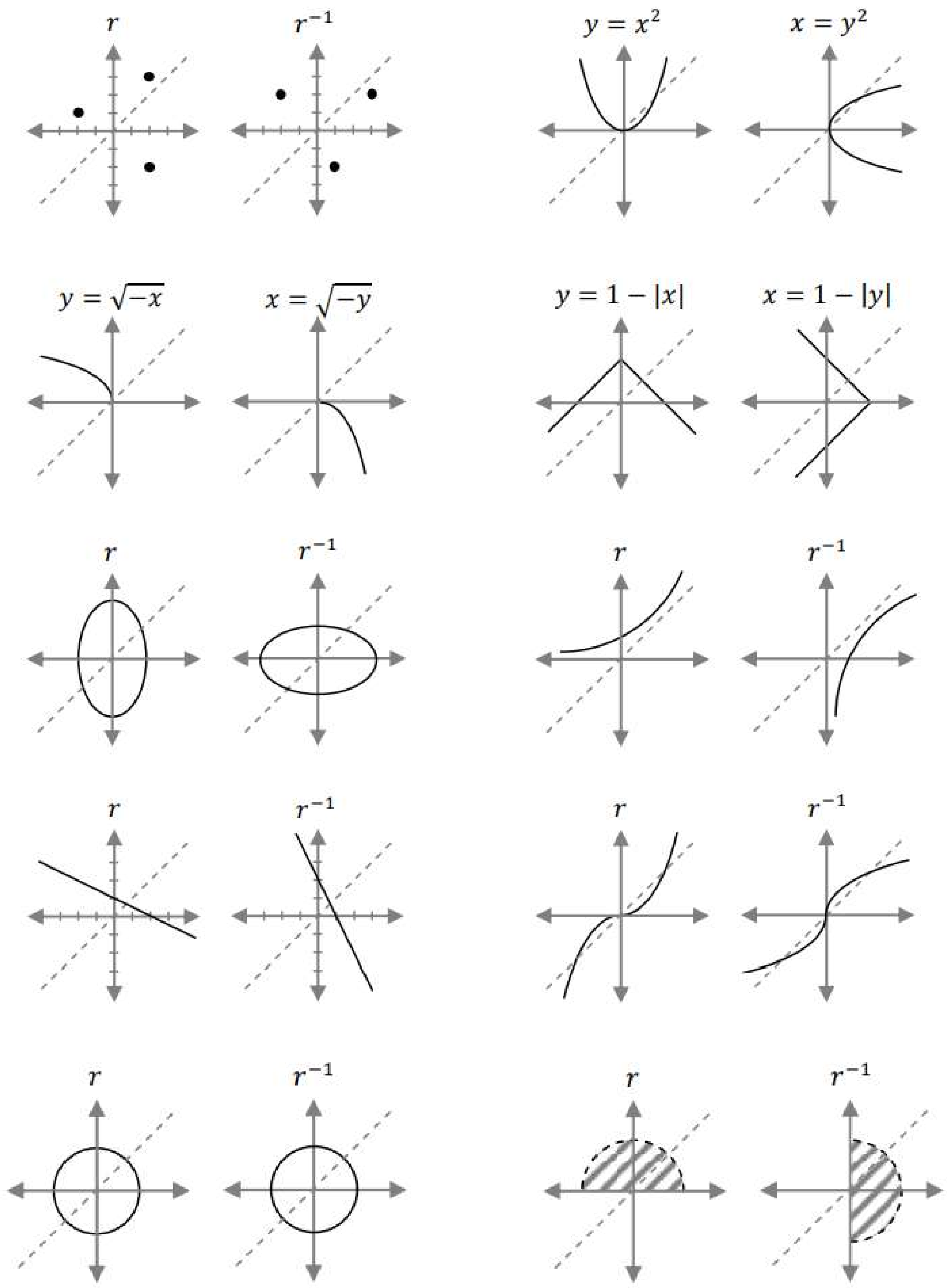
<u>การหาอินเวอร์ส แบบบอกเงื่อนไข สามารถทำได้ 2 วิธี</u>

วิธีที่ 1 สลับที่ x และ y ในคู่อันดับ (x, y) แต่เงื่อนไขเหมือนเดิม

วิธีที่ 2 สลับที่ x และ y ในเงื่อนไข โดยแทนที่ x ด้วย y และแทนที่ y ด้วย x แต่คู่อันดับ (x, y) เหมือนเดิม

*****กราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ คือ ภาพสะท้อนของกราฟของความสัมพันธ์ $\mathbf{r}$ กับเส้นตรง $\mathbf{y = x}$**

<u>ตัวอย่างกราฟ $\mathbf{r}$ และ $\mathbf{r^{-1}}$</u>



<u>ฟังก์ชัน</u> (Function)

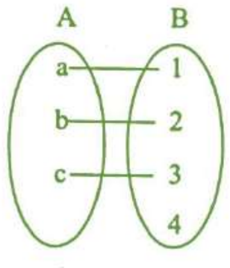
ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ หรือเซตของคู่อันดับซึ่งมีเงื่อนไขว่า x ไปจับคู่กับ y เพียงตัวเดียวเท่านั้น
(ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่ x ไม่หลายใจ)

เช่น $r_1 = \{(1,2),(2,6),(3,5),(4,8)\}$ และ $r_2 = \{(1,6),(2,6),(3,5),(4,8)\}$ เป็นฟังก์ชัน
แต่ $r_3 = \{(1,2),(2,6),(1,5),(4,8)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

ฟังก์ชันจาก A ไป B คือ ฟังก์ชันที่มีสมบัติว่า $D_f = A$ (สมาชิกตัวหน้ามีคู่ทุกตัว) และ $R_f \subset B$
(ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $f : A \to B$)

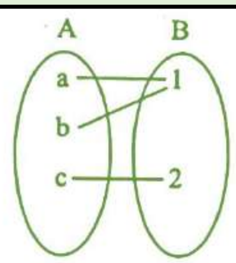
Ex. $A = \{1,2,3\}, B = \{4,5,6,7\}$
ฟังก์ชันจาก A ไป B เช่น $f = \{(1,4),(2,5),(3,7)\}$

ฟังก์ชัน 1-1 คือ ฟังก์ชันที่มีเงื่อนไขว่า สมาชิกตัวหลัง 1 ตัว จะจับคู่กับสมาชิกตัวหน้าเพียง 1 ตัวเท่านั้น
(ฟังก์ชัน 1-1 คือ ฟังก์ชันที่ x และ y ไม่มีกิ๊ก)



เรียกว่า ฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไป B

ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B คือ ฟังก์ชันที่สมบัติว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ $R_f = B$
(ฟังก์ชันทั่วถึง คือ ฟังก์ชันที่ y ไม่โสด)



เรียกว่า ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

<u>การตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่</u>

1. แทนค่า x 1 ค่าแล้ว ถ้าเกิดค่า y เพียง 1 ค่า จะเป็นฟังก์ชัน
2. เขียนกราฟของฟังก์ชันแล้วลากเส้นในแนวตั้ง (ขนานแกน y) ตัดผ่านกราฟของโจทย์ ถ้าตัด 1 จุด จะเป็นฟังก์ชัน

<u>การตรวจสอบฟังก์ชันว่าเป็นฟังก์ชัน 1-1 หรือไม่</u>

1. แทนค่า y 1 ค่าแล้ว ถ้าเกิดค่า x เพียง 1 ค่า จะเป็นฟังก์ชัน 1-1
2. เขียนกราฟของฟังก์ชันแล้วลากเส้นในแนวนอน (ขนานแกน x) ตัดผ่านกราฟของโจทย์ ถ้าตัด 1 จุด จะเป็นฟังก์ชัน 1-1

***ก่อนเช็คฟังก์ชัน 1-1 เช็คฟังก์ชันก่อนทุกครั้ง

ฟังก์ชันเพิ่ม – ลด (Increasing – Decreasing function)

ฟังก์ชันเพิ่ม คือ ฟังก์ชันที่ เมื่อค่า x เพิ่มขึ้น ค่า y จะเพิ่มขึ้น
และ เมื่อค่า x ลดลง ค่า y จะลดลง
(ถ้า $\mathbf{x_1 < x_2}$ แล้ว $\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$)

ฟังก์ชันลด คือ ฟังก์ชันที่ เมื่อค่า x เพิ่มขึ้น ค่า y จะลดลง
และ เมื่อค่า x ลดลง ค่า y จะเพิ่มขึ้น
(ถ้า $\mathbf{x_1 < x_2}$ แล้ว $\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$)

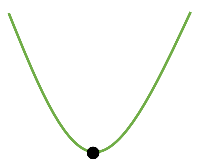
ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear function)

คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic function)

คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a \neq 0$

หงาย

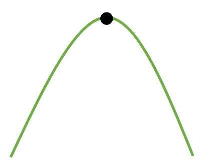


$a > 0$

จุดยอด(จุดวกกลับ) = จุดต่ำสุด

ไม่มีจุดสูงสุด

คว่ำ



$a < 0$

จุดยอด(จุดวกกลับ) = จุดสูงสุด

ไม่มีจุดต่ำสุด

พิกัดจุดยอด คือ $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

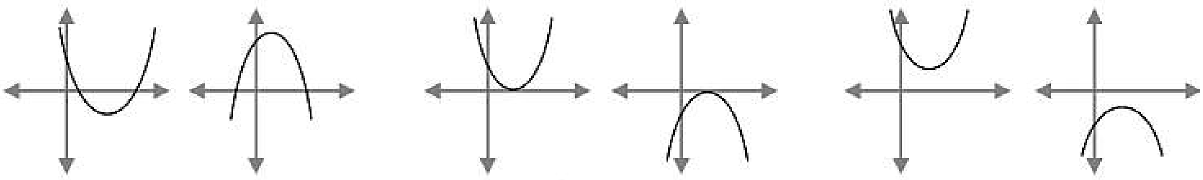
หรือ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

อีกรูปของฟังก์ชันกำลังสองที่นิยมใช้คือ $f(x) = a(x-h)^2 + k$

- ถ้า a เป็นบวกจะได้พาราโบลาหงาย , ถ้า a เป็นลบจะได้พาราโบลาคว่ำ
- จุดยอด คือ (h, k)

จุดตัดแกน x : พาราโบลาอาจตัดแกน x ได้ 2 จุด หรือ 1 จุด หรือ ไม่ตัดเลยก็ได้

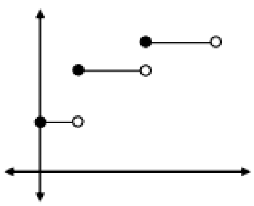
จุดตัดแกน y : พาราโบลาจะตัดแกน y ได้ 1 จุดเสมอ

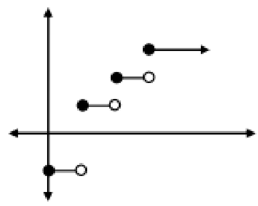


ฟังก์ชันขั้นบันได (Step function)

คือ ฟังก์ชันที่แบ่งค่า x ออกเป็นหลายๆช่วง โดยที่แต่ละช่วงจะมีค่า y เป็นค่าคงที่

เช่น $f(x) = \begin{cases} 10, 0 \le x < 1 \\ 20, 1 \le x < 3 \\ 25, 3 \le x < 5 \end{cases}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} -2, 0 \le x < 1 \\ 1, 1 \le x < 2 \\ 2, 2 \le x \le 3 \\ 3, \ x > 3 \end{cases}$





อินเวอร์สของฟังก์ชัน

คือ $\{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$ เขียนแทนด้วย f^{-1} ซึ่งอาจจะเป็นฟังก์ชัน หรือไม่เป็นก็ได้

ถ้า f^{-1} ยังคงเป็นฟังก์ชัน จะเรียกว่า **"ฟังก์ชันอินเวอร์ส"**

ถ้า f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน จะเรียกว่า **"อินเวอร์สของฟังก์ชัน"**

ข้อสังเกต 1. f^{-1} จะเป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1

2. $D_f = R_{f^{-1}}$ และ $R_f = D_{f^{-1}}$

หลักการหาอินเวอร์ส
1. ให้เปลี่ยน y เป็น x
2. เปลี่ยน x เป็น y
3. จัดสมการหาค่า y (โดย y ใหม่ที่ได้ คือ อินเวอร์สนั่นเอง)

การหาอินเวอร์ส เมื่อกำหนด f(■) มาให้

$f = \{(\Delta, \blacksquare)\} \quad \Rightarrow \quad f(\Delta) = \blacksquare$

$f^{-1} = \{(\blacksquare, \Delta)\} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(\blacksquare) = \Delta$

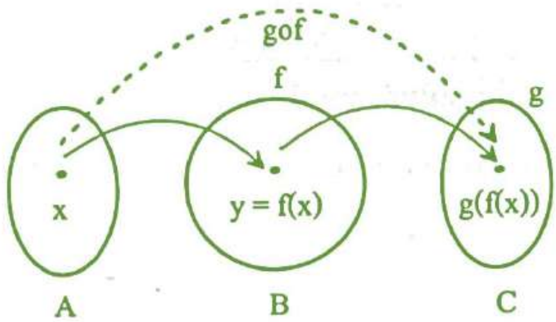
นั่นก็คือ ในการจัดรูป f ให้เป็น f^{-1} หรือ f^{-1} ให้เป็น f ไม่จำเป็นต้องเปลี่ยน x กับ y

ใช้การย้ายข้างได้เลย จาก $f(\Delta) = \blacksquare$ หรือ $f^{-1}(\blacksquare) = \Delta$

$\Delta = f^{-1}(\blacksquare)$ $\qquad \blacksquare = f(\Delta)$

***แต่ต้องเป็นฟังก์ชัน 1-1 เท่านั้นนะครับ ^^

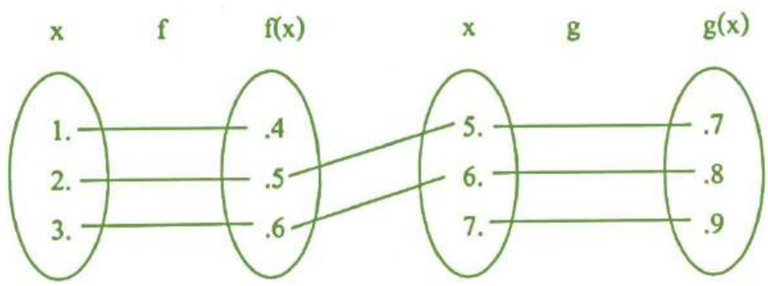
<u>ฟังก์ชันประกอบ</u>



ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย gof

กำหนดโดย $(gof)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก x ซึ่ง $f(x) \in D_g$

<u>สรุป</u> คือ gof(x) เป็นฟังก์ชันที่สร้างจาก f ไป g เกิดได้เมื่อ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$



$D_{gof} \subset D_f$ และ $R_{gof} \subset R_g$

$D_{fog} \subset D_g$ และ $R_{fog} \subset R_f$

ข้อควรรู้

1. ถ้า $f : A \xrightarrow{1-1} B$ และ $g : B \xrightarrow{1-1} C$ แล้ว $gof : A \xrightarrow{1-1} C$
2. gof ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ fog

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว $fof^{-1}(x) = x$ และ $f^{-1}of(x) = x$ **แต่** $fof^{-1}(x)$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $f^{-1}of(x)$

$(fof^{-1})(\blacksquare) = \blacksquare$	เมื่อ	$\blacksquare \in D_{f^{-1}}$ (หรือ $\blacksquare \in R_f$)
$(f^{-1}of)(\Delta) = \Delta$	เมื่อ	$\Delta \in D_f$

พีชคณิตฟังก์ชัน

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันใดๆ

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$: $x \in D_f \cap D_g$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$: $x \in D_f \cap D_g$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$: $x \in D_f \cap D_g$
4. $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$: $x \in D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

เรียนฟังก์ชันแบบจัดเต็ม →

เลขยกกำลัง

<u>เลขยกกำลังมีสมบัติ</u> ดังนี้

ถ้า $a, b \in R$ และ m, n เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ โดย $b \neq 0$
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ โดย $a \neq 0$
7. $a^0 = 1$ โดย $a \neq 0$

กำหนด $\boxed{x + \frac{1}{x} = a}$

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2}$$

$$\boxed{x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a}$$

กำหนด $\boxed{x - \frac{1}{x} = a}$

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2}$$

$$\boxed{x^3 - \frac{1}{x^3} = a^3 + 3a}$$

<u>กรณฑ์ที่ n ของ a</u>

<u>บทนิยาม</u> เมื่อ $a > 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

<u>บทนิยาม</u> เมื่อ $a \neq 0$ และ m และ $n > 2$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

สรุป เกี่ยวกับค่าหลักของรากที่ n หรือ $\sqrt[n]{a}$ ดังนี้

1. ถ้า $a = 0$ แล้ว $\sqrt[n]{a} = 0$
2. ถ้า $a > 0$ แล้ว $\sqrt[n]{a} > 0$
3. ถ้า $a < 0$ จะได้ว่า
   1) ถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้ว $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนลบ
   2) ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว $\sqrt[n]{a}$ ไม่ใช่จำนวนจริง

สมบัติของรากที่ n

ถ้า a, b เป็นจำนวนใดๆ และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่
   $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
3. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ เมื่อ $b \neq 0$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

เรียนเลขยกกำลังแบบจัดเต็มสแกนเลย
↓

หมายเหตุ ถ้า $\sqrt[n]{a}$ หาค่าได้แล้ว $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ และ $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

ถ้า $\sqrt[n]{a}$ หาค่าไม่ได้แล้ว $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \neq a$ และ $a^{\frac{m}{n}} \neq \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

เทคนิคเพิ่มเติม

1. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}}} = a$
2. $\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\ldots}}} = \sqrt[n-1]{a}$
3. $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}} = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$
4. $\sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-\ldots}}}} = \frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

รากที่ 2 ของจำนวนจริงในรูป $(a+b) \pm 2\sqrt{ab}$

รากที่ 2 ของ $(a+b) \pm 2\sqrt{ab}$ คือ $\pm(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$

***แต่ $\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}}$ คือ $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

Expo & Log

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

นิยาม เรียก $f = \{(x, y) \in R \times R^{+} \mid y = a^{x},\ a > 0,\ a \neq 1\}$ ว่า **ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล**

จากนิยามสรุปได้ว่า

1. ฐานของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ต้องเป็นจำนวนบวกที่ไม่ใช่ 1
2. โดเมนของฟังก์ชัน คือ R
3. เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ R^{+}
4. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง
5. ถ้า $0 < a < 1$ จะเรียกว่าฟังก์ชันลด [x, y เพิ่มลดตรงข้ามกัน]
6. ถ้า $a > 1$ จะเรียกว่าฟังก์ชันเพิ่ม [x, y เพิ่มลดตามกัน]

ข้อสังเกต 1. กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลผ่านจุด $(0, 1)$ เสมอ เพราะเมื่อแทน $x = 0$ ใน $y = a^{x} = a^{0} = 1$ และกราฟไม่ตัดแกน x

2. a ต้องไม่เท่ากับ 1 เพราะเมื่อ $a = 1$ ทำให้ y มีค่าคงที่

สมการเอกซ์โพเนนเชียล

หลักการ

วิธีที่ 1 การทำให้ฐานของเลขชี้กำลังมีค่าเท่ากัน

- พยายามทำให้ฐานเหมือนกัน $A^{m} = A^{n}$ จะได้ว่า $m = n$
- ถ้า $A^{m} = B^{m}$ และ $A \neq B$ จะได้ว่า $m = 0$
- แก้สมการเพื่อหาคำตอบตัวแปร
- ตรวจคำตอบ

วิธีที่ 2 การแยกตัวประกอบ

- กำหนดให้เลขยกกำลังเป็นตัวแปรใหม่
- แทนค่าตัวแปรในสมการเอกซ์โพเนนเชียล
- แยกตัวประกอบพหุนาม
- แก้สมการเพื่อหาค่าตัวแปร
- ตรวจคำตอบ

อสมการเอกซ์โพเนนเชียล

หลักการ

1. ถ้า $a > 1$ (ฟังก์ชันเพิ่ม) และ $a^m > a^n$ จะได้ว่า $m > n$
2. ถ้า $0 < a < 1$ (ฟังก์ชันลด) และ $a^m > a^n$ จะได้ว่า $m < n$
3. ถ้าหากฐานไม่เหมือนกัน แต่เลขชี้กำลังเท่ากัน ให้ย้ายข้างไปหารแล้วเปลี่ยนฐานให้เท่ากัน

$$a^m < b^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} < 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m < \left(\frac{a}{b}\right)^0$$

จากนั้นพิจารณาตัวฐานตาม 2 ข้อแรก

4. คำตอบที่ได้ไม่ต้องนำมาตรวจคำตอบ ยกเว้นมีการยกกำลังคู่ ต้องตรวจสอบเสมอ

ฟังก์ชันลอการิทึม เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

นิยาม เรียก $f = \{(x, y) \in R^+ \times R \mid y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1\}$ ว่า **ฟังก์ชันลอการิทึม**

จากนิยามสรุปได้ว่า

1. ฐานของ $\log$ ต้องเป็น R^+ ที่ไม่ใช่ 1
2. โดเมนของ $\log$ ต้องเป็น R^+
3. เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ R
4. ถ้า $a > 1$ เรียกฟังก์ชันเพิ่ม มีลักษณะดังกราฟ
5. ถ้า $0 < a < 1$ เรียกฟังก์ชันลด มี ลักษณะดังกราฟ
6. ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

สมบัติของ log

1. $\log_a 1 = 0$	6. $\log_{b^n} a = \frac{1}{n}\log_b a$ เมื่อ $n \neq 0$
2. $\log_a a = 1$ ($\log_1 1$ ไม่นิยามนะจ๊ะ)	7. $a^{\log_a x} = x$
3. $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$	8. $a^{\log_b m} = m^{\log_b a}$
4. $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$	9. $\log_b a = \frac{\log_m a}{\log_m b}$ เมื่อ $m > 0$ และ $m \neq 1$
5. $\log_b a^m = m\log_b a$	10. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

ลอการิทึมสามัญและลอการิทึมธรรมชาติ

ลอการิทึมสามัญ คือ ลอการิทึมซึ่งมีฐานเป็น 10 การเขียนลอการิทึมสามัญไม่ต้องเขียนฐาน 10 เช่น $\log_{10} 8 = \log 8$ ในทางกลับกันลอการิทึมที่ไม่เขียนฐานกำกับไว้ก็จะมีฐานเป็น 10 ในการหาค่าลอการิทึมของจำนวนใดๆ สามารถใช้สัญกรณ์วิทยาศาสตร์มาช่วยในการคำนวณ โดยจัดให้จำนวนซึ่งต้องการหาค่าลอการิทึมอยู่ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ เช่น การหาลอการิทึมของ x

$$x = A \times 10^n$$
$$\log x = \log(A \times 10^n)$$
$$\log x = \log A + \log 10^n$$
$$\log x = \log A + n$$

โดยที่ $\log A$ คือ แมนทิสซา (mantissa)

n คือ แคแรกเทอริสติก (characteristic)

ลอการิทึมธรรมชาติ คือ ลอการิทึมที่ฐานเป็น e ซึ่งมีค่าประมาณ 2.71828 ลอการิทึมธรรมชาติเขียนในรูป

$$\log_e x = \ln x$$

สมบัติของลอการิทึมธรรมชาติ

1. $\ln e = 1$	3. $e^{\ln a} = a$
2. $\ln 1 = 0$	4. $\ln a^n = n\ln a$

เรียนexpo-logแบบจัดเต็มสแกนเลย →

สมการลอการิทึม

หลักการ

วิธีที่ 1 ด้านหนึ่งของสมการอยู่ในรูปลอการิทึม

- จัดให้ด้านหนึ่งของสมการอยู่ในรูปลอการิทึม โดยด้านนั้นต้องมีลอกการิทึมเพียงจำนวนเดียว ส่วนอีกด้านของสมการไม่อยู่ในรูปลอการิทึม
- ด้านหนึ่งของสมการซึ่งอยู่ในรูปลอการิทึม ให้ตัดลอการิทึมและฐานของลอการิทึม
- อีกด้านของสมการซึ่งไม่อยู่ในรูปลอการิทึม ให้นำฐานของลอการิทึมเป็นฐานของเลขยกกำลัง และนำจำนวนซึ่งไม่อยู่ในรูปลอการิทึมเป็นเลขชี้กำลังของเลขยกกำลัง
- แก้สมการเพื่อหาตัวแปร
- ตรวจคำตอบ

วิธีที่ 2 สองด้านของสมการอยู่ในรูปลอการิทึม

- จัดให้สองด้านของสมการอยู่ในรูปลอการิทึมและทั้งสองด้านต้องมีลอการิทึมเพียงจำนวนเดียว
- จัดให้ทั้งสองด้านของลอการิทึมของทั้งสองด้านเป็นลอการิทึมซึ่งมีฐานเดียวกันโดยใช้สมบัติของลอการิทึม
- ตัดลอการิทึมและฐานของลอการิทึมทั้งสองด้านทิ้ง
- แก้สมการเพื่อหาค่าตัวแปร
- ตรวจคำตอบ

อสมการลอการิทึม

หลักการ

- จัดให้ฐานของลอการิทึมมีค่าเท่ากัน
- สร้างอสมการจากจำนวนซึ่งติดค่าลอการิทึมโดยตัดลอการิทึมและฐานของลอการิทึมทั้งสองด้านออก

  กรณีฟังก์ชันเพิ่ม สร้างอสมการโดยให้เครื่องหมายของอสมการเป็น**เครื่องหมายเดิม**

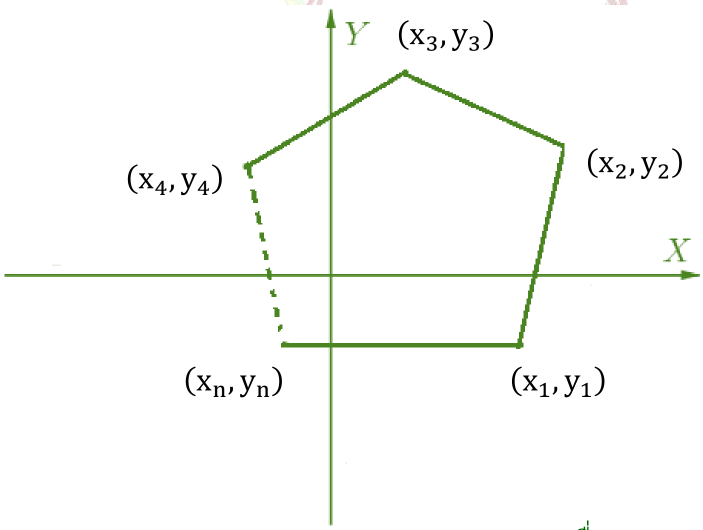
  กรณีฟังก์ชันลด สร้างอสมการโดยกลับเครื่องหมายของอสมการให้**ตรงข้าม**กับเครื่องหมายเดิม
- แก้อสมการเพื่อหาค่าตัวแปร, **นำสิ่งที่อยู่หลัง log จับมากกว่า 0** และ**นำสิ่งที่เป็นฐานจับมากกว่า 0 แต่ไม่เท่ากับ 1** จากนั้น**นำคำตอบมาอินเตอร์เซคกัน**
- ตรวจคำตอบ

เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด คือ $\mathbf{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$, $\mathbf{y} = \frac{y_1+y_2}{2}$

ระยะห่างระหว่างจุด 2 จุด คือ $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

การหาพื้นที่รูป n เหลี่ยมใดๆ



เครื่องหมายเปลี่ยน

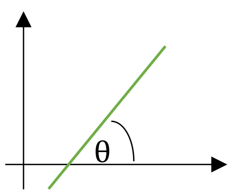
พื้นที่รูป n เหลี่ยม $= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \ldots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \ldots & y_n & y_1 \end{vmatrix}$

เครื่องหมายเดิม

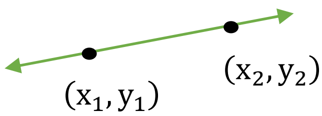
$$= \frac{1}{2}[(x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + \cdots + x_1y_n) - (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + \cdots + x_ny_1)]$$

ความชันของเส้นตรง

- $m = \tan\theta$ เมื่อ θ คือมุมที่วัดจากแกน x ในทิศทวนเข็มนาฬิกา



- $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$



การหาสมการเส้นตรง : ต้องหา **ความชัน** และ **จุดผ่าน 1 จุด** แล้วเข้าสู่สมการ

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

รูปแบบมาตรฐาน

$$y = mx + c$$

ความชัน $= m$ และระยะตัดแกน $y = c$

รูปแบบทั่วไป

$$Ax + By + C = 0$$

ความชัน $= -\frac{A}{B}$

การหาจุดตัดแกน x ให้แทน y = 0 แล้วหาว่า x จะเป็นเท่าใด

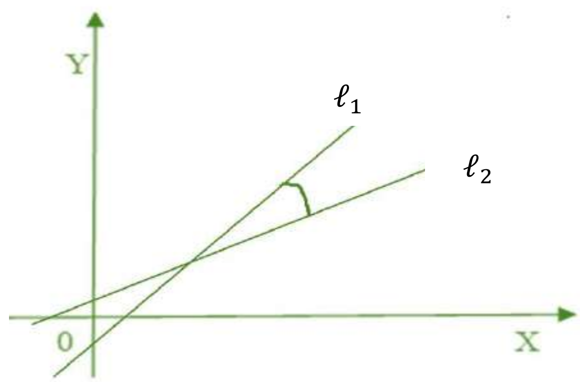
การหาจุดตัดแกน y ให้แทน x = 0 แล้วหาว่า y จะเป็นเท่าใด

สิ่งที่ต้องรู้ ! ถ้า ℓ_1 และ ℓ_2 เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน y แล้ว

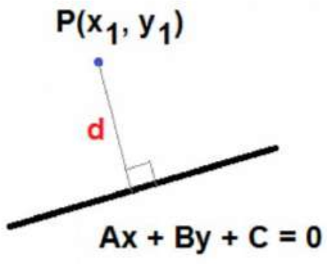
1. $\ell_1 \parallel \ell_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$
2. $\ell_1 \perp \ell_2$ ก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

มุมระหว่างเส้นตรง

ให้ θ เป็นมุมระหว่างเส้นตรง ℓ_1 กับ ℓ_2 จะได้ว่า $\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$



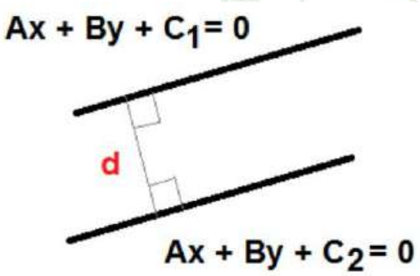
ระยะห่างระหว่างจุดถึงเส้นตรง



$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

หมายเหตุ : d คือ ระยะตั้งฉากที่สั้นที่สุดจากจุด $P(x_1, y_1)$ ถึงเส้นตรง $Ax + By + C = 0$

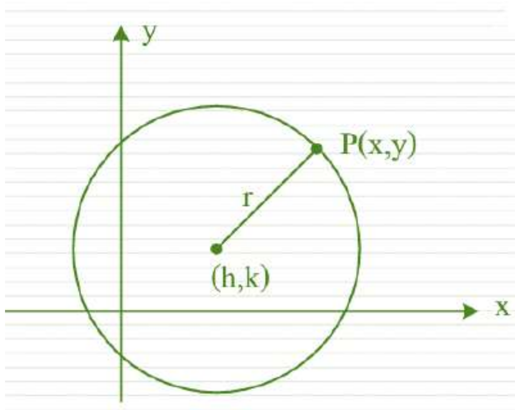
ระยะห่างระหว่างเส้นตรง 2 เส้น



$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

***เส้นตรง L_1 ต้องขนานกับเส้นตรง L_2

วงกลม

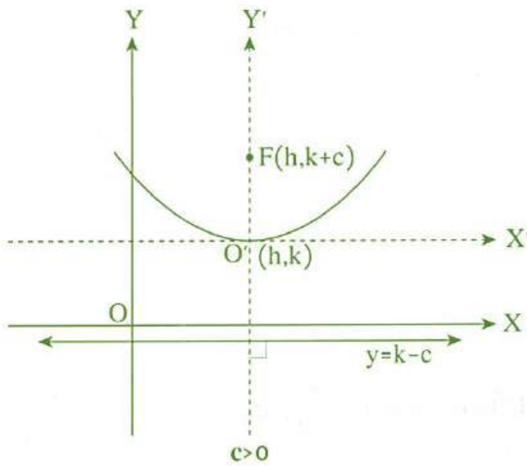


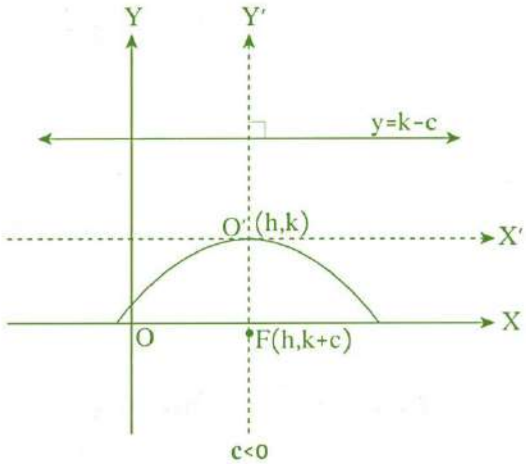
สมการวงกลมรูปแบบมาตรฐานคือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และมีรัศมีวงกลมเท่ากับ r

หรือ

สมการวงรูปแบบทั่วไป คือ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่$\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ และรัศมีวงกลมเท่ากับ $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} = \sqrt{h^2 + k^2 - C}$

พาราโบลา





$$\boxed{(x-h)^2 = \pm 4c(y-k)}$$

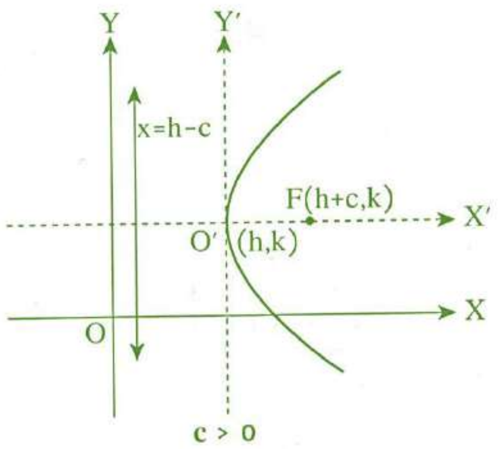
จุดยอด คือ (h, k)

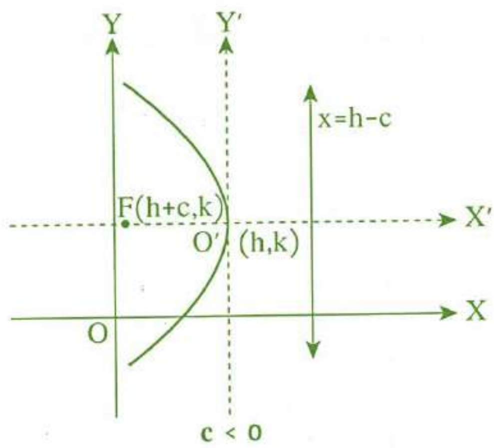
จุดโฟกัส คือ $(h, k + c)$

สมการเส้นไดเรกตริกซ์ คือ $y = k - c$

ระยะห่างระหว่างโฟกัสและไดเรกตริกซ์ คือ $2|c|$

เลตัสเรกตัม (Latus rectum) ยาว $4c$





$$\boxed{(y-k)^2 = \pm 4c(x-h)}$$

จุดยอด คือ (h, k)

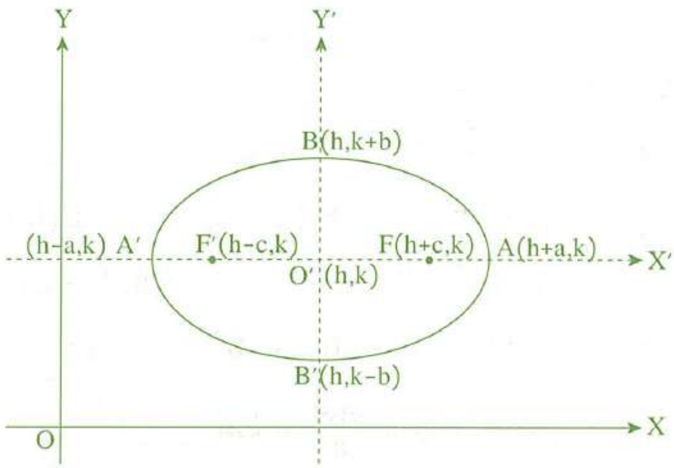
จุดโฟกัส คือ $(h + c, k)$

สมการเส้นไดเรกตริกซ์ คือ $x = h - c$

ระยะห่างระหว่างโฟกัสและไดเรกตริกซ์ คือ $2|c|$

เลตัสเรกตัม (Latus rectum) ยาว $4c$

วงรี



จุดศูนย์กลาง คือ (h,k)

จุดยอด คือ $(h-a,k)$ และ $(h+a,k)$

จุดโฟกัส คือ $(h-c,k)$ และ $(h+c,k)$

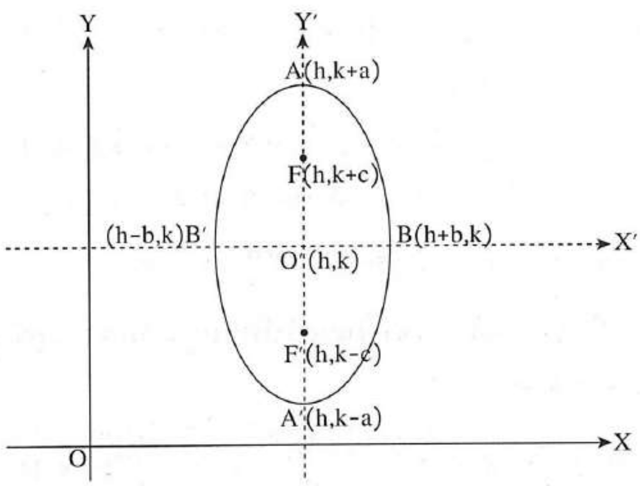
แกนเอกอยู่บนเส้นตรง $y=k$ ยาว $2a$

แกนโทอยู่บนเส้นตรง $x=h$ ยาว $2b$

เลตัสเรกตัม ยาว $=\frac{2b^2}{a}$ หน่วย

ความเยื้องศูนย์กลาง (Exxentricity) $e=\frac{c}{a}$ $(0<e<1)$

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$



จุดศูนย์กลาง คือ (h,k)

จุดยอด คือ $(h,k-a)$ และ $(h,k+a)$

จุดโฟกัส คือ $(h,k-c)$ และ $(h,k+c)$

แกนเอกอยู่บนเส้นตรง $x=h$ ยาว $2a$

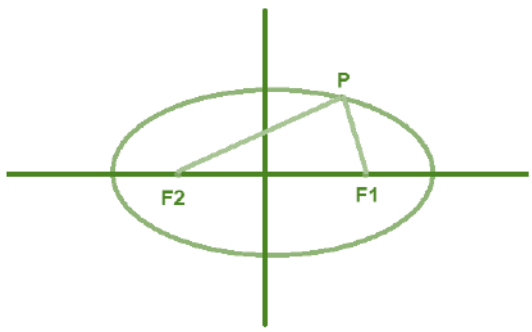
แกนโทอยู่บนเส้นตรง $y=k$ ยาว $2b$

เลตัสเรกตัม ยาว $=\frac{2b^2}{a}$ หน่วย

ความเยื้องศูนย์กลาง (Exxentricity) $e=\frac{c}{a}$ $(0<e<1)$

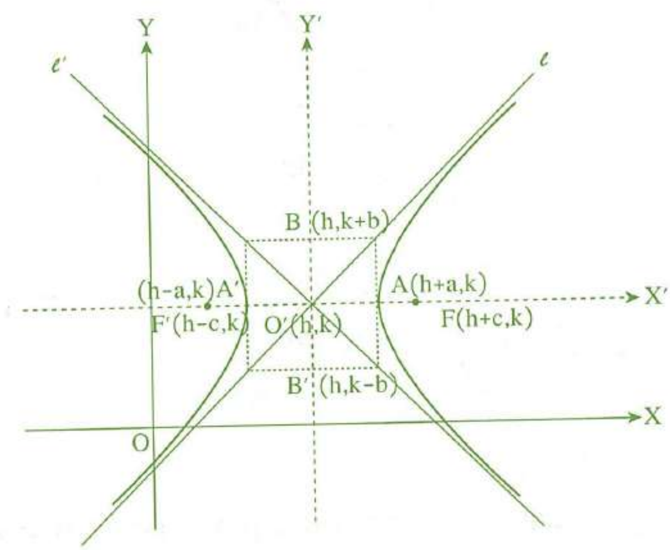
$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1}$$

ควรรู้ ! เมื่อ จุด P เป็นจุดใดๆที่อยู่บนวงรี ระยะจาก P ไปยัง F_1 บวกกับ ระยะจาก P ไปยัง F_2 จะเท่ากับ $2a$



$$\mathbf{PF_1+PF_2=2a}$$

สมการไฮเพอร์โบลา



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

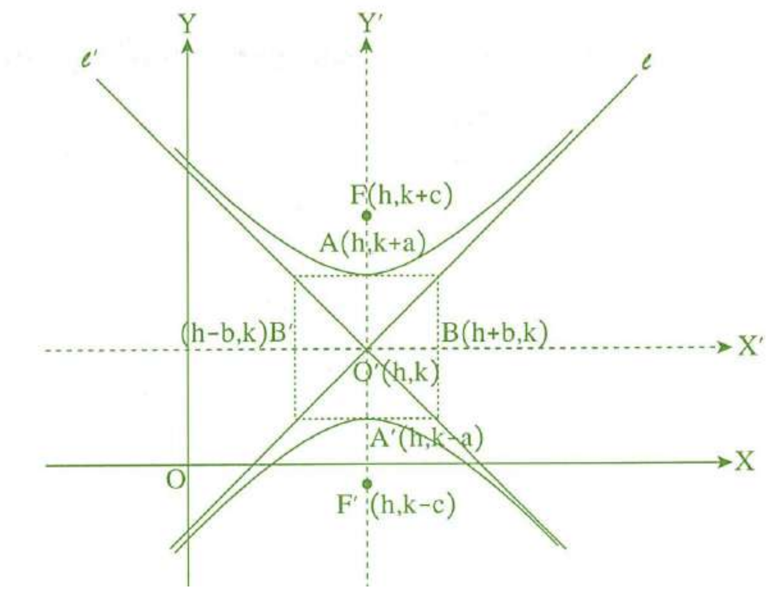
จุดศูนย์กลาง คือ (h,k)

จุดยอด คือ $(h-a,k)$ และ $(h+a,k)$ เรียก AA' ว่า แกนตามขวาง ยาว $2a$

เรียก BB' ว่า แกนสังยุค ยาว $2b$

จุดโฟกัส คือ $(h-c,k)$ และ $(h+c,k)$

เรียก ℓ และ ℓ' ว่า เส้นกำกับ (asymptote) มีสมการเป็น $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$

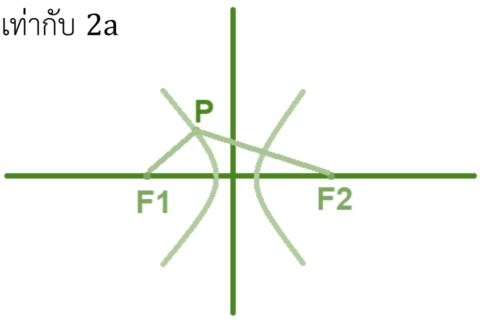


$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

จุดศูนย์กลาง	คือ	(h, k)
จุดยอด	คือ	$(h, k-a)$ และ $(h, k+a)$ เรียก AA' ว่า แกนตามขวาง ยาว $2a$
		เรียก BB' ว่า แกนสังยุค ยาว $2b$
จุดโฟกัส	คือ	$(h, k-c)$ และ $(h, k+c)$ (ระยะโฟกัส $= \sqrt{a^2+b^2} = c$)

เรียก ℓ และ ℓ' ว่า เส้นกำกับ (asymptote) มีสมการเป็น $y-k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$

<u>ควรรู้ !</u> เมื่อ จุด P เป็นจุดใดๆที่อยู่บนไฮเพอร์โบลา ระยะจาก P ไปยัง F_1 ต่างจาก ระยะจาก P ไปยัง F_2 จะเท่ากับ $2a$



$$\mathbf{|PF_1 - PF_2| = 2a}$$

เรียนเรขาคณิตวิเคราะห์แบบจัดเต็มสแกนเลย →

เรียนภาคตัดกรวยแบบจัดเต็มสแกนเลย →

เมทริกซ์

1. ขนาด (มิติ) ของเมทริกซ์

$$A = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{แถวที่ 1} \\ \leftarrow \text{แถวที่ 2} \\ \leftarrow \text{แถวที่ 3} \\ \\ \leftarrow \text{แถวที่ m} \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{หลักที่ 1} & \text{หลักที่ 2} & \text{หลักที่ 3} & \text{หลักที่ 4} & & \text{หลักที่ n} \end{array} & \end{array}$$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า เมทริกซ์ A มีขนาด 3×4

2. สมาชิกของเมทริกซ์

$$A = A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

หรืออาจเขียนเป็น $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

จะเห็นว่า a_{11}	หมายถึง	สมาชิกของเมทริกซ์ A ในแถวที่ 1	หลักที่ 1
a_{12}	หมายถึง	สมาชิกของเมทริกซ์ A ในแถวที่ 1	หลักที่ 2
a_{32}	หมายถึง	สมาชิกของเมทริกซ์ A ในแถวที่ 3	หลักที่ 2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
a_{ij}	หมายถึง	สมาชิกของเมทริกซ์ A ในแถวที่ i	หลักที่ j

3. การบวกและลบเมทริกซ์

1. หา $A \pm B$ ได้ เมื่อขนาดของ $A =$ ขนาดของ B
2. การหาผลลัพธ์ $A \pm B$ ให้นำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาบวกหรือลบกัน

เช่น $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2 & 0-1 \\ 5+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

4. การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

คือ การนำค่าคงที่นั้นคูณทุกสมาชิกในเมทริกซ์นั่นเอง

เช่น $2\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 5 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 10 & 4\end{bmatrix}$

5. ทรานสโพสของเมทริกซ์

คือ การนำเมทริกซ์มาสลับแถวเป็นหลัก สลับหลักเป็นแถว

เช่น $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ จะได้ $A^t = \begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}$

สมบัติการทรานสโพสของเมทริกซ์
1. $(A^t)^t = A$
**2. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
3. $(AB)^t = B^tA^t$
**4. $(kA)^t = kA^t$
5. $(A^n)^t = (A^t)^n$

6. การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

1. AB หาผลคูณได้ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A = จำนวนแถวของ B
2. ถ้า AB หาผลคูณได้แล้ว ขนาดของ AB = จำนวนแถวของ A $\times$ จำนวนหลักของ B

เช่น $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ จะได้ $AB = \begin{bmatrix}(1)(1)+(2)(3) & (1)(0)+(2)(2)\\ (0)(1)+(1)(3) & (0)(0)+(1)(2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

- **AB และ BA ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน**

7. ดีเทอร์มิแนนต์

เมทริกซ์ขนาด 1×1

กำหนด $A = [a]$ จะได้ว่า $\det A = a$

เช่น $A = [4]$ $\therefore \det A = 4$

เมทริกซ์ขนาด 2×2

กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

เปลี่ยนเครื่องหมายได้เท่ากับ $-bc$

จะได้ว่า $\det A = ad - bc$

เครื่องหมายเดิมได้เท่ากับ ad

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\therefore \det A = 4 - 6 = -2$

เมทริกซ์ขนาด 3×3

กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ให้เพิ่มหลักที่ 1 และหลักที่ 2 ต่อท้ายหลักที่ 3 ตามลำดับ

เครื่องหมายเปลี่ยน

$$A = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

เครื่องหมายเดิม

$$\det A = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

เช่น $\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{matrix} = 21 + 20 + 12 - 15 - 24 - 14 = 0$

หรือใช้วิธีกระจายตามแถว $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ต้องรู้ !! ถ้า $A = B$ แล้ว $\det A = \det B$ แต่ถ้า $\det A = \det B$ แล้วไม่สามารถสรุปได้ว่า $A = B$

คุณสมบัติที่สำคัญของดีเทอร์มิแนนต์

1. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
2. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$; $\det A \neq 0$
3. $\det(A^t) = \det A$
4. $\det(kA) = k^n \cdot \det A$ เมื่อ n คือ มิติของเมทริกซ์
5. $\det(A^n) = (\det A)^n$

คุณสมบัติอื่นๆ ของดีเทอร์มิแนนต์

1. ถ้าสมาชิกของเมตริกซ์ที่กำหนดให้มีแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งเป็น 0 ทั้งหมด det ของเมทริกซ์นั้นเท่ากับ 0

เช่น $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$

2. ถ้าสมาชิกของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ในสองแถวใด หรือสองหลักใดเท่ากัน det ของเมทริกซ์นั้นเท่ากับ 0

เช่น $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

3. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการสลับแถวคู่ใดคู่หนึ่ง หรือหลักคู่ใดคู่หนึ่งของเมทริกซ์ A จะได้ว่า $\det B = -\det A$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det B = -\det A$

4. ถ้านำค่าคงที่คูณเข้า det หรือ ดึงออกจาก det ต้องเลือกกระทำจากแถวเดียวหรือหลักเดียวเท่านั้น

เช่น $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$ $\;:\;$ $2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2(2)$ $\;:\;$ $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$

$\begin{vmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} = 6$ $\;:\;$ $3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$ $\;:\;$ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$

5. ถ้านำค่าคงที่คูณแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่ง แล้วนำไปบวกกับแถวหรือหลักอีกอันหนึ่ง จะเกิดเมทริกซ์ใหม่ซึ่งมีค่า det เท่าเดิม

เช่น $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \xrightarrow{2R_2 + R_1} \begin{vmatrix} 2(3)+1 & 2(4)+2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \xrightarrow{3C_2 + C_1} \begin{vmatrix} 3(0)+2 & 0 \\ 3(3)+0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 6$

8.อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

$AA^{-1} = I = A^{-1}A$ คูณกันแล้วได้เมทริกซ์เอกลักษณ์

เมทริกซ์ขนาด 1×1

นิยาม $A = [a]$ จะได้ $A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$; $a \neq 0$

เมทริกซ์ขนาด 2×2

นิยาม $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$; $\det A \neq 0$

สมบัติอินเวอร์สของเมทริกซ์
1. $(A^{-1})^{-1} = A$
**2. โดยปกติ $(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
**4. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, k \neq 0$
5. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

ต้องรู้ !! 1. A เป็น Singular Matrix (เมทริกซ์เอกฐาน) เมื่อ A ไม่สามารถหา A^{-1} ได้ $(\det A = 0)$

2. A เป็น Non-Singular Matrix (เมทริกซ์มิใช่เอกฐาน) เมื่อ A สามารถหา A^{-1} ได้ $(\det A \neq 0)$

9.ระบบสมการเชิงเส้น

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

เราสามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

เรียก เมทริกซ์ A ว่า เมทริกซ์สัมประสิทธิ์

X ว่า เมทริกซ์ตัวแปร

B ว่า เมทริกซ์ค่าคงที่

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

1. แก้ด้วยวิธีกำจัดตัวแปร (ม.3)
2. แก้ด้วยอินเวอร์สการคูณ $\longrightarrow$ $AX = B$ จะได้ว่า $X = A^{-1}B$
3. แก้ด้วยกฎของคราเมอร์ $\longrightarrow$ $AX = B$

   จะได้ว่าคำตอบเป็นดังนี้

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$$
$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$$
$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}$$

โดยที่ A_n แทนเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำเมทริกซ์ค่าคงที่แทนในหลักที่ n ของเมทริกซ์ A

ต้องรู้ !! 1. ถ้า $\det A \neq 0$ จะได้ว่าระบบสมการเชิงเส้นมีคำตอบชุดเดียว

2. ถ้า $\det A = 0$ จะได้ว่าระบบสมการเชิงเส้นอาจมีคำตอบมากมายนับไม่ถ้วน หรืออาจไม่มีคำตอบเลย

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธี Row – Operation

การดำเนินการตามแถว (Row Operation)

คือการดำเนินการอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

1. สลับที่ระหว่างแถวที่ i กับแถวที่ j เมื่อ $i \neq j$ เขียนแทนด้วย R_{ij}
2. คูณแถวที่ i ด้วยจำนวนจริง $c \neq 0$ เขียนแทนด้วย cR_i
3. แทนที่แถวที่ i ด้วยผลบวกของแถวที่ i กับ c เท่าของแถวที่ j โดยที่ $c \neq 0$ เขียนแทนด้วย $R_i + cR_j$

ขั้นตอน 1. นำระบบสมการมาสร้างเป็นเมทริกซ์แต่งเติม

$$[A \;\vdots\; B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$$

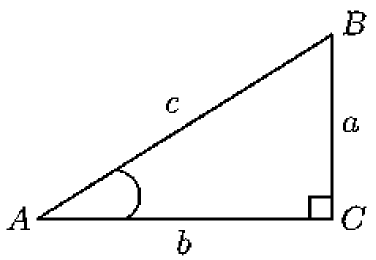
2. ให้ทำ $[A \;\vdots\; B]$ ด้วย Row Operation จนทำให้ A เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

3. ผลลัพธ์ที่ได้ตรงฝั่งตำแหน่งที่เป็นเมทริกซ์ B จะคือคำตอบ

เรียนเมทริกซ์แบบจัดเต็มสแกนเลย →

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

พื้นฐานของตรีโกณ



a	เรียกว่า	ด้านตรงข้ามมุม A (ข้าม)
b	เรียกว่า	ด้านประชิดมุม A (ชิด)
c	เรียกว่า	ด้านตรงข้ามมุมฉาก (ฉาก)

1. $\sin A = \frac{a}{c}$, $\csc A = \frac{c}{a}$

   $\sin A \csc A = 1$, $\sin A = \frac{1}{\csc A}$, $\csc A = \frac{1}{\sin A}$

2. $\cos A = \frac{b}{c}$, $\sec A = \frac{c}{b}$

   $\cos A \sec A = 1$, $\cos A = \frac{1}{\sec A}$, $\sec A = \frac{1}{\cos A}$

3. $\tan A = \frac{a}{b}$, $\cot A = \frac{b}{a}$

   $\tan A \cot A = 1$, $\tan A = \frac{1}{\cot A}$, $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

4. $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

5. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$, $\csc^2 A - \cot^2 A = 1$

6. $\sin A = \cos(90° - A)$, $\tan A = \cot(90° - A)$, $\sec A = \csc(90° - A)$

มุม	0°	30°	37°	45°	53°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$	หาค่าไม่ได้

การเปลี่ยนหน่วย

มุมในหน่วย θ เรเดียน จะได้ $\theta = \frac{a}{r}$

2π	เรเดียน	เท่ากับ	$360°$
π	เรเดียน	เท่ากับ	$180°$

การเปลี่ยนหน่วยองศาเป็นเรเดียน

มุมในหน่วยเรเดียน $=$ มุมในหน่วยองศา $\times \frac{\pi}{180}$ เรเดียน

การเปลี่ยนหน่วยเรเดียนเป็นองศา

มุมในหน่วยองศา $=$ มุมในหน่วยเรเดียน $\times \frac{180}{\pi}$ องศา

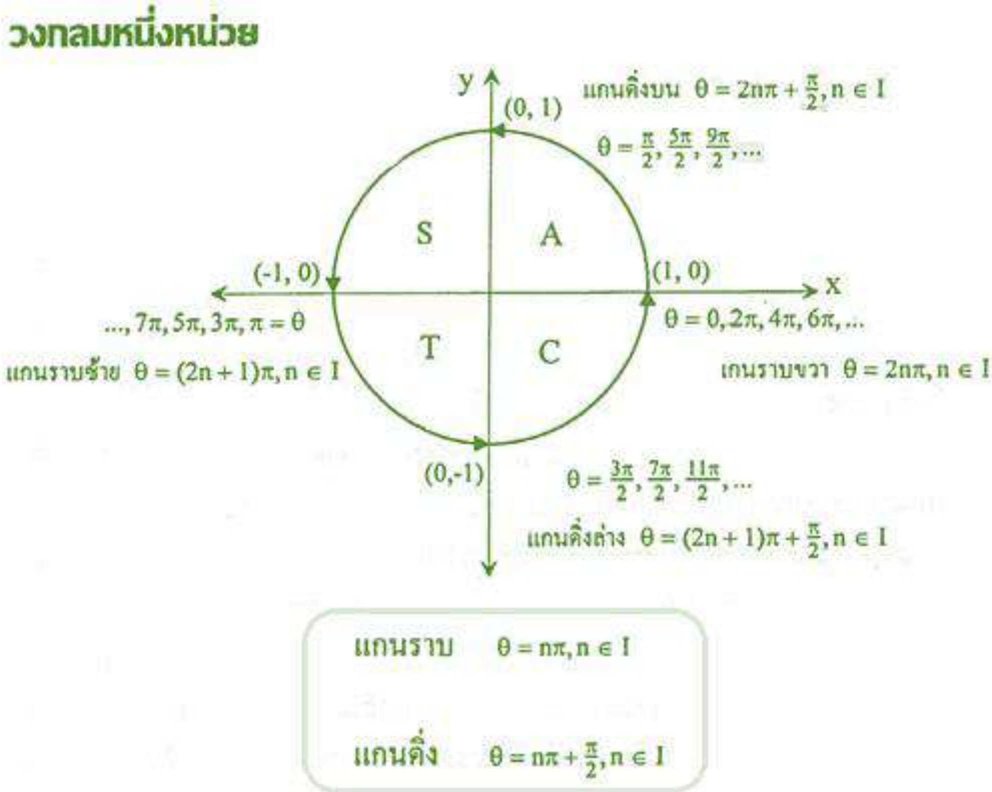
$30° = \frac{\pi}{6}$ $\quad 60° = \frac{\pi}{3}$

$45° = \frac{\pi}{4}$ $\quad 90° = \frac{\pi}{2}$

มุมที่ใช้บ่อย

ติวพื้นฐานตรีโกณแบบจัดเต็มสแกนเลย →

วงกลมหนึ่งหน่วย



ฟังก์ชันของมุมรอบจุดศูนย์กลาง (Circular function)

1. ถ้าเป็นมุมแกนราบใช้สูตร

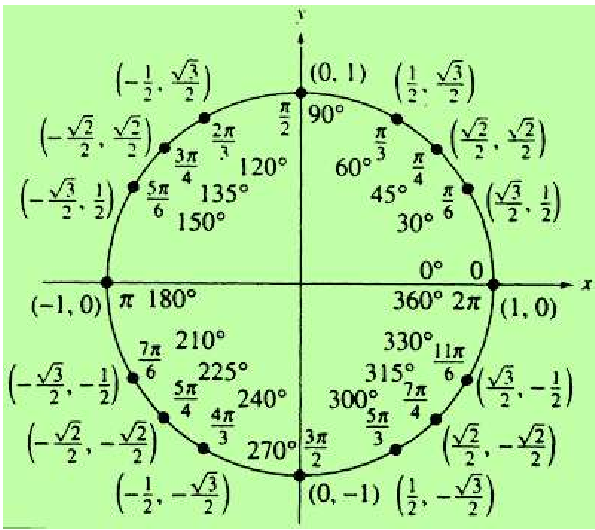
$$\text{fnTri}\,[\text{ แกนราบ } \pm\theta\,] = \text{fnTri}[\theta]$$

2. ถ้าเป็นมุมแกนดิ่งใช้สูตร

$$\text{fnTri}\,[\text{ แกนดิ่ง } \pm\theta\,] = \text{Co} - \text{fnTri}[\theta]$$

*** ดูเครื่องหมายให้ ดูตัวเดิม**

*** ต้องมอง θ เป็นมุมแหลมเสมอ**



สูตรของตรีโกณมิติ

มุมประกอบ (Compound Angle)

1. $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$, $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$
2. $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$, $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$
3. $\tan(A+B) = \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$, $\tan(A-B) = \frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$
4. $\cot(A+B) = \frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$, $\cot(A-B) = \frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

มุม 2 เท่า (Double Angle)

5. $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$
6. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
7. $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
8. $\cot 2A = \frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$

มุม 3 เท่า (Triple Angle)

9. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$
10. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
11. $\tan 3A = \frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$
12. $\cot 3A = \frac{3\cot A-\cot^3 A}{1-\cot^2 A}$

มุมครึ่งเท่า

13. $\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$
14. $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$
15. $\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

ผลบวก, ผลต่าง, และผลคูณ (Sum, Difference, and Product)

16. $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}$

17. $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{(A+B)}{2}\sin\frac{(A-B)}{2}$

18. $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)}{2}$

19. $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{(A+B)}{2}\sin\frac{(A-B)}{2}$

20. $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

21. $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

22. $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

23. $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

เสริมอาวุธ

$$\sin(60° - A)\sin A\sin(60° + A) = \frac{\sin 3A}{4}$$

$$\cos(60° - A)\cos A\cos(60° + A) = \frac{\cos 3A}{4}$$

$$\tan(60° - A)\tan A\tan(60° + A) = \tan 3A$$

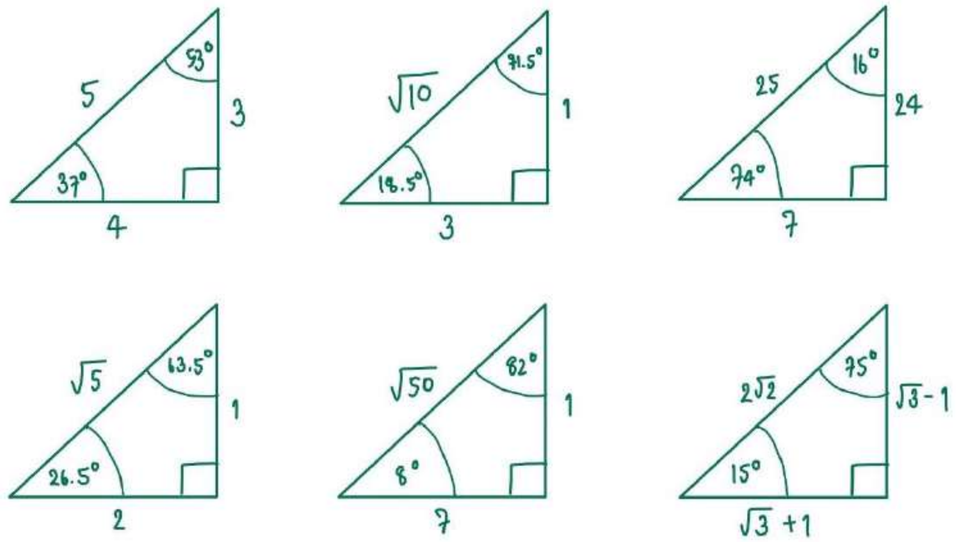
$$\cot(60° - A)\cot A\cot(60° + A) = \cot 3A$$

ค่าต่ำสุด - สูงสุดของ $\mathbf{A\sin\theta + B\cos\theta}$

ค่าต่ำสุดของ $A\sin\theta + B\cos\theta = -\sqrt{A^2 + B^2}$

ค่าสูงสุดของ $A\sin\theta + B\cos\theta = \sqrt{A^2 + B^2}$

สามเหลี่ยมทองคำ



$\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

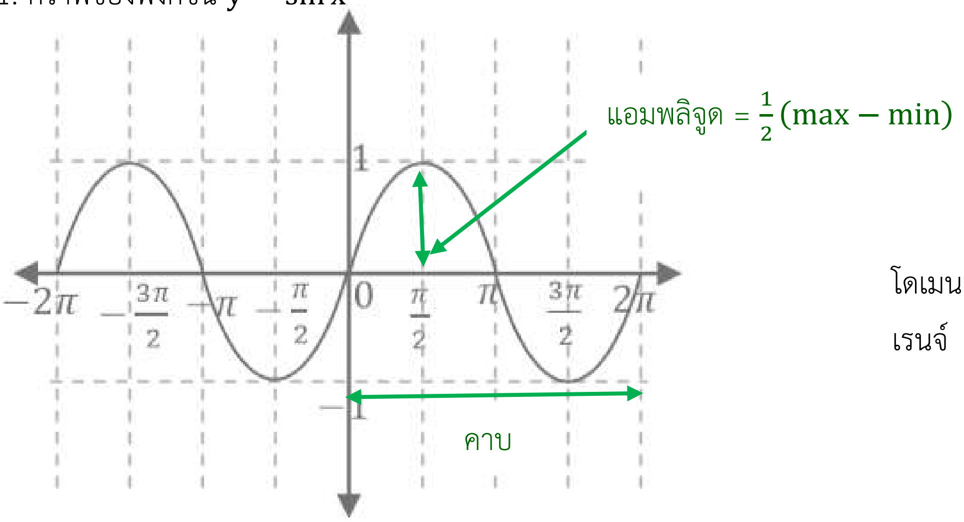
$\tan 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$ $\qquad$ $\cot 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$

$\sin 22.5° = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\cos 22.5° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\tan 22.5° = \sqrt{2}-1$ $\qquad$ $\cot 22.5° = \sqrt{2}+1$

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

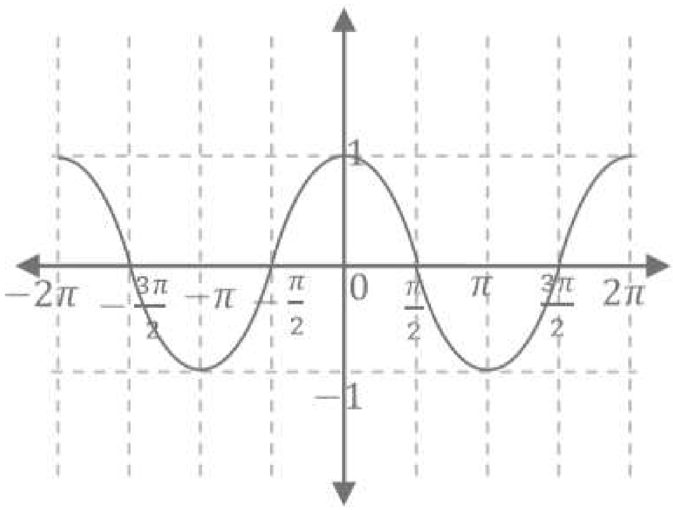
1. กราฟของฟังก์ชัน $y = \sin x$



โดเมน คือ R

เรนจ์ คือ $[-1,1]$

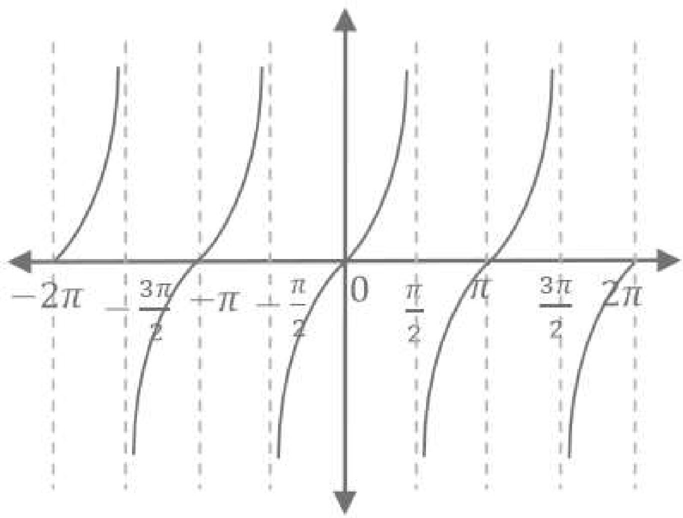
2. กราฟของฟังก์ชัน $y = \cos x$



โดเมน คือ R

เรนจ์ คือ $[-1,1]$

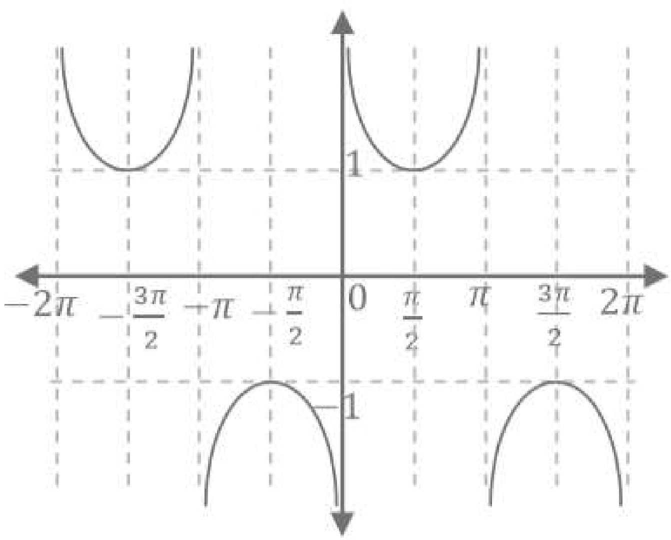
3. กราฟของฟังก์ชัน $y = \tan x$



โดเมน คือ $R - \frac{\text{คี่}\pi}{2}$

เรนจ์ คือ R

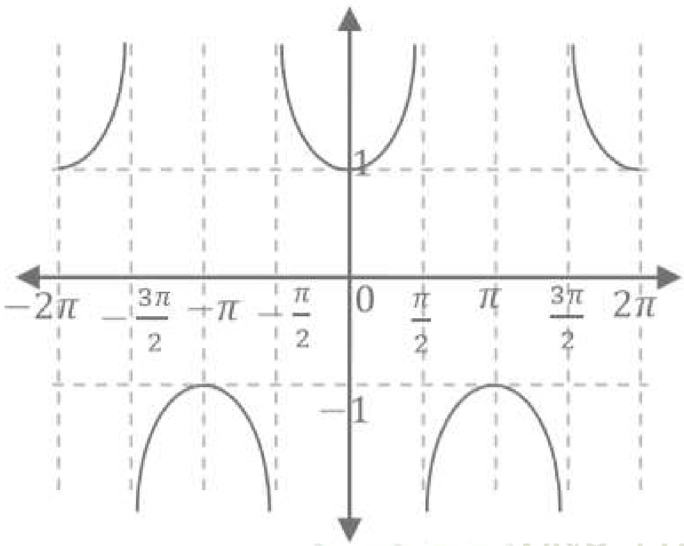
4. กราฟของฟังก์ชัน $y = \operatorname{cosec} x$



โดเมน คือ $R - \{n\pi\}$

เรนจ์ คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

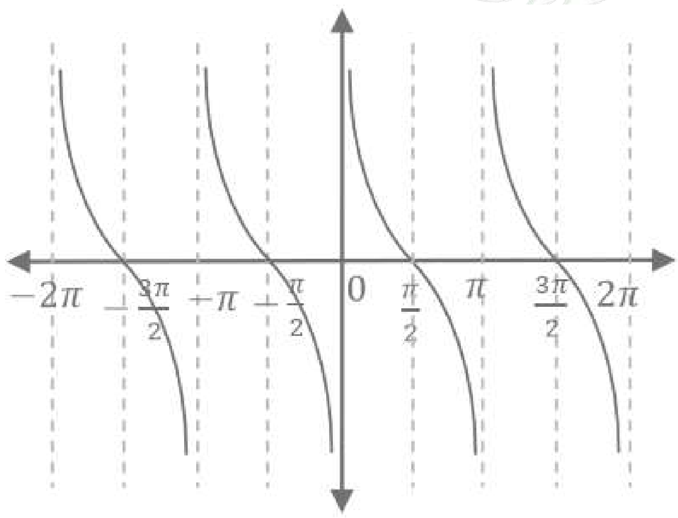
5. กราฟของฟังก์ชัน $y = \sec x$



โดเมน คือ $R - \frac{\text{คี่}\pi}{2}$

เรนจ์ คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

6. กราฟของฟังก์ชัน $y = \cot x$



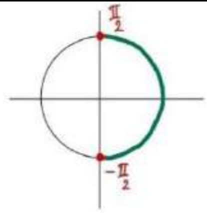
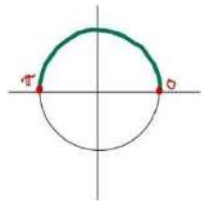
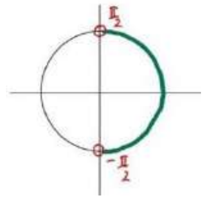
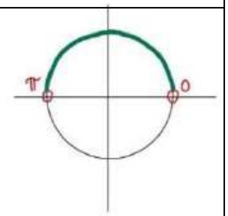
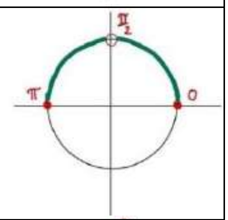
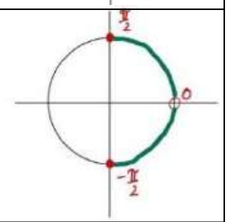
โดเมน คือ $R - \{n\pi\}$

เรนจ์ คือ R

สรุปพิฆาตกราฟตรีโกณในรูปทั่วไป

กราฟ	แอมพลิจูด	ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	คาบ
$y = A\sin(Bx + C)$	$\lvert A\rvert$	$-\lvert A\rvert$	$\lvert A\rvert$	$\frac{2\pi}{\lvert B\rvert}$
$y = A\cos(Bx + C)$	$\lvert A\rvert$	$-\lvert A\rvert$	$\lvert A\rvert$	$\frac{2\pi}{\lvert B\rvert}$
$y = A\tan(Bx + C)$	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	$\frac{\pi}{\lvert B\rvert}$

ตารางสรุปอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	อินเวอร์สของฟังก์ชัน	ฟังก์ชันอินเวอร์ส	โดเมนของฟังก์ชันอินเวอร์ส	เรนจ์ของฟังก์ชันอินเวอร์ส	
$y = \sin x$	$x = \sin y$	$y = \arcsin(x)$ หรือ $y = \sin^{-1} x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	
$y = \cos x$	$x = \cos y$	$y = \arccos(x)$ หรือ $y = \cos^{-1} x$	$[-1,1]$	$[0, \pi]$	
$y = \tan x$	$x = \tan y$	$y = \arctan(x)$ หรือ $y = \tan^{-1} x$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	
$y = \cot x$	$x = \cot y$	$y = \text{arccot}(x)$ หรือ $y = \cot^{-1} x$	R	$(0, \pi)$	
$y = \sec x$	$x = \sec y$	$y = \text{arcsec}(x)$ หรือ $y = \sec^{-1} x$	$R - (-1,1)$	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	
$y = \csc x$	$x = \csc y$	$y = \text{arccsc}(x)$ หรือ $y = \csc^{-1} x$	$R - (-1,1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$	

เรียนตรีโกณแบบจัดเต็มสแกนเลย →

กฎการสลาย

1. $\sin(\sin^{-1}x) = x\ ,\ x \in [-1,1]$

   $\sin^{-1}(\sin x) = x\ ,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2. $\cos(\cos^{-1}x) = x\ ,\ x \in [-1,1]$

   $\cos^{-1}(\cos x) = x\ ,\ x \in [0,\pi]$

3. $\tan(\tan^{-1}x) = x\ ,\ x \in R$

   $\tan^{-1}(\tan x) = x\ ,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

4. $\cot(\cot^{-1}x) = x\ ,\ x \in R$

   $\cot^{-1}(\cot x) = x\ ,\ x \in (0,\pi)$

5. $\sec(\sec^{-1}x) = x\ ,\ x \in R-(-1,1)$

   $\sec^{-1}(\sec x) = x\ ,\ x \in [0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

6. $\csc(\csc^{-1}x) = x\ ,\ x \in R-(-1,1)$

   $\csc^{-1}(\csc x) = x\ ,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$

กฎการยุบ arc

1. $\arctan(x)+\arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\ ,\ xy<1$

2. $\arctan(x)+\arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+\pi\ ,\ xy>1,\ x>0,\ y>0$

3. $\arctan(x)+\arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)-\pi\ ,\ xy>1,\ x<0,\ y<0$

4. $\arctan(x)-\arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right),\ xy>-1$

กฎของ sine (Law of sine)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

เมื่อ R เป็นรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบ ΔABC

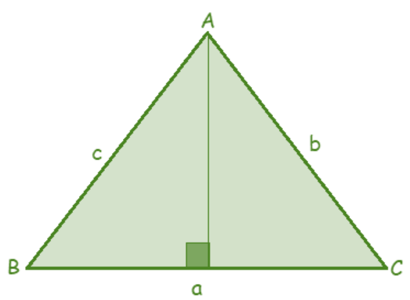
กฎของ cosine (Law of cosine)

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$$

กฎของโปรเจคชัน และพื้นที่สามเหลี่ยม



$$a = b\cos C + c\cos B$$

$$\text{พ.ท. } \Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$$

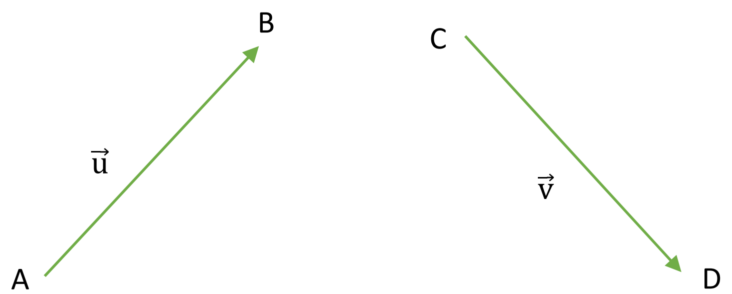
เวกเตอร์

ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) คือ ปริมาณที่มีแต่ขนาดอย่างเดียว ซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยจำนวนจริง เพื่อบอกให้ทราบว่ามีค่ามากน้อยเพียงใด เช่น พื้นที่, ปริมาตร, อุณหภูมิ, เวลา, มวล, อัตราเร็ว, อัตราเร่ง ฯลฯ

ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เวลาระบุต้องบอกทั้งขนาดและทิศทาง ถึงจะได้ความหมายที่ชัดเจน สมบูรณ์ เช่น แรง, การกระจัด, ความเร็ว, ความเร่ง ฯลฯ

<u>เวกเตอร์</u> คือ ปริมาณที่บอกทั้งขนาดและทิศทาง เราเขียนส่วนของเส้นตรงแทนขนาดเวกเตอร์ และหัวลูกศรแทนทิศทาง

- **ขนาดของเวกเตอร์** คือ ความยาวของเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $|\overrightarrow{AB}|$ หรือ $|\vec{u}|$

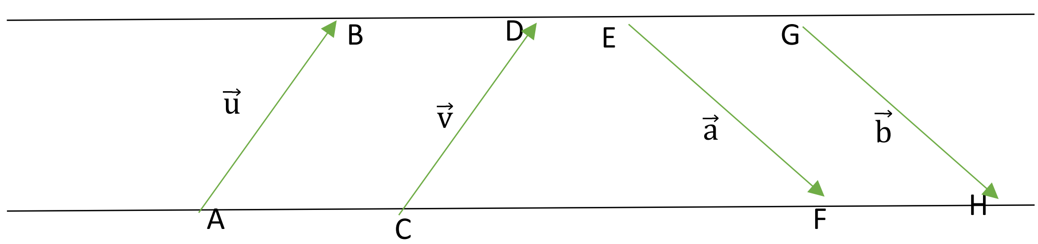


$\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์จาก A ไป B หรือ $\vec{u}$ มีขนาด $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{u}|$

$\overrightarrow{CD}$ เป็นเวกเตอร์จาก C ไป D หรือ $\vec{v}$ มีขนาด $|\overrightarrow{CD}| = |\vec{v}|$

<u>เวกเตอร์ที่เท่ากัน</u>

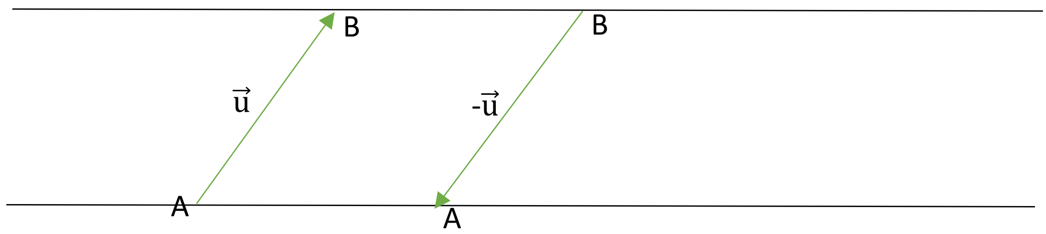
$\vec{u}$ เท่ากับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและมีทิศเดียวกัน เขียนแทนด้วย $\vec{u} = \vec{v}$



จากรูป $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ หรือ $\vec{u} = \vec{v}$ และ $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ หรือ $\vec{a} = \vec{b}$

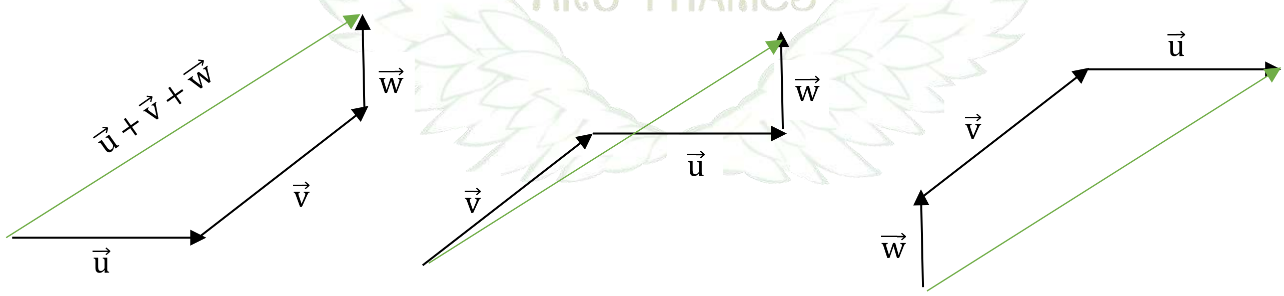
นิเสธของเวกเตอร์

นิเสธของ $\vec{u}$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\vec{u}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย $-\vec{u}$



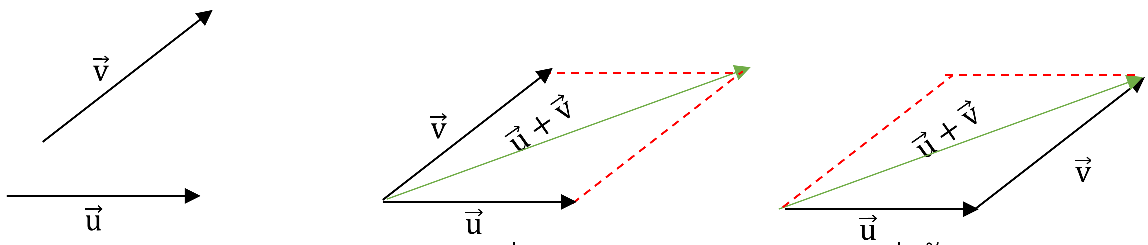
การบวกเวกเตอร์

แบบหางต่อหัว



"หางต่อหัว ลากเส้นปิด ทิศลัพธ์อยู่ที่หัว"

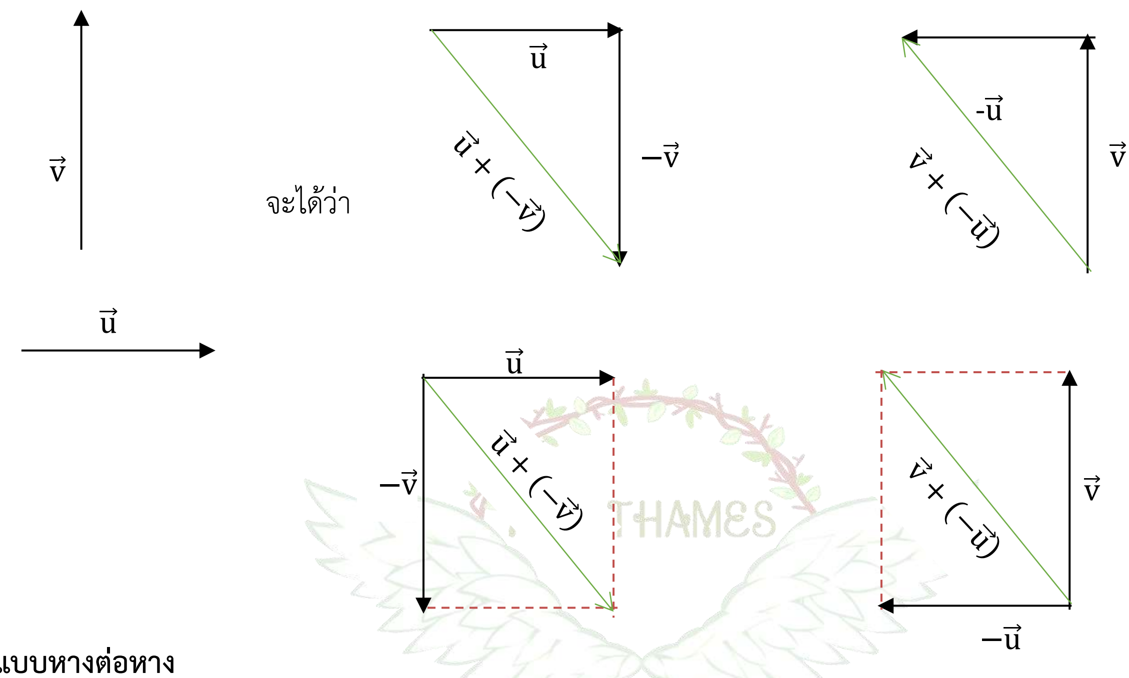
แบบหางต่อหาง



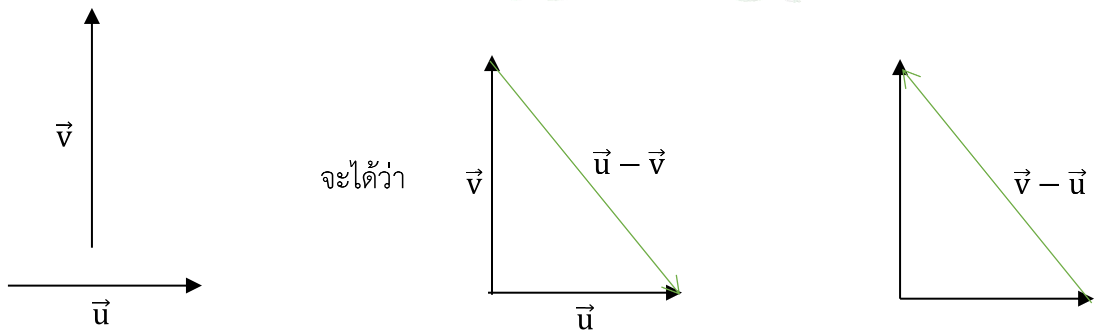
หางต่อหาง หางต่อหัว

การลบเวกเตอร์

แบบกลับทิศตัวลบ



แบบหางต่อหาง



“หางต่อหาง ลากเส้นปิด ทิศลัพธ์อยู่ที่ตัวตั้ง”

สมบัติการบวกเวกเตอร์

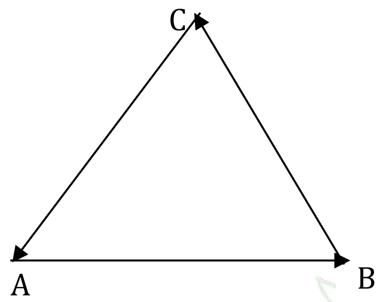
ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ

1. $\vec{u}+\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ (สมบัติปิด)
2. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (สมบัติการสลับที่)
3. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)
4. $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ (สมบัติการมีเอกลักษณ์)
5. $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$ (สมบัติการมีอินเวอร์ส)
6. ถ้า $\vec{u}=\vec{v}$ แล้ว $\vec{w}+\vec{u}=\vec{w}+\vec{v}$ (สมบัติการบวกด้วยเวกเตอร์ที่เท่ากัน)

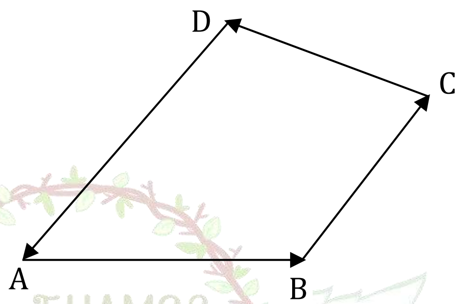
เวกเตอร์ศูนย์ (Zero vector)

เวกเตอร์ศูนย์ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับศูนย์ เขียนแทนสัญลักษณ์ด้วย $\vec{0}$ ซึ่งก็คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน

Ex. $\overrightarrow{AA} = \vec{0},\ \overrightarrow{BB} = \vec{0},\ \overrightarrow{CC} = \vec{0}$



จากรูป $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

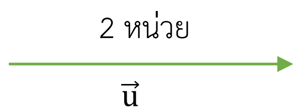


จากรูป $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

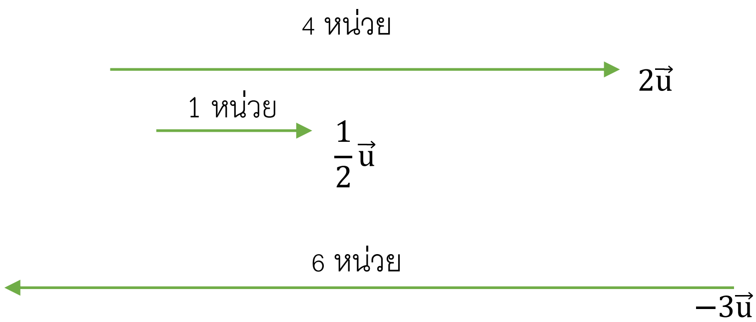
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ a เป็นสเกลาร์ และ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ ผลคูณของเวกเตอร์ $\vec{u}$ ด้วยสเกลาร์ a เขียนแทนด้วย $a\vec{u}$ โดยที่

1. ถ้า $a = 0$ แล้ว $a\vec{u} = \vec{0}$
2. ถ้า $a > 0$ แล้ว $a\vec{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\vec{u}|$ และมีทิศเดียวกับ $\vec{u}$
3. ถ้า $a < 0$ แล้ว $a\vec{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\vec{u}|$ แต่มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{u}$



จะได้ว่า



สมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ และ a, b เป็นจำนวนจริง (สเกลาร์)

1. $a\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ (สมบัติปิด)
2. $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$ (สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม)
3. $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ (สมบัติการแจกแจง)
   $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{u}$
4. $1\vec{u} = \vec{u}$ และ $0\vec{u} = \vec{u}0 = \vec{0}$

ทฤษฎีบทที่สำคัญ

ทฤษฎีบทที่ 1 สำหรับ $\vec{u},\vec{v}$ ที่ไม่เท่ากับ $\vec{0}$

$\vec{u}$ จะขนานกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง a ที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่ทำให้ $\vec{u} = a\vec{v}$

ทฤษฎีบทที่ 2 สำหรับ $\vec{u},\vec{v}$ ที่ไม่เท่ากับ $\vec{0}$ และ $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$

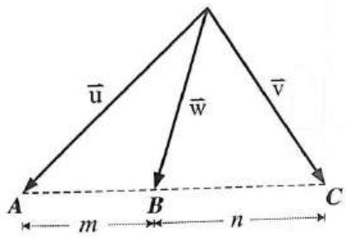
ถ้า $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ แล้วจะได้ $a = 0$ และ $b = 0$

ทฤษฎีบทที่ 3 สำหรับ $\vec{u},\vec{v}$ ที่ไม่เท่ากับ $\vec{0}$ และ $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$

ถ้า $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ เราย่อมเขียน $\vec{w}$ ในรูป $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ได้เสมอ

หมายเหตุ : $\vec{u},\vec{v}$ ขนานกัน หมายถึง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ มีทิศทางเดียวกัน หรือมีทิศตรงข้ามกัน

จุดแบ่งภายในสามเหลี่ยม



$$\vec{w} = \frac{1}{m+n}(n\vec{u} + m\vec{v})$$

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก (2 มิติ)

ถ้ามีเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้น $A(x_1,\ y_1)$ และมีจุดสิ้นสุด $B(x_2,\ y_2)$ จะได้ว่า

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ หรือ } (a, b)$$

ขนาดของเวกเตอร์ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ex. กำหนด $A(2,3)$ และ $B(5,6)$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 5-2 \\ 6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ความชันของเวกเตอร์

เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ที่มี $A(x_1,y_1)$ เป็นจุดเริ่มต้น และ $B(x_2,y_2)$ เป็นจุดสิ้นสุด

ความชันของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}(m_{\overrightarrow{AB}}) = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{b}{a}$

ต้องรู้!!

กำหนด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

1. ถ้า $\overrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD})$ จะได้ว่า $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
2. ถ้า $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD})$ จะได้ว่า $\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = -1$

นิยามต่างๆ

บทนิยาม	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ
การเท่ากัน	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
การบวกเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$
เวกเตอร์ศูนย์	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
นิเสธของเวกเตอร์	นิเสธของ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $-\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$
การลบเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c \\ b - d \end{bmatrix}$
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	$\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ 1 หน่วย (unit vector)

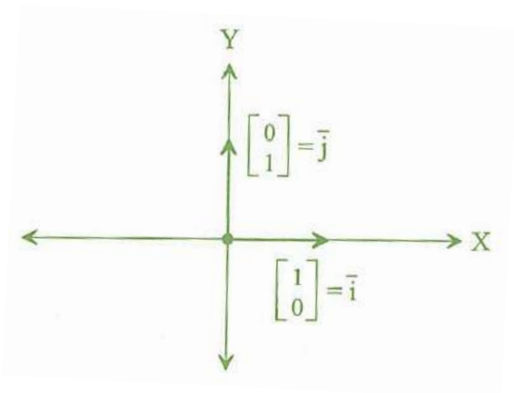
คือ เวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย ไม่ว่าเวกเตอร์นั้นจะมีทิศทางใดก็ตาม

กำหนดให้ $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์ 1 หน่วย ตามแกน X

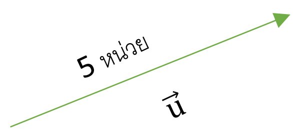
$\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ คือ เวกเตอร์ 1 หน่วย ตามแกน Y

เราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ให้อยู่ในรูปของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ ได้ดังนี้

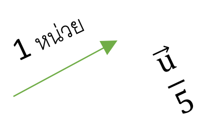
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j}$$



Ex. เวกเตอร์ใดๆ เวกเตอร์ 1 หน่วย



จะได้ว่า



ต้องรู้!!

เวกเตอร์ 1 หน่วย คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 1

เวกเตอร์ 1 หน่วยในทิศเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

เวกเตอร์ 2 หน่วยในทิศเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $2\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

เวกเตอร์ a หน่วยในทิศเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

เวกเตอร์ a หน่วยในทิศตรงข้าม $\vec{u}$ คือ $-a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

Ex. กำหนด $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ เวกเตอร์ 1 หน่วยในทิศเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(3\vec{i}-4\vec{j})}{5}$

กำหนด $\vec{u} = 12\vec{i} + 5\vec{j}$ เวกเตอร์ 3 หน่วยในทิศตรงข้ามกับ $\vec{u}$ คือ $-3\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{-3(12\vec{i}+5\vec{j})}{13}$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (คำตอบต้องเป็นจำนวนจริง)

ถ้า $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j},\ \vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$ **ผลคูณเชิงสเกลาร์** ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u} \cdot \vec{v}$ และสามารถหาได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1

หาจาก $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ โดย $|\vec{u}|$ และ $|\vec{v}|$ คือ ขนาดของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตามลำดับ

θ คือ มุมระหว่างหางเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ โดยที่ $0 \le \theta \le 180°$

วิธีที่ 2

หาจาก $\vec{u} \cdot \vec{v} = (a\vec{i} + b\vec{j})(c\vec{i} + d\vec{j}) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd$

คุณสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

1. ถ้า $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ แล้ว $\vec{u} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
3. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
4. $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v}) = a(\vec{u} \cdot \vec{v})$
5. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
6. $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$
7. $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$
8. $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$
9. $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$
10. $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$

<u>เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก</u> (3 มิติ)

เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $A(x_1,y_1,z_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(x_2,y_2,z_2)$ แทนด้วย $\overrightarrow{AB}$ และหมายถึงเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{bmatrix}$

สำหรับเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ การเท่ากันของเวกเตอร์, เวกเตอร์ศูนย์, นิเสธของเวกเตอร์, การลบเวกเตอร์, การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์, ขนาดของเวกเตอร์, เวกเตอร์หนึ่งหน่วย และผลคูณเชิงสเกลาร์ จะนิยามเหมือนกับเวกเตอร์ใน 2 มิติ แต่เพิ่มพิกัด $\mathbf{Z}$ เข้ามา

<u>หมายเหตุ</u> : เวกเตอร์ในระบบสามมิติ เพื่อความสะดวกเราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$

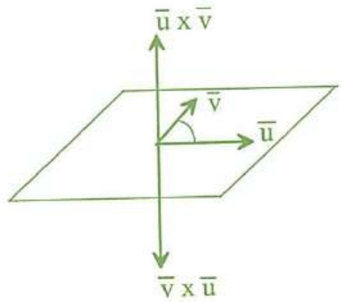
<u>ผลคูณเชิงเวกเตอร์</u> (คำตอบต้องเป็นเวกเตอร์)

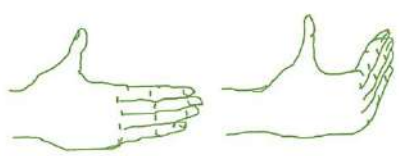
ให้ $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ จะได้

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$ (เป็นการหา det ของเมทริกซ์ 2x2 นั่นเอง)

<u>การหาทิศของ $\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}$ และ $\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{u}}$</u>





$\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}$ จะตั้งฉากกับ $\vec{\mathbf{u}}$ และ $\vec{\mathbf{v}}$ เสมอ

ในทำนองเดียวกัน $\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{u}}$ จะตั้งฉากกับ $\vec{\mathbf{u}}$ และ $\vec{\mathbf{v}}$ เสมอ

การหาขนาดของ $\vec{u} \times \vec{v}$

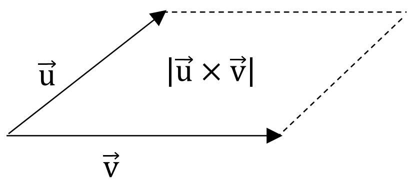
ถ้า $\vec{u} \neq 0$ และ $\vec{v} \neq 0$ จะได้ว่า $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างหางเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับหางเวกเตอร์ $\vec{v}$ และ $0 \leq \theta \leq 180$

สมบัติเกี่ยวกับการ cross vector

ให้ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆในสามมิติ และ m เป็นจำนวนจริงใดๆ

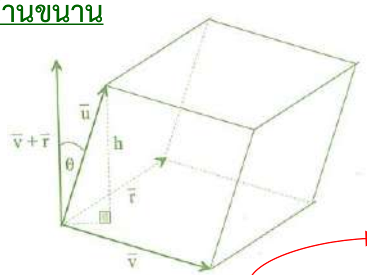
1. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$
2. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
3. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
4. $\vec{u} \times (m\vec{v}) = (m\vec{u}) \times \vec{v} = m(\vec{u} \times \vec{v})$
5. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
6. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
7. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

ต้องรู้!! $|\vec{u} \times \vec{v}| =$ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน



การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงเหลี่ยมด้านขนาน

กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$



คือการหา det ของเมทริกซ์ขนาด 3x3 นั่นเอง

$$\text{ปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตัน} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})| = |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|$$

เรียนเวกเตอร์แบบจัดเต็มสแกนเลย →

จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนจินตภาพ

เรียก $\sqrt{-1}$ ว่า **“หนึ่งหน่วยจินตภาพ (Imaginary Unit)”** เขียนแทนด้วย i

เรื่องของ i

$i^n = i$ เมื่อ $\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 1

$i^n = -1$ เมื่อ $\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 2

$i^n = -i$ เมื่อ $\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 3

$i^n = 1$ เมื่อ $\frac{n}{4}$ เหลือเศษ 0 (หารลงตัว)

และ $\mathbf{i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0}$

จำนวนเชิงซ้อน

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว **“$a + bi$”** เป็นจำนวนเชิงซ้อน และเรียก a ว่า **ส่วนจริง** (Real part) เรียก b ว่า **ส่วนจินตภาพ** (Imaginary part)

หมายเหตุ : จำนวนเชิงซ้อนอาจเขียนอยู่ในรูปคู่อันดับได้ นั่นคือ $a + bi = (a, b)$

ถ้า $a = 0$ เรียก bi ว่า **จำนวนจินตภาพแท้**

ถ้า $b = 0$ เรียก a ว่า **จำนวนจริง**

นั่นคือ เซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน

การบวกจำนวนเชิงซ้อน

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

สมบัติเกี่ยวกับการบวกจำนวนเชิงซ้อน

1. สมบัติปิด

   ถ้า z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $z_1 + z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. สมบัติการสลับที่

   ถ้า z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

   ถ้า z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

4. การมีเอกลักษณ์การบวก

   0 เป็นเอกลักษณ์การบวกของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$

   $0 + (a + bi) = (a + bi) + 0 = a + bi$

5. การมีอินเวอร์สการบวก

   $-a - bi$ เป็นอินเวอร์สการบวกของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$

   $(a + bi) + (-a - bi) = (-a - bi) + (a + bi) = 0$

<u>การลบจำนวนเชิงซ้อน</u>

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

<u>การคูณจำนวนเชิงซ้อน</u>

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

สมบัติเกี่ยวกับการคูณจำนวนเชิงซ้อน

1. สมบัติปิด

ถ้า z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $z_1 \cdot z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. สมบัติการสลับที่

ถ้า z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

ถ้า z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

4. การมีเอกลักษณ์การคูณ

$1 + 0i$ หรือ 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$

$1 \cdot (a + bi) = (a + bi) \cdot 1 = a + bi$

5. การมีอินเวอร์สการคูณ

ถ้า $z = a + bi \neq 0 + 0i$ แล้ว อินเวอร์สการคูณของ z คือ

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ หรือ $\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$

หมายเหตุ : $(z^{-1})^{-1} = z$

การหารจำนวนเชิงซ้อน

$$(a + bi) \div (c + di) = \frac{1}{c^2 + d^2}(a + bi)(c - di)$$

สังยุค

ถ้า $z = a + bi$ สังยุค (Conjugate) ของ z คือ $\bar{z} = a - bi$

สมบัติเกี่ยวกับสังยุค

1. ถ้า $z = a + bi$ แล้ว $\bar{\bar{z}} = z = a + bi$
2. ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; z_2 \neq 0$
3. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
4. $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$
5. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว $z \cdot \bar{z}$ เป็นจำนวนจริง ได้ว่า $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in R$

ค่าสัมบูรณ์ของ

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

สมบัติของค่าสัมบูรณ์

1. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$
2. ถ้า z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว
   1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
   2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $z_2 \neq 0$
   3) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
   4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
3. $|z^n| = |z|^n$
4. $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2 = |-\bar{z}|^2$
5. $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
6. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว (Polar Form of Complex Number)

$$a = r\cos\theta, \qquad b = r\sin\theta, \quad r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

ดังนั้น $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\mathrm{cis}\theta = r\mathrm{cis}(\theta + 2k\pi), k \in I$ (รูปทั่วไป)

อย่าลืม !!!! การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วต้อง

1. รู้ r (หาจาก $|z|$)	2. รู้ θ (หาจาก $\tan\theta = \frac{b}{a}$)

การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ให้ $z_1 = r_1\mathrm{cis}\theta_1, \; z_2 = r_2\mathrm{cis}\theta_2$

จะได้ว่า $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $r_1 = r_2$ และ $\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi, n \in I$

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ให้ $z = r\mathrm{cis}\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

$\bar{z} = r\mathrm{cis}(-\theta)$

ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ให้ $z = r\mathrm{cis}\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$-z = -r\mathrm{cis}\theta = (-1)(r\mathrm{cis}\theta) = (\mathrm{cis}180^\circ)(r\mathrm{cis}\theta)$

ดังนั้น $-z = r\mathrm{cis}(180^\circ + \theta)$

ตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ให้ $z = r\text{cis}\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r\text{cis}(-\theta)}{r^2}$$

ดังนั้น $z^{-1} = \frac{1}{r}\text{cis}(-\theta)$

การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ทฤษฎีบท ให้ $z_1 = r_1\text{cis}\theta_1,\ z_2 = r_2\text{cis}\theta_2$ โดยที่ $z_2 \neq 0$ แล้ว

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

ทฤษฎีบทของเดอมัวร์ (De Moivre's Theorem)

ใช้ในการยกกำลังเลขจำนวนเชิงซ้อน ในรูปเชิงขั้ว

ให้ $z = r\text{cis}\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z^n = r^n[\text{cis}(n\theta)] = r^n[\cos n\theta + i\sin n\theta]$ เมื่อ $r \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน (The n^{th} Roots of Complex Numbers)

ทฤษฎีบท กำหนดให้ $z = r\text{cis}\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เท่ากับศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า รากที่ n ของ z มีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกันคือ z_k โดยที่

$$z_k = \sqrt[n]{r}\text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$= \sqrt[n]{r}\text{cis}\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right)\right]$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

ลัด

กำหนด $z = r\text{cis}\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

หารากที่ n ของ z ทำตามขั้นตอนนี้

1. $\sqrt[n]{r}$ ใส่หน้า cis
2. $\frac{\theta}{n}$ ใส่หลัง cis
3. $\frac{360^\circ}{n}$ บวกจนครบ

สูตรลัดการหารากที่สองของ $a \pm bi$

รากที่สอง ของ $a + bi$ คือ $\pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + \sqrt{\frac{r-a}{2}}\,i\right)$

รากที่สอง ของ $a - bi$ คือ $\pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} - \sqrt{\frac{r-a}{2}}\,i\right)$

เมื่อ $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับจำนวนคำตอบของสมการพหุนาม

ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามที่มีดีกรี n เมื่อ $n \geq 1$ แล้วสมการ $P(x) = 0$ จะมีคำตอบทั้งหมด n คำตอบ (นับคำตอบที่ซ้ำกันด้วย)

สูตรของวีต (Viete's Formular)

กำหนด $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ เป็นสมการพหุนามที่มี สัมประสิทธิ์หน้าดีกรีสูงสุดเป็น 1

โดยที่ $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ เป็นค่าคงตัว (จำนวนเชิงซ้อน) และ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นคำตอบของสมการพหุนาม จะได้ว่า

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -a_1 = -(\text{สัมประสิทธิ์หน้าดีกรีตัวรอง})$$

$$x_1\,x_2\,x_3\,\ldots\,x_n = (-1)^n a_n = (-1)^n \text{ค่าคงที่}$$

$$(x_1\,x_2 + x_1\,x_3 + \cdots + x_1\,x_n) + (x_2\,x_3 + x_2\,x_4 + \cdots + x_2\,x_n) + \cdots + x_{n-1}\,x_n = a_2$$

ทฤษฎีบทคู่ Conjugate

กำหนดให้ $P(x) = 0$ เป็นสมการพหุนามที่มี**สัมประสิทธิ์ทุกตัวเป็นจำนวนจริง** ถ้า $a + bi$ เป็นคำตอบของสมการนี้แล้ว $a - bi$ จะเป็นคำตอบด้วย

เรียนจำนวนเชิงซ้อนแบบจัดเต็มสแกนเลย →

ความน่าจะเป็น

หลักการนับเบื้องต้น

หลักการบวก

ในการพิจารณาเหตุการณ์ต่างๆที่เกิดขึ้นนั้น ถ้าเหตุการณ์ต่างๆที่เกิดขึ้นนั้นแยกกันโดยเด็ดขาด (หมายความว่า...เหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นไม่ซ้ำซ้อนกัน) โดยที่

เหตุการณ์ E_1 เกิดขึ้นได้ n_1 วิธี

เหตุการณ์ E_2 เกิดขึ้นได้ n_2 วิธี

$\vdots$ $\vdots$

เหตุการณ์ E_k เกิดขึ้นได้ n_k วิธี

แล้วจำนวนวิธีที่เหตุการณ์เกิดขึ้นอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์เท่ากับ $\mathbf{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}$ วิธี

หลักการคูณ

ถ้าเหตุการณ์ E ประกอบด้วยเหตุการณ์ย่อยๆที่เกิดขึ้นตามลำดับ k เหตุการณ์ดังนี้

เหตุการณ์ E_1 มีวิธีเกิดขึ้นได้ n_1 วิธี

หลังจากนั้น เหตุการณ์ E_2 มีวิธีเกิดขึ้นได้ n_2 วิธี

หลังจากนั้น เหตุการณ์ E_k มีวิธีเกิดขึ้นได้ n_k วิธี

จะได้จำนวนวิธีที่เกิดเหตุการณ์ E เท่ากับ $\mathbf{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}$ วิธี

แฟคทอเรียล

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดให้สัญลักษณ์ n! มีความหมายคือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n

นั่นคือ $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ข้อตกลง... $0! = 1$

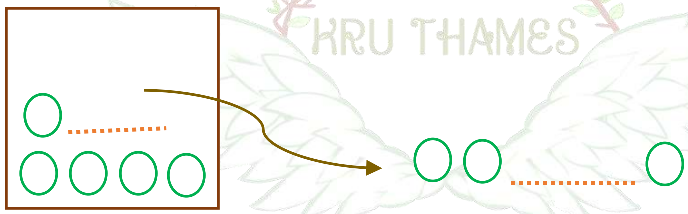
วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

1. วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันเป็นแนวเส้นตรง

1.1 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันคราวละ n สิ่ง จะจัดได้ $n!$ วิธี

n สิ่ง แตกต่างกัน

1.2 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยนำมาจัดเรียงคราวละ r สิ่ง (r < n) จะจัดได้ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี ใช้สัญลักษณ์ $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$



n สิ่ง (ต่างกัน)　　　r สิ่ง

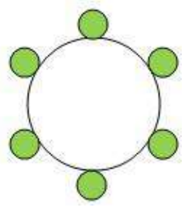
1.3 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด กล่าวคือ ของ n สิ่งนี้แบ่งเป็น k กลุ่ม ในแต่ละกลุ่มนั้นเหมือนกัน นั่นคือกลุ่มที่ k มี n_k สิ่ง $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$ จะจัดได้

$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$ วิธี

2. วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันเป็นวงกลม

2.1 จำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันในแนววงกลมทำได้เท่ากับ

$(n-1)!$ วิธี



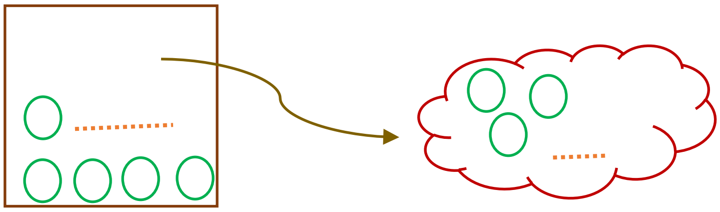
n สิ่ง (ต่างกัน)

2.2 ถ้าจัดเรียงวงกลมในเชิง 3 มิติ (สามารถพลิกกลับไปมาได้) ทำได้เท่ากับ $\frac{(n-1)!}{2}$ วิธี

2.3 ถ้าจัดเรียงสิ่งของ n สิ่งที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด จะมีแนวคิดเหมือนเชิงเส้นตรง คือสามารถทำได้เท่ากับ $\frac{(n-1)!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$ วิธี

แต่ถ้าการจัดเรียงดังกล่าวเป็นวงกลมใน 3 มิติ จะจัดได้ $\frac{\frac{(n-1)!}{2}}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$ วิธี

วิธีจัดหมู่ (Combination) หมายถึง การเลือกสิ่งของ (โดยไม่คำนึงถึงลำดับการเลือก) อาจเลือกมาทั้งหมด หรือเลือกมาเพียงบางส่วน



n สิ่ง (ต่างกัน) r สิ่ง

เช่น มีตัวอักษร 3 ตัว คือ A, B, C

ถ้าเลือกมาทั้ง 3 ตัว ทำได้ 1 วิธี

ABC ACB BAC

BCA CAB CBA → นับเป็น 1 วิธี

ถ้าเลือกมาครั้งละ 2 ตัวทำได้ 3 วิธี

AB BA นับ 1 วิธี

AC CA นับ 1 วิธี

BC CB นับ 1 วิธี → นับรวม 3 วิธี

ดังนั้น ถ้ามีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน เลือกมาคราวละ r สิ่งจะทำได้เท่ากับ $C_{n,r}$ หรือ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ วิธี

สมบัติของ $\mathbf{P_{n,r}}$ และ $\mathbf{C_{n,r}}$

1. $P_{n,r} = C_{n,r} \cdot r!$
2. $P_{n,0} = 1,\ P_{n,1} = n,\ P_{n,n} = n!$
3. $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n$
4. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
5. $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$
6. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

ความน่าจะเป็น (Probability)

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

โดยที่ $P(E)$ แทน ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจ

$n(E)$ แทน จำนวนเหตุการณ์ที่โจทย์สนใจ

$n(S)$ แทน จำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นทั้งหมด

คุณสมบัติของความน่าจะเป็น

1. $0 \leq P(E) \leq 1$ เสมอ
2. $P(E) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $E = \emptyset$ หมายความว่า เหตุการณ์ E ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย
3. $P(E) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $E = S$ หมายความว่า เหตุการณ์ E จะเกิดขึ้นอย่างแน่นอน

กฎที่สำคัญของความน่าจะเป็น

กำหนด A, B, C แทนเหตุการณ์ใดๆ ในแซมเปิลสเปซ S

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
3. $P(A') = 1 - P(A)$
4. $P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$
5. $P(A' \cap B') = P\big((A \cup B)'\big) = 1 - P(A \cup B)$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิดจากการทดลองซ้ำ

เงื่อนไข

1. เป็นการทดลองที่ซ้ำๆกัน n ครั้ง
2. ในการทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน
3. ในแต่ละครั้งของการทดลอง จะมีเหตุการณ์ 2 อย่างคือ เหตุการณ์ที่สำเร็จ (เหตุการณ์ที่ต้องการ) กับเหตุการณ์ไม่สำเร็จ (เหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ)

ให้ p แทน ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สำเร็จ

q แทน ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไม่สำเร็จ ซึ่ง $q = 1 - p$

ถ้ามีเงื่อนไขครบ 3 ข้อจะได้ว่า

ถ้าการทดลองทั้งหมด n ครั้ง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เราต้องการให้เกิดขึ้น k ครั้ง มีค่าเท่ากับ

$$\binom{n}{k}(p)^k(q)^{n-k} \quad \text{หรือ} \quad \binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$$

ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

ถ้า a, b เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

สิ่งที่ควรรู้

1. ในการกระจาย $(a+b)^n$ จะมีทั้งหมด $n+1$ พจน์
2. ในแต่ละพจน์ ผลบวกของกำลังของ a และ b เท่ากับ n เสมอ
3. เรียก $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots, \binom{n}{n}$ ว่า **สัมประสิทธิ์ทวินาม**ของแต่ละพจน์
4. ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินามของทุกพจน์ในการการจาย $(a+b)^n$ คือ 2^n

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

5. พจน์ทั่วไป คือ $\mathbf{T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r}$
6. สำหรับจำนวนเต็มบวก n, r ใดๆ และ $0 < r \le n$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

เรียนความน่าจะเป็นแบบจัดเต็มสแกนเลย →

ลำดับและอนุกรม

ลำดับเลขคณิต

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

ควรรู้ ! ถ้า a, b, c เป็นลำดับเลขคณิต จะได้ว่า $b = \frac{a+c}{2}$

ลำดับเรขาคณิต

$$\mathbf{a_n = a_1 r^{n-1}}$$

ควรรู้ ! ถ้า a, b, c เป็นลำดับเรขาคณิต จะได้ว่า $b^2 = ac$

ลำดับฮาร์โมนิค

$$\mathbf{a_{n(Har)} = \frac{1}{a_{n(\text{เลข})}}}$$

ควรรู้ ! ถ้า a, b, c เป็นลำดับฮาร์โมนิค จะได้ว่า $b = \frac{2ac}{a+c}$

ลิมิตของลำดับ

ลำดับอนันต์

ลำดับคอนเวอร์เจนต์

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = L, L \in R\right)$$

ลำดับไดเวอร์เจนต์

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \text{ไม่มีลิมิต} = \begin{cases} \infty \\ -\infty \\ \text{หลายค่า} \end{cases}\right)$$

ทฤษฎีบทของลิมิต

กำหนดให้ C เป็นค่าคงที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A,\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} Ca_n = C\lim\limits_{n\to\infty} a_n = CA$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \pm B$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B},\quad B \neq 0$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^k$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} C^n = 0,\quad |C| < 1$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} C^n = \infty,\quad |C| > 1$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty,\quad k \in R^+$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{C}{n^k} = 0,\quad k \in R^+$

อนุกรม

1. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

4. $\sum_{i=1}^{n} C = \underbrace{C + C + C + \cdots + C}_{n\text{ ตัว}} = Cn$

ทฤษฎีของผลบวก

1. $\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

2. $\sum_{i=1}^{n} Ka_i = K\sum_{i=1}^{n} a_i$

*3. $\sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$

*4. $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \neq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$

อนุกรมเลขคณิต

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ใช้เมื่อรู้พจน์ท้าย

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ ใช้เมื่อรู้ d

สูตรการหา $\mathbf{a_n}$ จาก $\mathbf{S_n}$

$S_n = \blacksquare n^2 + \Delta n \quad \Rightarrow \quad a_n = 2\blacksquare n + (\Delta - \blacksquare)$

อนุกรมเรขาคณิต

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)}, \quad r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{(r-1)}, \quad r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{(1-r)}, \quad r \neq 1$$ ใช้เมื่อรู้พจน์ท้าย

เรียนลำดับและอนุกรมแบบจัดเต็มสแกนเลย →

อนุกรมอนันต์

อนุกรมอนันต์

อนุกรมคอนเวอร์เจนต์

$\left(\lim_{n\to\infty} S_n = L, L \in R\right)$

อนุกรมไดเวอร์เจนต์

$\left(\lim_{n\to\infty} S_n = \text{ไม่มีลิมิต} = \begin{cases} \infty \\ -\infty \\ \text{หลายค่า} \end{cases}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S_\infty = \frac{a_1}{1-r}, |r| < 1$$

อนุกรม Telescopic

$$S_n = \frac{1}{\text{หลัง} - \text{หน้า}}\left(\text{ตัวแรกตัดหลัง} - \text{ตัวท้ายตัดหน้า}\right)$$

ผลบวกจำกัด

$$S_\infty = \frac{1}{\text{หลัง} - \text{หน้า}}\left(\text{ตัวแรกตัดหลัง}\right)$$

ผลบวกอนันต์

การคิดดอกเบี้ย

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย i % ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง แล้วเมื่อฝากครบ n ปี จะได้เงินรวม $\mathbf{P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn}}$ บาท เมื่อ $\mathbf{r = \frac{i}{100}}$

มูลค่าเงินปัจจุบันและอนาคต

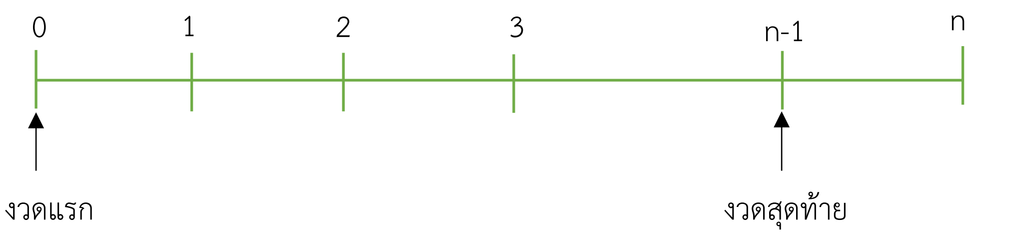
ถ้าลงทุน P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย i % ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง เป็นเวลา n ปี เมื่อครบ n ปี เงินรวมที่ได้คือ $\mathbf{S = P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kn}}$ บาท เมื่อ $\mathbf{r = \frac{i}{100}}$

เมื่อคำนวณจากอนาคตกลับมาเป็นปัจจุบัน จะได้ $\mathbf{P = S\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kn}}$

การคิดค่างวด

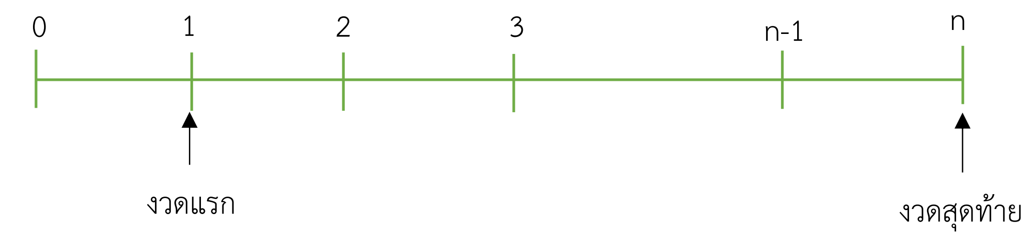
เป็นเหมือนการฝากเงินเป็นงวดๆรวมกับดอกเบี้ย แล้วใช้สูตร อนุกรมเรขาคณิต (จำแค่สูตรนี้น้า)

ต้นงวด : จะเริ่มจาก 0 ถึง n-1 จากนั้นเข้าสูตรอนุกรมเรขาคณิต



$$\text{เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n} = \frac{R(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}$$

สิ้นงวด : จะเริ่มจาก 0 ถึง n จากนั้นเข้าสูตรอนุกรมเรขาคณิต



$$\text{เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n} = \frac{R[(1+r)^n - 1]}{r}$$

แคลคูลัส

ลิมิตของฟังก์ชัน

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

เมื่อ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน และเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = M$ แล้ว

1. $\lim_{x\to a} c = c$, c เป็นค่าคงที่ใดๆ

2. $\lim_{x\to a} x = a$

3. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$, $n \in I^+$

4. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL$, c เป็นค่าคงที่ใดๆ

5. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$

6. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L \cdot M$

7. $\lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$

8. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$, $n \in I^+$

9. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, $n \in I^+$ และ $\sqrt[n]{L} \in R$

เทคนิคการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน : $\lim_{x \to a} f(x)$

1. แทน x ด้วย a ถ้าได้ $\frac{\text{เลข}}{\text{เลข}} \Longrightarrow$ ตอบเลย
2. แทน x ด้วย a ถ้าได้ $\frac{0}{\text{เลข}} \Longrightarrow$ ตอบ 0
3. แทน x ด้วย a ถ้าได้ $\frac{\text{เลข}}{0} \Longrightarrow$ ตอบ หาค่าไม่ได้
4. แทน x ด้วย a ถ้าได้ $\frac{0}{0} \Longrightarrow$ ยังสรุปไม่ได้ แต่คำตอบมีแน่ โดยทำดังนี้
   - 4.1 ดึงตัวร่วมหรือแยก factor แล้วตัด
   - 4.2 โจทย์ติด $\sqrt{}$ เอา Conjugate คูณทั้งเศษและส่วน
   - 4.3 ใช้ทฤษฎีบทของโลปิตาลช่วย

ทฤษฎีบทของโลปิตาล (L' Hospital)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)'}{g(x)'} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)''}{g(x)''} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)'''}{g(x)'''} = \dots$$

จะดิฟได้ต้องเป็น $\frac{0}{0}$ เท่านั้น และต้องหยุดดิฟเมื่อไม่ใช่ $\frac{0}{0}$

Note จะ check limit ทางซ้ายและทางขวาเมื่อพบว่า

1. $f(x)$ แตกปีกกา
2. เจอ $|\ \ |$ ที่เป็น $\frac{0}{0}$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อฟังก์ชัน f มีคุณสมบัติดังนี้

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$\frac{d}{dx}y = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

สูตรการหาอนุพันธ์

กำหนด c เป็นค่าคงที่ และ u , v เป็นฟังก์ชันของ x

กำหนด c เป็นค่าคงที่ และ u , v เป็นฟังก์ชันของ x

พื้นฐาน

1. $\frac{d}{dx}c = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = 1$
3. $\frac{d}{dx}cu = c\frac{d}{dx}u$
4. $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{d}{dx}u$

พีชคณิต

6. $\frac{d}{dx}(u \pm v) = u' \pm v'$
7. $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = uv' + vu'$
8. $\frac{d}{dx}(u \cdot v \cdot w) = u'vw + uv'w + uvw'$
9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu'-uv'}{v^2}$

กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

ทฤษฎีบท กำหนดให้ $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u และ x ตามลำดับ จะได้ว่าฟังก์ชัน fog มีอนุพันธ์ที่ x

โดยที่ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ และ $\frac{d}{dx}(fog)(x) = \frac{d}{dx}\big(f(g(x)\big) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

อัตรการเปลี่ยนแปลง

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x เมื่อ x เกิดช่วงการเปลี่ยนแปลง

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ

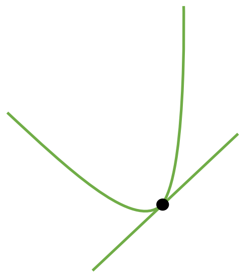
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ซึ่งก็คือ ค่าของ $f'(x)$ นั่นเอง เพราะว่า $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

ความชันของเส้นโค้ง

สมการเส้นตรง : หาได้จากสูตร $y - y_1 = m(x - x_1)$ เมื่อ m แทนความชันของเส้นตรง และ (x_1, y_1) แทนจุดที่เส้นตรงนั้นผ่าน

กำหนดให้ $y = f(x)$ จะได้ว่า



1. ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x, y) ใดๆ คือ $\frac{dy}{dx}$, y' , $\frac{d}{dx}f(x)$, $f'(x)$
2. ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด $x = a$ คือ $f'(a)$
3. ความชันของเส้นตรงซึ่งมาสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด $x = a$ คือ $f'(a)$
4. ณ จุดสัมผัสระหว่างเส้นตรงกับเส้นโค้งจะกล่าวได้ว่า

ความชันของเส้นสัมผัส = ความชันของเส้นโค้ง

$$m_{\text{ผัส}} = m_{\text{โค้ง}}$$

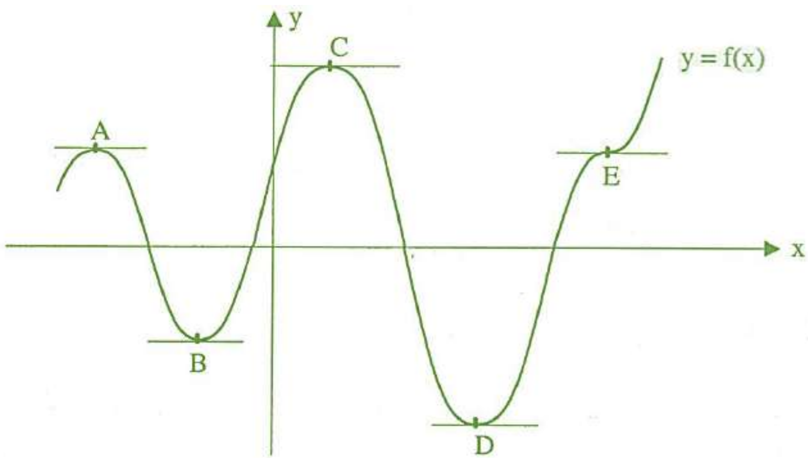
ฟังก์ชันเพิ่ม-ลด

ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง A

ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ในช่วง A แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง A

สูงสุดสัมพัทธ์ และ ต่ำสุดสัมพัทธ์

พิจารณากราฟเส้นโค้ง $y = f(x)$



พบว่า จุด A , B , C , D , E เรียกว่า **จุดวิกฤต** (จุดที่ $\frac{dy}{dx}, f'(x)$ เท่ากับ 0)

จุด A ,C เรียกว่า จุดสูงสุดสัมพัทธ์

จุด B , D เรียกว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์

จุด E เรียกว่า จุดเปลี่ยนเว้า

หลักการหา จุดสูงสุด-ต่ำสุดสัมพัทธ์

1. หา $f'(x)$
2. จับ $f'(x) = 0$ แล้วแก้หาค่า x ค่า x ที่ได้เรียกค่าวิกฤต (สมมุติ ค่าวิกฤตคือ $x = M$)
3. นำค่าวิกฤตมาทดสอบ ว่าเกิด สูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์
   - ถ้า $f''(M) < 0$ จะเกิด จุดสูงสุดสัมพัทธ์ ตรง $x = M$
   - ถ้า $f''(M) > 0$ จะเกิด จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ตรง $x = M$
4. จุดสูงสุด-ต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $\big(M, f(M)\big)$ และเรียก $\big(M, f(M)\big)$ ว่า **จุดวิกฤต** ด้วย
5. ค่าสูงสุด - ต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ พิกัด y หรือ $f(M)$

ค่าสูงสุด-ต่ำสุดสัมบูรณ์ (โจทย์มักจำกำหนดช่วง $[a, b]$ มาให้)

คือ ค่าที่สูงที่สุด หรือต่ำที่สุด ในช่วง $[a, b]$ อาจจะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือเป็น $f(a), f(b)$ ก็ได้ (เอาขอบของช่วงที่โจทย์ให้มาคิดด้วย)

ปฏิยานุพันธ์

ฟังก์ชัน $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f เมื่อ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x $(\int f(x)dx = F(x))$

สูตรการอินทิเกรตเบื้องต้น

1. $\int kdx = kx + c$ เมื่อ k , c เป็นค่าคงที่
2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่
3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$ และ c เป็นค่าคงที่
5. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$, c เป็นค่าคงที่ และ u เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x
6. $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$

อินทิกรัลจำกัดเขต

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$ โดยไม่ต้องบวก c

คุณสมบัติของอินทิกรัลจำกัดเขต

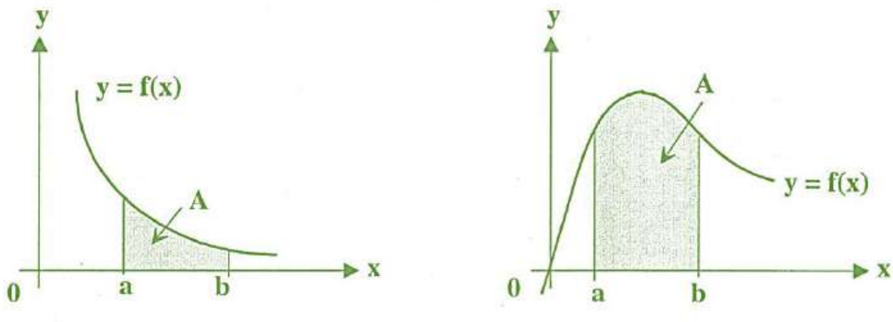
กำหนด f, g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และให้ c เป็นค่าคงที่

1. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b f(x)dx$
3. ถ้า $a < c < b$ จะได้ว่า $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. $\int_a^a f(x)dx = 0$
5. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง

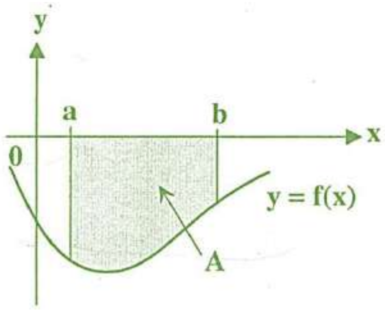
ระหว่างเส้นโค้งกับแกน x

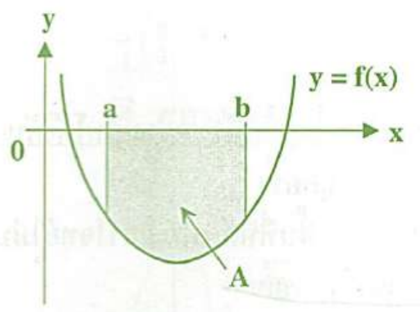
ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$



ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ แล้ว A เป็นพื้นที่เหนือแกน x

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$$



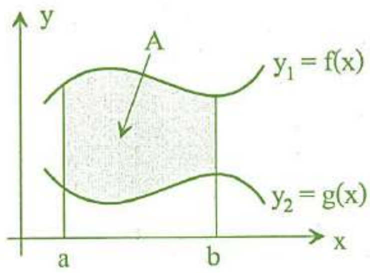


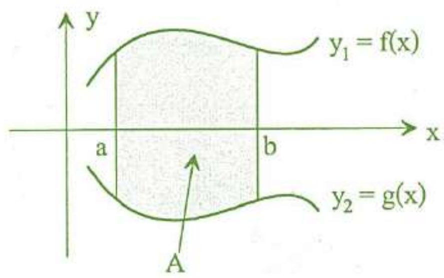
ถ้า $f(x) \le 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง [a , b] แล้ว A เป็นพื้นที่ใต้แกน x

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

ระหว่างเส้นโค้งกับเส้นโค้ง

ถ้า $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a , b]





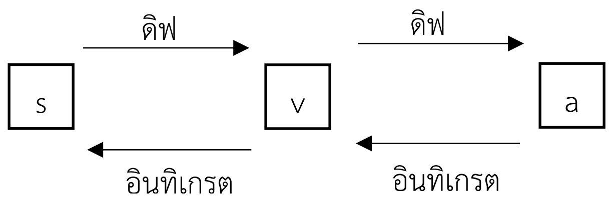
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

11. บทประยุกต์การเคลื่อนที่

กำหนด $s(t)$ = ระยะทางที่วัตถุอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น (การขจัด) ที่เวลา t ใดๆ

$v(t)$ = ความเร็วที่เวลา t ใดๆ

$a(t)$ = ความเร่งที่เวลา t ใดๆ



สถิติ

<u>ความหมายของคำต่างๆ ที่เราควรรู้จักในวิชาสถิติ</u>

1. **ข้อมูล (Data)** คือ ข้อความที่เป็นจริง ซึ่งอาจเป็นตัวเลขหรือไม่ก็ได้
2. **ประชากร (Population)** คือ ข้อมูลทั้งหมดที่ต้องการศึกษา
3. **กลุ่มตัวอย่าง (Sample)** คือ ข้อมูลบางส่วนของประชากร
4. **ค่าพารามิเตอร์ (Parameter)** คือ ค่าตัวเลขที่คำนวณได้จากประชากร
5. **ค่าสถิติ (Statistic)** คือ ค่าตัวเลขที่คำนวณได้จากกลุ่มตัวอย่าง
6. **สารสนเทศหรือข่าวสาร (Information)** คือ ข้อมูลที่ผ่านการวิเคราะห์เบื้องต้นหรือวิเคราะห์ขั้นสูงแล้ว
7. **ตัวแปร (Variable)** คือ ลักษณะของประชากรที่เราสนใจ ซึ่งสามารถเปลี่ยนค่าได้ เช่น เพศ, อายุ, คะแนน

<u>ประเภทของข้อมูล</u>

1. **ข้อมูลปฐมภูมิ (Primary data)** คือ ข้อมูลที่ผู้ใช้จะต้องเก็บรวบรวมจากผู้ให้ข้อมูลหรือแหล่งที่มาของข้อมูลโดยตรง การเก็บรวบรวมข้อมูลประเภทนี้ทำได้ 2 วิธี คือ

1.1 **การสำมะโน (Census)** คือ การเก็บรวบรวมข้อมูลจากทุกๆหน่วยของประชากร

1.2 **การสำรวจกลุ่มตัวอย่าง (Sample survey)** คือ การเก็บรวบรวมข้อมูลจากบางหน่วยที่เลือกมาเป็นตัวแทนจากทุกๆหน่วยของประชากร

2. **ข้อมูลทุติยภูมิ (Secondary data)** คือ ข้อมูลที่ผู้ใช้เก็บรวบรวมจากข้อมูลที่มีผู้อื่นเก็บรวบรวมไว้แล้ว เช่น รายงานของหน่วยราชการ, รายงานการวิจัย, รายงานประจำปี เป็นต้น

<u>ลักษณะของข้อมูล</u>

1. **ข้อมูลเชิงปริมาณ (Quantitative data)** คือ ข้อมูลที่ใช้แทนขนาดหรือปริมาณซึ่งวัดออกมาเป็นค่าตัวเลขที่สามารถนำมาใช้เปรียบเทียบขนาดได้โดยตรง เช่น สถิติคนไข้แยกตามอายุ, ความสูง, น้ำหนัก เป็นต้น

2. **ข้อมูลเชิงคุณภาพ (Qualitative data)** คือ ข้อมูลที่บอกคุณภาพ ลักษณะและศักยภาพอาจไม่ใช่ตัวเลขหรือเป็นตัวเลขก็ได้

กรณีไม่ใช่ตัวเลข เช่น เพศ, อาชีพ

กรณีเป็นตัวเลข เช่น บ้านเลขที่, เบอร์โทรศัพท์, ระดับการศึกษา

ความหมายต่างๆที่ควรทราบในตารางแจกแจงความถี่

ตารางแจกแจงความถี่ คือ ตารางทางสถิติที่สร้างขึ้นเพื่อเปรียบเทียบความถี่ของค่าหรือปริมาณที่ได้จากการวัดหรือการสังเกต

ขั้นตอนในการสร้างตารางแจกแจงความถี่

ขั้นที่ 1 หาพิสัย (Range)

พิสัย = ค่าสูงสุด - ค่าต่ำสุด

ขั้นที่ 2 หาความกว้างของอันตรภาคชั้น หรือหาจำนวนชั้น

$$\text{ความกว้าง} = \frac{\text{พิสัย}}{\text{จำนวนชั้น}} \qquad \text{จำนวนชั้น} = \frac{\text{พิสัย}}{\text{ความกว้าง}}$$

ขั้นที่ 3 เขียนอันตรภาคชั้นให้ชั้นต่ำสุดคลุมค่าต่ำสุดของข้อมูล และให้ชั้นสูงสุดคลุมค่าสูงสุดของข้อมูล

ขั้นที่ 4 บันทึกรอยขีด ของข้อมูลที่มีค่าอยู่ในแต่ละอันตรภาคชั้น

1. **ขีดจำกัดอันตรภาคชั้น (Class limit)** ในแต่ละอันตรภาคชั้นประกอบด้วยขีดจำกัดล่าง (Lower limit) และขีดจำกัดบน (Upper limit)
2. **ขอบเขตของอันตรภาคชั้น (Class boundary)** จะมี **ของเขตล่าง** หรือ **ของล่าง** และ **ขอบเขตบน** หรือ **ขอบบน** ซึ่งหาได้จาก

$$\text{ขอบล่าง} = \frac{\text{ขีดจำกัดล่างชั้นนั้น} + \text{ขีดจำกัดบนชั้นต่ำกว่า}}{2} \qquad \text{ขอบบน} = \frac{\text{ขีดจำกัดบนชั้นนั้น} + \text{ขีดจำกัดล่างชั้นสูงกว่า}}{2}$$

3. **จุดกึ่งกลางชั้น (Midpoint)** = $\frac{\text{ขอบบน} + \text{ขอบล่าง}}{2}$
4. **ความกว้างของอันตรภาคชั้น (Width OR Interval)** = ขอบบน - ขอบล่าง
5. **ความถี่สัมพัทธ์ (Relative Frequency)** = $\frac{\text{ความถี่ชั้นนั้น}}{\text{ผลรวมความถี่ทั้งหมด}}$
6. **ความถี่สะสม (Cumulative Frequency)** = ผลรวมของความถี่ชั้นนั้นกับความถี่ในชั้นที่ต่ำกว่าทั้งหมด
7. **ความถี่สะสมสัมพัทธ์ (Relative Cumulative Frequency)** = $\frac{\text{ความถี่สะสมชั้นนั้น}}{\text{ผลรวมความถี่ทั้งหมด}}$

ควอไทล์และเปอร์เซ็นต์ไทล์

1. เรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปมาก

2. หาตำแหน่งของควอไทล์, เปอร์เซ็นต์ไทล์ จากสูตร

ตำแหน่ง $Q_r = \frac{r}{4}(n+1)$

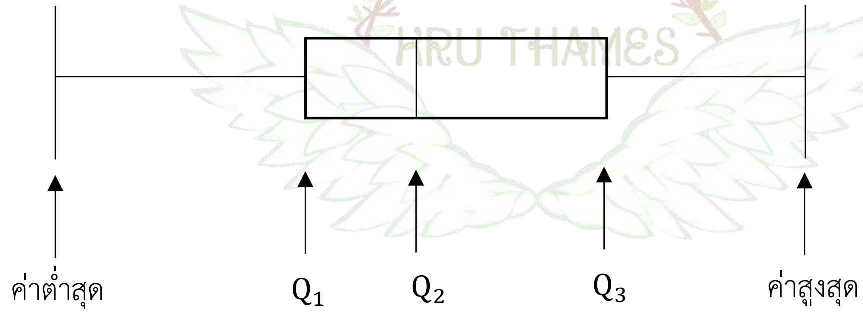
ตำแหน่ง $P_r = \frac{r}{100}(n+1)$

โดย n คือ จำนวนข้อมูลทั้งหมด

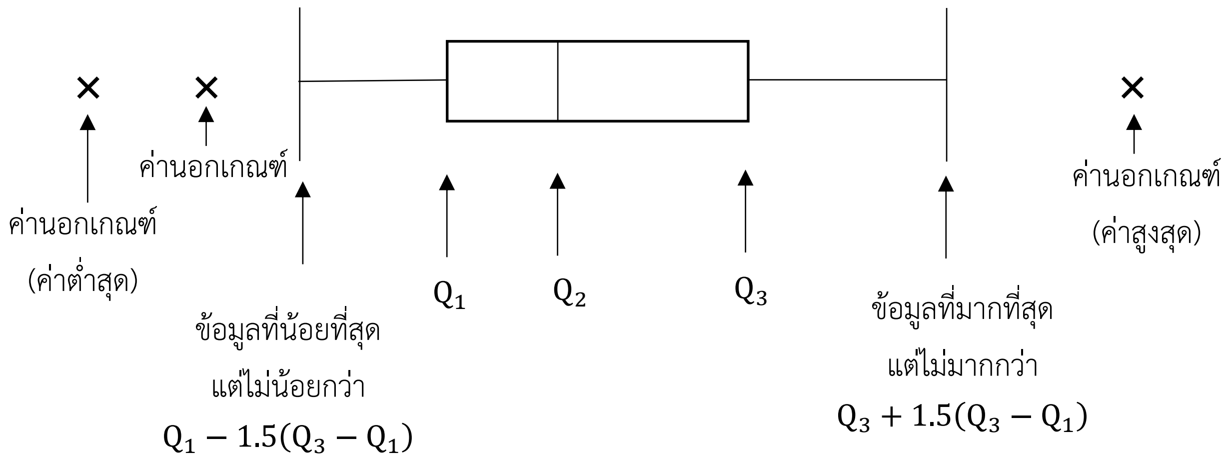
3. นำตำแหน่งที่คำนวณได้จากข้อ 2 ไปหาค่าของข้อมูล

แผนภาพกล่อง

กรณีที่ไม่มีค่านอกเกณฑ์



กรณีที่มีค่านอกเกณฑ์



ค่านอกเกณฑ์ หาได้จาก $Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1)$ และ $Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1)$ ถ้าข้อมูลน้อยกว่า $Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1)$ หรือมากกว่า $Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1)$ ถือเป็นค่านอกเกณฑ์

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic Mean)

1.ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Mean)

ประชากร $\mu = \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

กลุ่มตัวอย่าง $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

หมายเหตุ ถ้าไม่มีการกำหนดว่าข้อมูลเป็นของประชากร หรือกลุ่มตัวอย่าง ให้ถือว่าเป็น**ข้อมูลในระดับประชากร**

2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม (Combined Arithmetic Mean)

ประชากร $\mu_{comb} = \frac{N_1\mu_1+N_2\mu_2+N_3\mu_3+\cdots+N_k\mu_k}{N_1+N_2+N_3+\cdots+N_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i\mu_i}{\sum_{i=1}^{k} N_i}$

กลุ่มตัวอย่าง $\bar{x}_{comb} = \frac{N_1\bar{x}_1+N_2\bar{x}_2+N_3\bar{x}_3+\cdots+N_k\bar{x}_k}{N_1+N_2+N_3+\cdots+N_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{k} N_i}$

3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตถ่วงน้ำหนัก (Weighted Arithmetic Mean)

เมื่อ w_i คือ น้ำหนักหรือความสำคัญของข้อมูล x_i

ประชากร $\mu = \frac{w_1x+w_2x_2+w_3x_3+\cdots+w_nx_N}{w_1+w_2+w_3+\cdots+w_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_ix_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$

กลุ่มตัวอย่าง $\bar{x} = \frac{w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+w_3+\cdots+w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$

สมบัติของค่าเฉลี่ยเลขคณิต

1) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) = 0$ เสมอ หรือ $\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu) = 0$

2) ข้อมูลสองชุดสัมพันธ์กันแบบ $y_i = mx_i + c$

จะได้ว่า $\bar{y} = m\bar{x} + c$ หรือ $\mu_y = m\mu_x + c$

3) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ หรือ $\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$ ให้ค่าต่ำสุด

4) ถ้านำค่าคงที่ไปบวก ลบ คูณ หาร ข้อมูลเดิมทุกตัว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตใหม่จะเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตเดิมแล้ว บวก ลบ คูณ หารด้วยค่าคงที่นั้นด้วย

มัธยฐาน (Median)

มัธยฐาน คือ ค่าที่มีตำแหน่งอยู่ตรงกลางของข้อมูลเมื่อเรียงข้อมูลตามลำดับ จากน้อยไปมาก หรือ มากไปน้อย และในการหามัธยฐานจำเป็นต้องหาตำแหน่งของมัธยฐานก่อนจึงจะหาคะแนนซึ่งเป็นมัธยฐาน

- เรียงข้อมูลที่มีอยู่ทั้ง N ตัว
- ตำแหน่งของมัธยฐานคือตำแหน่งที่ $\frac{N+1}{2}$

ค่าของมัธยฐาน คือ ค่าของข้อมูลในตำแหน่งที่ $\frac{N+1}{2}$ เมื่อ N เป็นจำนวนคี่

ค่าของมัธยฐาน คือ ค่าของข้อมูลในตำแหน่งที่ $\frac{N}{2}$ และ $\frac{N}{2}+1$ เมื่อ N เป็นจำนวนคู่

ควรรู้... $\sum|x-\mathrm{Med}|$ มีค่าน้อยที่สุด

ฐานนิยม (Mode)

ฐานนิยม คือ ค่าสังเกตของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด หรือ ข้อมูลที่ซ้ำกันมากที่สุด

วิธีการใช้ค่ากลางทั้ง 5 แบบ

1. $\bar{x}$ ใช้ได้ดี เมื่อข้อมูลมีการกระจายปกติสม่ำเสมอ หมายความว่าข้อมูลแต่ละตัวแตกต่างกันไม่มากนัก
2. ค่า Median ใช้ได้ดีสำหรับข้อมูลที่มีบางตัวมีค่าสูงผิดปกติหรือต่ำผิดปกติ
3. ค่า Mode ใช้ได้ดีสำหรับข้อมูลเชิงคุณภาพ

การวัดการกระจายสัมบูรณ์ (Measures of Absolute Varaition)

1. **พิสัย** (Range)

$$\text{พิสัย} = x_{max} - x_{min}$$

2. **พิสัยระหว่างควอร์ไทล์** (interquartile range)

$$\mathrm{IQR} = Q_3 - Q_1$$

3. **ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน** (Standard deviation)

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}}$
หรือ	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i)^2}{N} - \mu^2}$
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง	$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$
หรือ	$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2-n\bar{x}^2}{n-1}}$

ควรรู้

1) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าเป็นบวกเสมอ

2) ถ้านำค่าคงที่ (c) บวกทุกตัวของข้อมูล จะได้ว่า

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานข้อมูลใหม่ = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานข้อมูลเดิม

3) ถ้านำค่าคงที่ (c) คูณทุกตัวของข้อมูล จะได้ว่า

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานข้อมูลใหม่ = $|c|$ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานข้อมูลเดิม

4. **ความแปรปรวน (Variance)** คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานยกกำลังสอง

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}$
หรือ	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i)^2}{N} - \mu^2$
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$
หรือ	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2-N\bar{x}^2}{n-1}$

ความแปรปรวนรวม

สำหรับข้อมูลแต่ละชุดที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากัน

ประชากร $\sigma^2{}_{comb} = \frac{N_1\sigma_1^2+N_2\sigma_2^2+\cdots+N_k\sigma_k^2}{N_1+N_2+\cdots+N_k}$

ตัวอย่าง $s^2{}_{comb} = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2+\cdots+(n_k-1)s_k^2}{(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1)}$

สำหรับข้อมูลแต่ละชุดที่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตไม่เท่ากัน

ประชากร $\sigma^2{}_{comb} = \frac{\sum x^2_{\text{รวม}}}{N_{\text{รวม}}} - (\mu_{\text{รวม}})^2$ หรือ $\sigma^2{}_{comb} = \frac{N_1(\sigma^2{}_1+(\mu_1-\mu_{\text{รวม}})^2)+N_2(\sigma^2{}_2+(\mu_2-\mu_{\text{รวม}})^2)}{N_1+N_2}$

ตัวอย่าง $s^2{}_{comb} = \frac{\sum x^2_{\text{รวม}}}{n_{\text{รวม}}} - (\bar{x}_{\text{รวม}})^2$ หรือ $s^2{}_{comb} = \frac{n_1(s^2{}_1+(\bar{x}_1-\bar{x}_{\text{รวม}})^2)+n_2(s^2{}_2+(\bar{x}_2-\bar{x}_{\text{รวม}})^2)}{n_1+n_2}$

การวัดการกระจายสัมพัทธ์ (Measures of Relative Varaition)

สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของประชากร (Coefficient of variation) $= \frac{\sigma}{|\mu|}$

สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของกลุ่มตัวอย่าง $= \frac{s}{|\bar{x}|}$

เรียนสถิติแบบจัดเต็มสแกนเลย →

ตัวแปรสุ่มและการแจกแจงความน่าจะเป็น

ตัวแปรสุ่ม (random variable)

คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง เรียกสมาชิกในเซตว่า "ค่าของตัวแปรสุ่ม" ซึ่งได้จากหาผลลัพธ์ตามตามความสนใจจากการทดลองสุ่ม

โดยทั่วไปนิยมใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่แทนตัวแปรสุ่มเช่น X, Y, Z และใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กแทนค่าของตัวแปรสุ่มเช่น x, y, z

เหตุการณ์	ความสนใจของโจทย์	ตัวแปรสุ่ม
โยนเหรียญบาท 3 เหรียญ	จำนวนครั้งที่ขึ้นหัว	$X = (0, 1, 2, 3)$
ทอดลูกเต๋า 2 ลูก	ผลบวกของแต้มลูกเต๋าทั้ง 2 ลูก	$Y = (2, 3, 4, \dots, 12)$

ชนิดของตัวแปรสุ่ม

โดยทั่วไป ตัวแปรสุ่มแบ่งเป็น 2 ชนิดตามลักษณะของค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่ม ดังนี้

1. **ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง (discrete random variable)** คือตัวแปรสุ่มที่ค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดอยู่ในเซตที่สามารถนับจำนวนสมาชิกได้ หรือค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่มสามารถเขียนเรียงลำดับจากน้อยไปมากได้ ซึ่งเซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องอาจเป็นเซตจำกัดหรือเซตอนันต์ก็ได้

ตัวอย่างเช่น

- ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้งถ้าให้ตัวแปรสุ่มคือผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองจะได้เซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่มคือ $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้งถ้าให้ตัวแปรสุ่มเป็น 0 เมื่อเหรียญขึ้นหัวและ 1 เมื่อเหรียญขึ้นก้อยจะได้เซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่มคือ $\{0, 1\}$
- ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญไปเรื่อย ๆ จนกว่าเหรียญจะขึ้นหัวจึงจะหยุดถ้าให้ตัวแปรสุ่มคือจำนวนครั้งที่ต้องโยนเหรียญจนกว่าเหรียญจะขึ้นหัวจะได้เซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่มคือ $\{1, 2, 3, \dots\}$หรือ $\mathbb{N}$

2. **ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variable)** คือตัวแปรสุ่มที่เซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดเป็นช่วงที่เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$

ตัวอย่างเช่น

- ให้ตัวแปรสุ่มคือความสูง (เซนติเมตร) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ห้องหนึ่งอาจได้ว่าเซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่มเป็นช่วง $[150,190]$
- ให้ตัวแปรสุ่มคือน้ำหนัก (กิโลกรัม) ของทุเรียนที่เก็บเกี่ยวจากสวนแห่งหนึ่งอาจได้ว่าเซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่มเป็นช่วง $[1,6]$
- ให้ตัวแปรสุ่มคือระยะเวลา (ชั่วโมง) นับจากปัจจุบันจนเกิดแผ่นดินไหวครั้งต่อไปที่จังหวัดเชียงใหม่อาจได้ว่าเซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดมดของตัวแปรสุ่มเป็นช่วง $[0,\infty)$

สัญลักษณ์แสดงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

$P(X = a) = b$ ความหมายก็คือ ความน่าจะเป็นของค่าตัวแปรสุ่ม a เท่ากับ b

Ex. ให้ตัวแปรสุ่ม X คือจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัวจากการโยนเหรียญที่เที่ยงตรง 1 เหรียญ 3 ครั้ง จะได้ตารางแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ดังนี้

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะหงายเป็นหัวจำนวน 2 เหรียญ คือ $\frac{3}{8}$ เขียนแทนด้วย $P(X = 2) = \frac{3}{8}$

*****ผลบวกค่าความน่าจะเป็นของทุกค่าของตัวแปรสุ่มที่เป็นไปได้มีค่าเท่ากับ 1 เสมอ*****

ค่าคาดหมาย(ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม)0

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

เมื่อ n แทนจำนวนค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่ม X

และ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ แทนค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่ม X

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2 P(X = x_i)}$$

และเรียก σ_x^2 ว่า **ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X**

การแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \text{ สำหรับทุก } i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

(แต่ละค่าของตัวแปรสุ่มมีความน่าจะเป็นที่เท่ากันทุกตัว)

การแจกแจงทวินาม

การทดลองสุ่มแต่ละครั้งมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้เพียง 2 แบบคือ คือ สำเร็จ (p) และไม่สำเร็จ (1-p)

ใช้สัญลักษณ์ $X \sim B(n, p)$ โดยที่

1. $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ สำหรับทุก $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$
2. $\mu_x = np$
3. $\sigma_x = \sqrt{np(1-p)}$

การแจกแจงปกติ (ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง)

กราฟการแจกแจงปกติจะสมมาตร ซึ่งจะมี $\bar{x} = \text{med} = \text{mode}$

ใช้สัญลักษณ์ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

การแจกแจงปกติมาตรฐาน (Z)

ตัวแปรสุ่ม Z มีการแจกแจงปกติมาตรฐานนั้นคือ $\mu_z = 0$ และ $\sigma_z = 1$

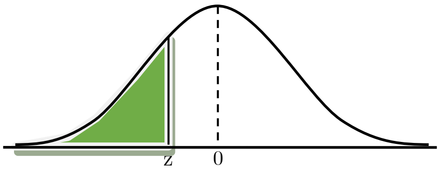
สูตรคือ $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

และ $P(a \le X \le b) = P\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)$ **(การเปิดตารางจะนับพื้นที่จากทางซ้ายมานะ^^)**

เมื่อ a, b เป็นค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่ม X และ $a \le b$

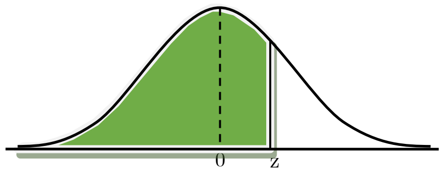
เรียนตัวแปรสุ่มฯแบบจัดเต็มสแกนเลย →

ตารางที่ 1 แสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน



z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5	0.496	0.492	0.488	0.484	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.409	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.352	0.3483
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.33	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.5	0.3085	0.305	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.281	0.2776
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.7	0.242	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.8	0.2119	0.209	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.166	0.1635	0.1611
-1	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.123	0.121	0.119	0.117
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.102	0.1003	0.0985
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.063	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.025	0.0244	0.0239	0.0233
-2	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-2.1	0.0179	0.0174	0.017	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.015	0.0146	0.0143
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.011
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.4	0.0082	0.008	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.5	0.0062	0.006	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.004	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.003	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.002	0.0019
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-3	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010

ตารางที่ 1 แสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน (ต่อ)



z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990