

导数_题集1

试题

T1

新月

2008年安徽卷

设函数 $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ ($x > 0$ 且 $x \neq 1$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 已知 $2^{\frac{1}{x}} > x^a$ 对任意 $x \in (0, 1)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

T2

新月

已知函数 $f(x) = \ln x \cdot \ln(1-x)$, 证明:

(1) 对任意 $0 < x < 1$, 都有 $\ln x > \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

(2) 曲线 $y = f(x)$ 上的所有点都落在圆 $C: (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 内.

T3

新月

设函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.

(1) 若 $a = 0$, 求 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

T4

新月

2016年全国三卷(文科)

设函数 $f(x) = \ln x - x + 1$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .
- (2) 证明: 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $1 < \frac{x-1}{\ln x} < x$.
- (3) 设 $c > 1$, 证明: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $1 + (c-1)x > c^x$.

T5

| 上弦月

已知函数 $f(x) = \ln^2(x+1) - \frac{x^2}{x+1}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 若不等式 $(1 + \frac{1}{n})^{n+a} \leq e$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立, 求 a 的取值范围.

T6

| 上弦月

2021年八省联考

已知函数 $f(x) = e^x - \sin x - \cos x$, $g(x) = e^x + \sin x + \cos x$.

- (1) 证明: 当 $x > -\frac{5\pi}{4}$ 时, $f(x) \geq 0$.
- (2) 若 $g(x) \geq 2 + ax$, 求 a .

T7

| 新月

已知函数 $f(x) = a \sin x + \tan x - (a+1)x$, $a > 0$, $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性.
- (2) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

T8

| 上弦月

已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的零点个数.
- (2) 设 $p > 0, n \in \mathbb{N}^*$, 证明: 存在正实数 c , 当 $x > c$ 时, $f(x) > px^n$.

T9

原创

设 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax - 1 (x > 0)$ 的零点为 x_1 ，极值点为 x_2 。

(1) 求 a 的取值范围。

(2) 证明： $x_1 < \sqrt{3}x_2$ 。

答案

T1

(1) 单增区间为 $(0, \frac{1}{e})$ ，单减区间为 $(\frac{1}{e}, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 。

提示：注意定义域 1 要断开，并且两个单减区间用“和”字连接，不要用并集符号 $\cup$ 。

(2) $(-e \ln 2, +\infty)$

提示：求参数取值范围优先考虑分离参数，两边取对数即可，注意 $\ln x$ 是负的，除到另一边后会改变不等号方向。

T2

(1) 略

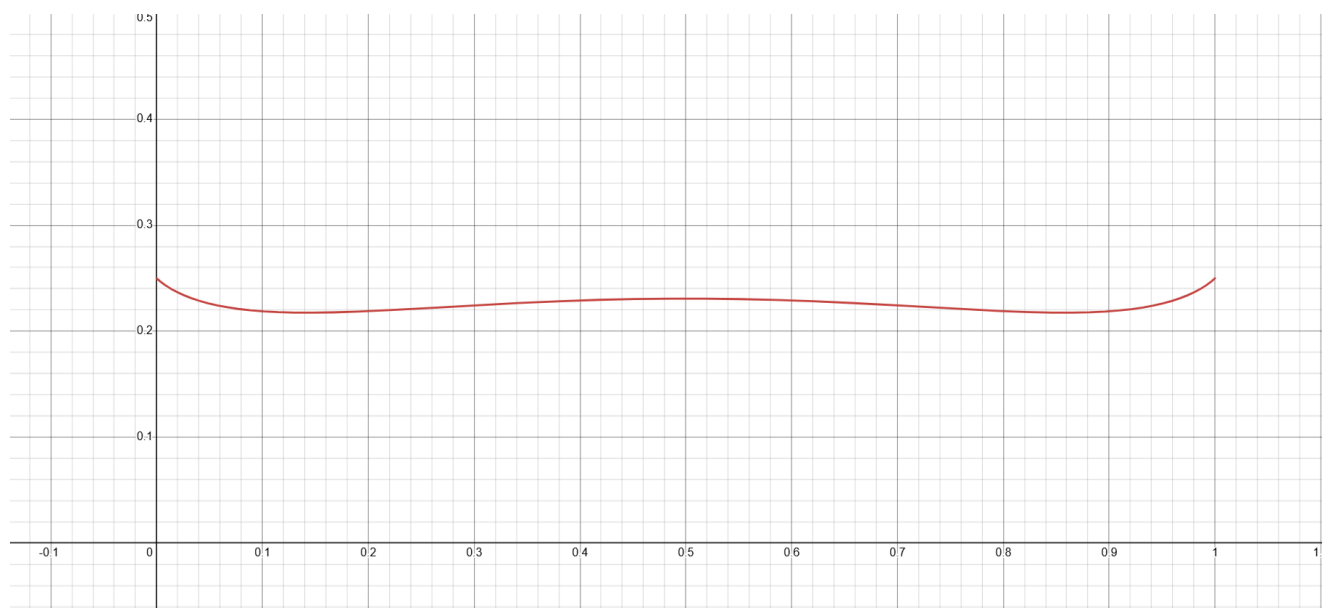
提示：注意定义域 $(0, 1)$ 。此为常用不等式，容易证明，但一定要熟记。

(2) 略

提示：即证明 $(x - \frac{1}{2})^2 + f^2(x) < \frac{1}{4}$ 恒成立，很明显要使用第一问提供的不等式。注意 $\ln x$ 和 $\ln(1-x)$ 都是负的，因此对 $\ln^2 x$ 和 $\ln^2(1-x)$ 使用第一问的不等式的时候，不等号要反向，如下：

$$\begin{aligned} (x - \frac{1}{2})^2 + f^2(x) &= (x - \frac{1}{2})^2 + \ln^2 x \cdot \ln^2(1-x) \\ &< (x - \frac{1}{2})^2 + (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \cdot (\sqrt{1-x} - \frac{1}{\sqrt{1-x}})^2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

正好是 $\frac{1}{4}$ 。其实函数 $(x - \frac{1}{2})^2 + f^2(x)$ 的图像如下：



在 $x = 0, 1$ 处的极限值均为 $\frac{1}{4}$ 。

T3

(1) 单增区间为 $(0, +\infty)$ ，单减区间为 $(-\infty, 0)$ 。

(2) $(-\infty, \frac{1}{2}]$

提示：求参数取值范围优先考虑分离参数。本题可以把 a 分离出来，得到

$$a \leq \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

注意这里在分离之前需要验证 $x = 0$ 时不等式是否成立。

正常来说，我们需要求右边函数 $\frac{e^x - x - 1}{x^2}$ 的最小值。但是，在分离出参数后，我们一定要先观察函数是否存在未定式。（未定式，即 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1 \cdot \infty, 1^\infty, \infty - \infty$ 这样的式子）

我们发现，当 $x = 0$ 时，右边函数取到 $\frac{0}{0}$ ，这是个未定式。出现未定式意味着这个函数的“最小值”有可能是 $x = 0$ 处的极限值。高中范围内，我们无法求解未定式得到此处的极限值。如果你知道洛必达法则，可以求出 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$ ，但这不能在考试中使用。因此，发现未定式后，我们要考虑考虑放弃分离参数这种方法，去循规蹈矩地求导讨论。

$f(x) = e^x - ax^2 - x - 1 (x \geq 0)$ ，求导 $f'(x) = e^x - 2ax - 1$ ，性质尚不明确，继续求导。设 $g(x) = f'(x)$ ，求导 $g'(x) = e^x - 2a$ 。到这里就可以开始讨论了：

- 若 $a \leq \frac{1}{2}$ ，则 $g'(x) \geq 0$ ， $g(x)$ 单调递增， $g(x) \geq g(0) = 0$ ，即 $f'(x) \geq 0$ ， $f(x)$ 单调递增，故 $f(x) \geq f(0) = 0$ 符合题意；
- 若 $a > \frac{1}{2}$ ，则 $g'(x)$ 先负后正，零点为 $\ln(2a)$ ，则 $g(x)$ 先减后增，极小值点为 $\ln(2a)$ ，再注意到 $g(0) = 0$ ，故 $g(x)$ 先负后正，即 $f'(x)$ 先负后正，则 $f(x)$ 先减后增。又因为 $f(0) = 0$ ，故最开始的一段 $f(x) < 0$ ，不符合题意。

注意：为了简便，上面的语言并不严谨，考试的时候要把“先负后正”换成“当 $x < \dots$ 时 $\dots < 0$ ；当 $x > \dots$ 时 $\dots > 0$ ”这样的数学语言。

T4

答案：(1) 单增区间为 $(0, 1)$ ，单减区间为 $(1, +\infty)$ (2) 略 (3) 略

提示：第二问，最好用“对数单身狗”（见文章 [论“对数单身狗、指数找朋友”](#)）转化为证明：

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

然后分别构造函数 $\ln x + \frac{1}{x} - 1$ 和 $\ln x - x + 1$ 求解。

第三问，一种思路是直接构造函数 $g(x) = 1 + (c - 1)x - c^x$ ，求导得 $g'(x) = c - 1 - c^x \cdot \ln c$ ，先正后负，零点为 $\frac{\ln \frac{c-1}{\ln c}}{\ln c}$ ，根据第二问的不等式可知这个零点在 $(0, 1)$ 内。于是 $g(x)$ 的最小值为

$$g(x)_{\min} = \min\{g(0), g(1)\} = c$$

得证。

本题的另一种思路是变换主元。把 c 作为主元，构造函数

$$g(c) = 1 + (c - 1)x - c^x$$

求导得 $g'(c) = x - xc^{x-1} > 0$ ， $g(c)$ 单调递增，则 $g(c) > g(1) = 0$ ，得证。

T5

(1) 单增区间为 $(-1, 0)$ ，单减区间为 $(0, +\infty)$ 。

提示：对 $f(x)$ 求导：

$$f'(x) = \frac{2(x+1)\ln(x+1) - x^2 - 2x}{(x+1)^2}$$

分子的性质不明确，因此需要继续求导。如果直接把分子作为一个函数求导，多少有点繁琐，最好的做法是利用“对数单身狗”（见文章 [论“对数单身狗、指数找朋友”](#)），考虑下面函数：

$$g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x^2 + 2x}{x+1}$$

对 $g(x)$ 求导就比较方便了。

(2) $(-\infty, \frac{1}{\ln 2} - 1]$

提示：求参数的取值范围，优先考虑分离参数，两边取对数即可：

$$a \leq \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{n})} - n$$

观察右边的函数有没有出现未定式，我们发现当 $n \rightarrow +\infty$ 时，右边的值为 $\infty - \infty$ ，这是未定式，因此这个函数的最小值有可能是 $n \rightarrow +\infty$ 时的极限值。此时我们有两条路走：要么继续使用分离参数法，要么放弃分参、循规蹈矩地求导讨论。在之前的 T3 中，我们是选择后者，然而本题需要选择前者，即继续研究

$$\frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{n})} - n$$

的最小值。简便起见，换元 $x = 1 + \frac{1}{n} \in (1, 2]$ ，则上式变为

$$g(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \quad (1 < x \leq 2)$$

求导 $g'(x) = \frac{x \ln^2 x - (x-1)^2}{x(x-1)^2 \ln^2 x}$ ，分子恰好是 $xf(x-1)$ ，根据第一问的结果，我们有

$f(x) \leq f(0) = 0$ ，故 $g'(x) \leq 0$ ， $g(x)$ 单调递减，其最小值为 $g(2) = \frac{1}{\ln 2} - 1$ ，则 $a \leq \frac{1}{\ln 2} - 1$ ，这个等号不是在 $n \rightarrow +\infty$ 时（即 $x \rightarrow 1$ 时）取到，而是在 $n = 1$ 时（即 $x = 2$ ）时取到，不涉及到极限值的求解。但如果本题第二问改成：

$$(1 + \frac{1}{n})^{n+a} \geq e$$

那么就避不开极限值的求解，分离参数法就不能用了。

一个自然的问题是，在考试的时候，分离参数后发现函数会取到未定式，此时如何快速判断是否要继续分参，或者放弃分参。依我的经验，没有好的方法，很大程度上依赖直觉和运气。最好的情况是，你有足够的时间和实力去同时尝试两种方法。

T6

答案：(1) 略 (2) $a = 2$

提示：

(1) 先审视一下待证不等式：

$$e^x - \sin x - \cos x \geq 0$$

取等条件显然是 $x = 0$ ，对常用不等式熟悉的同学应该能看出，当 $x \geq 0$ 时，我们有

$$e^x - \sin x - \cos x \geq x + 1 - \sin x - \cos x = (x - \sin x) + (1 - \cos x) \geq 0$$

于是下面只需要考虑 $-\frac{5\pi}{4} < x < 0$ 的情形。如果直接对函数 $e^x - \sin x - \cos x$ 求导，会出现指数、三角混杂的情况，不便于分析。最好的做法是利用“指数找朋友”（见文章 [论“对数单身狗、指数找朋友”](#)，将待证不等式转化为

$$\frac{\sin x + \cos x}{e^x} \leq 1$$

构造函数 $h(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$ ，求导讨论其单调性即可。

(2) 待证不等式的取等条件显然是 $x = 0$ ，这意味着函数 $g(x) - 2 - ax$ 一定有一个极小值点为 $x = 0$ ，由此可得 $a = 2$ 。但是，这仅仅是一个必要条件，我们还需要证明充分性，即证明不等式：

$$e^x + \sin x + \cos x \geq 2 + 2x$$

这个不等式很容易证明，只需要构造函数 $e^x + \sin x + \cos x - 2x - 2$ 求导分析即可（更简单地，可以利用“指数找朋友”构造函数 $\frac{2x+2-\sin x-\cos x}{e^x}$ ），注意利用第一问的结论。

如果不用上面的方法(称为“内点效应”)，而是循规蹈矩地求导讨论，也不繁琐。构造函数

$$h(x) = g(x) - 2 - ax = e^x + \sin x + \cos x - 2 - ax$$

求导 $h'(x) = e^x + \cos x - \sin x - a$ ，性质尚不明确，继续求导 $h''(x) = e^x - \sin x - \cos x$ ，到这里我们发现 $h''(x)$ 恰好是题目中的 $f(x)$ ，而根据第一问的结论，当 $x > -\frac{5\pi}{4}$ 时， $h''(x) \geq 0$ ，则 $h'(x)$ 在这段区间上单调递增。那么 $h'(x)$ 在这段区间上有没有零点呢？考虑左右端点处，右边 $h'(+\infty) = +\infty$ ，左边 $h'(-\frac{5\pi}{4}) = e^{-\frac{5\pi}{4}} - a$ 正负性看似不明确，其实我们可以确定 a 的大致范围。因为题目要求不等式 $e^x + \sin x + \cos x \geq 2 + ax$ 恒成立，那么取 $x = -\pi$ 的时候也应该成立，这样就得到 $a \geq \frac{3-e^{-\pi}}{\pi}$ ，于是 $h'(-\frac{5\pi}{4}) < 0$ ，根据零点存在性定理可知在 $(-\frac{5\pi}{4}, +\infty)$ 上存在一个 $h'(x)$ 的零点 x_0 ，于是当 $-\frac{5\pi}{4} < x < x_0$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单减；当 $x > x_0$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单增。下面我们对 a 进行讨论，由于之前已经通过费马引理得出了答案是 $a = 2$ ，因此我们就根据 $a < 2$ 、 $a > 2$ 和 $a = 2$ 来讨论：

- 若 $a < 2$ ，则 $h'(0) = 2 - a > 0$ ，当 $x_0 < x < 0$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单增， $h(x) < h(0) = 0$ ，不符合题意；
- 若 $a > 2$ ，则 $h'(0) = 2 - a < 0$ ，当 $0 < x < x_0$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单减， $h(x) < h(0) = 0$ ，不符合题意；
- 若 $a = 2$ ，则 $h'(0) = 0$ ，当 $x > -\frac{5\pi}{4}$ 时有 $h(x) \geq h(0) = 0$ ，而当 $x < -\frac{5\pi}{4}$ 时，有

$$2 + 2x < 2 - \frac{5\pi}{2} < e^{-\frac{5\pi}{4}} - 2 < e^x + \cos x + \sin x$$

综上， $a = 2$ 。（如果构造函数 $\frac{ax+2-\sin x-\cos x}{e^x}$ 进行求导讨论，也行得通，只不过没有明显的简化）

T7

答案：(1) 单调递增 (2) $(-\infty, 2]$

提示：

(1) 求导 $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \geq \cos x + \frac{1}{\cos x} - 2 \geq 0$ （基本不等式）

(2) 求参数取值范围优先考虑分离参数：

$$a \leq \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$$

然后判断有无未定式。显然 $x = 0$ 时右边就是一个未定式，而且直觉上该未定式代表的极限值就是右边函数的最小值，于是放弃分参，转为分类讨论。对 $f(x)$ 求导：

$$f'(x) = a \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - a - 1$$

性质不明，继续求导：

$$f''(x) = \frac{\sin x(2 - a \cos^3 x)}{\cos^3 x}$$

如果 $a \leq 2$ ，则 $f''(x) > 0$ ， $f'(x)$ 单增， $f'(x) \geq f'(0) = 0$ ， $f(x)$ 单增， $f(x) \geq f(0) = 0$ ，符合题意。

如果 $a > 2$ ，则存在 x_0 满足 $\cos^3 x_0 = \frac{2}{a}$ ，使得当 $0 < x < x_0$ 时， $f''(x) < 0$ ， $f'(x)$ 单减；当 $x_0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $f''(x) > 0$ ， $f'(x)$ 单增。又因为 $f'(0) = 0$ ， $f'(\frac{\pi}{2}) = +\infty$ ，故存在 $x_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 使得 $f'(x_1) = 0$ ，当 $0 < x < x_1$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单减；当 $x_1 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单增。于是当 $0 < x < x_1$ 时， $f(x) < f(0) = 0$ ，不符合题意。

综上， $a \leq 2$ 。

T8

答案：(1) 当 $a \leq 0$ 时，没有零点；当 $0 < a < \frac{e^2}{4}$ 时，有一个零点；当 $a = \frac{e^2}{4}$ 时，有两个零点；当 $a > \frac{e^2}{4}$ 时，有三个零点。(2) 略

提示：第一问分离 a ，考虑方程 $\frac{e^x}{x^2} = a$ 的根的个数，作出左边函数的图像即可。

第二问，本质上是证明 e^x 的增长速度比幂函数要快。待证不等式为：

$$e^x > ax^2 + px^n$$

首先统一右边的指数，预设 $c > 1$ ，令 $m = \max\{2, n\}$ ，则当 $x > c$ 时有

$$ax^2 + px^n < (|a| + p)x^m$$

接下来，我们找出一个形如下面的不等式：

$$e^x > \lambda \cdot x^{m+1}$$

其中 λ 是待定常数。为此，构造函数

$$g(x) = \frac{e^x}{x^{m+1}}$$

求导 $g'(x) = \frac{e^x(x-m-1)}{x^{m+2}}$ ，则 $g(x) \geq g(m+1) = \frac{e^{m+1}}{(m+1)^{m+1}}$ ，即下面的不等式成立：

$$e^x \geq \frac{e^{m+1}}{(m+1)^{m+1}} \cdot x^{m+1}$$

现在取 $c = \max\{\frac{(m+1)^{m+1}}{e^{m+1}}, 1\}$ ，则当 $x > c$ 时，就有

$$\begin{aligned}
e^x - ax^2 - px^n &> \frac{e^{m+1}}{(m+1)^{m+1}} \cdot x^{m+1} - (|a| + p)x^m \\
&= x^m \left(\frac{e^{m+1}}{(m+1)^{m+1}} x - |a| - p \right) \\
&> c^m \left(\frac{e^{m+1}}{(m+1)^{m+1}} c - |a| - p \right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

T9

答案: (1) $(1, +\infty)$ (2) 略

解析:

(1) 求导 $f'(x) = e^x - x - a$, 继续求导 $f''(x) = e^x - 1 > 0$, 则 $f'(x)$ 单增, $f'(x) > f'(0) = 1 - a$, 要想使得 $f'(x)$ 有零点 x_2 , 必须 $1 - a < 0$, 即 $a > 1$ 。于是当 $0 < x < x_2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单减; 当 $x > x_2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单增。 $f(x)$ 的最小值为 $f(x_2)$, 注意到 $f(0) = 0$, $f(+\infty) = +\infty$, 则必然有 $f(x_2) < 0$, 根据零点存在性定理, 在 $(x_2, +\infty)$ 上存在 x_1 使得 $f(x_1) = 0$ 。综上, a 的取值范围是 $(1, +\infty)$ 。

(2) 本题是一个隐零点问题, x_1, x_2 都是隐零点, 分别满足 $f(x_1) = 0$ 和 $f'(x_2) = 0$, 即

$$\begin{aligned}
e^{x_1} &= \frac{1}{2}x_1^2 + ax_1 + 1 \\
e^{x_2} &= x_2 + a
\end{aligned}$$

现在要证明 $x_1 < \sqrt{3}x_2$, 由于两边都落在单增区间上, 故转化为证明 $f(x_1) < f(\sqrt{3}x_2)$, 由于 $f(x_1) = 0$, 转化为证明 $f(\sqrt{3}x_2) > 0$ 。计算得

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{3}x_2) &= e^{\sqrt{3}x_2} - \frac{3}{2}x_2^2 - \sqrt{3}ax_2 - 1 \\
&= e^{\sqrt{3}x_2} - \frac{3}{2}x_2^2 - \sqrt{3} \cdot (e^{x_2} - x_2)x_2 - 1 \\
&= e^{\sqrt{3}x_2} - \sqrt{3}x_2e^{x_2} + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)x_2^2 - 1
\end{aligned}$$

构造函数 $g(x) = e^{\sqrt{3}x} - \sqrt{3}xe^x + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)x^2 - 1 (x > 0)$, 下证 $g(x) > 0$ 。求导得

$$g'(x) = \sqrt{3}e^{\sqrt{3}x} - \sqrt{3}(x+1)e^x + (2\sqrt{3} - 3)x$$

继续求导得

$$g''(x) = 3e^{\sqrt{3}x} - \sqrt{3}(x+2)e^x + 2\sqrt{3} - 3$$

继续求导得

$$g'''(x) = 3\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x} - \sqrt{3}(x+3)e^x = \sqrt{3}e^x(3e^{(\sqrt{3}-1)x} - x - 3)$$

设函数 $h(x) = 3e^{(\sqrt{3}-1)x} - x - 3$, 求导得

$$h'(x) = 3(\sqrt{3} - 1)e^{(\sqrt{3}-1)x} - 1 > 3(\sqrt{3} - 1) - 1 > 0$$

则 $g'''(x) > 0$, $g''(x)$ 单调递增, $g''(x) > g''(0) = 0$, 则 $g'(x)$ 单调递增, $g'(x) > g'(0) = 0$, 则 $g(x)$ 单调递增, $g(x) > g(0) = 0$, 得证。

顺带一提, 本题的 $\sqrt{3}$ 是最佳的系数。事实上, 我们有

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{x_1}{x_2} = \sqrt{3}$$