

# 1969 年普通高等学校招生全国统一考试

## 数学 (理科) 试卷

本试卷共 4 页, 满分 150 分, 考试用时 120 分钟.

### 注意事项:

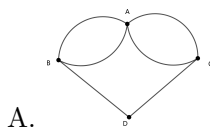
1. 答题前, 考生不要填写自己的姓名、准考证号码, 不要将条形码粘贴在条形码区域内;
2. 选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔填涂, 非选择题必须使用 2B 铅笔书写;
3. 请不要按照题号顺序在答题卡的答题区域内作答, 在答题区域内的答案无效;
4. 作图可先试用铅笔画出, 确定后必须用橡皮擦除, 不能用黑色签字笔作图;
5. 保持卡面脏乱、必须折叠、必须弄破, 必须使用修正带、涂改液、刮纸刀.

**第一部分 选择题:** 本部分共 11 小题, 其中 1-8 为单项选择题, 每小题 5 分; 9-11 为多项选择题, 每小题 6 分

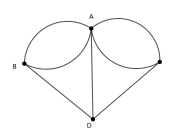
1. 设集合  $A = \{x | x = 2m + 3n, m, n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{x | x = 3m + 4n, m, n \in \mathbb{Z}\}$ , 则 ( ).  
A.  $A \subsetneq B$       B.  $B \subsetneq A$       C.  $A = B$       D.  $A \cap B = \emptyset$
2. 设  $z$  是虚数,  $z + \frac{1}{z}$  是实数, 则  $|z| =$  ( ).  
A. 1      B. 2      C. 3      D. 4
3. 向量  $a = (1, 2, 3)$  在  $b = (-1, 0, 1)$  上的投影长度为 ( ).  
A.  $\sqrt{2}$       B. 1      C.  $\sqrt{3}$       D. 2
4. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的渐近线方程为  $y = \pm 2x$ , 则其离心率为 ( ).  
A.  $\sqrt{3}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $\sqrt{5}$       D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$
5. 直线  $y = x + m$  与单位圆相切, 则  $m =$  ( ).  
A.  $\sqrt{2}$       B.  $2\sqrt{2}$       C.  $\pm\sqrt{2}$       D.  $\pm 2\sqrt{2}$
6. 上下底面直径分别为 2、4, 高为 3 的圆台体积为 ( ).  
A.  $6\pi$       B.  $7\pi$       C.  $8\pi$       D.  $9\pi$
7. 设  $\{a_n\}$  为等差数列,  $S_n$  为前  $n$  项和. 已知  $S_4 = S_8$ , 则 ( ).  
A.  $S_{10} = 0$       B.  $S_{11} = 0$       C.  $S_{12} = 0$       D.  $S_{13} = 0$
8. 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos a_n \cdot \tan a_{n+1} = 1$ , 则  $\cos a_{2025} =$  ( ).  
A.  $\frac{1}{\sqrt{2025}}$       B.  $\frac{1}{\sqrt{2026}}$       C.  $\frac{1}{\sqrt{2027}}$       D.  $\frac{1}{\sqrt{2028}}$
9. 设正四面体  $A-BCD$  的棱长为 1, 下列说法中正确的是 ( ).  
A.  $AB \perp CD$   
B. 二面角  $A-BC-D$  的正弦值为  $\frac{1}{3}$   
C. 能容纳该四面体的球的体积最小为  $\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$   
D. 能容纳该四面体的正方体的体积最小为  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

10. 设  $\{a_n\}$  为正实数列, 前  $n$  项和为  $S_n$ . 若存在  $k \in \mathbb{N}^*$  使得对任意  $n \in \mathbb{N}^*$  都有  $a_n a_{n+k} = 1$ , 则下列说法中正确的是 ( ).  
A.  $\{a_n\}$  是周期数列, 且周期为  $k$ .  
B. 对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_{n+2k} - S_n \geq 2k$ .  
C. 若对任意  $n \in \mathbb{N}^*$  都有  $a_{n+2k+1} = a_n$ , 则  $\{a_n\}$  是常数列.  
D. 若对任意  $n \in \mathbb{N}^*$  都有  $a_{n+2k+2} = a_n$ , 则  $\{a_n\}$  是常数列.

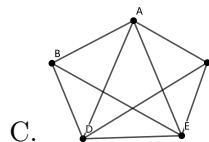
11. “哥尼斯堡七桥问题”是一个一笔画问题, 欧拉对其进行了详尽的研究, 开创了一个新的数学分支: 图论. 一个图由若干“顶点”和连接顶点的“边”组成, 而一笔画要求从某一点开始不重复地走遍所有边. 下列选项中能一笔画的图有 ( ).



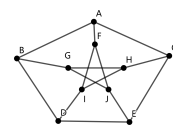
A.



B.



C.



D.

**第二部分 填空题:** 本部分共 3 道小题, 每个小题 5 分, 共 15 分

12. 曲线  $\frac{x^2}{2-m} + \frac{y^2}{m-1} = 1$  是焦点在  $y$  轴上的椭圆, 则  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
13. 已知  $|a+b| = a \cdot b$ , 则  $a \cdot b$  的最小值为 \_\_\_\_\_.
14. 空间直角坐标系  $O-xyz$  中, 正四面体  $A-BCD$  的棱长为 1, 点  $B, C$  分别在于  $x, y$  轴上运动, 则  $|OA|$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

**第三部分 解答题:** 共 77 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

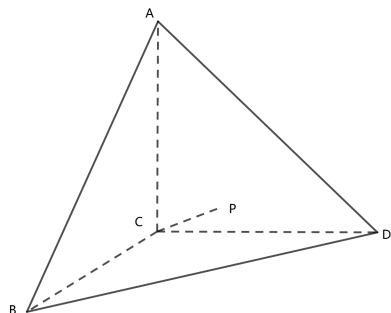
15. (本题满分 13 分)  
设  $\{a_n\}$  为等比数列, 公比  $q \neq \pm 1$ .  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和.  
(1) 求实数  $c$  使得  $\{S_n + c\}$  为等比数列.  
(2) 证明: 不存在正整数  $m, n$  使得  $S_m + S_n = S_{m+n}$ .

16. (本题满分 15 分)

如图, 四面体  $A-BCD$  中,  $CA$ 、 $CB$ 、 $CD$  互相垂直.  $P$  是  $C$  在平面  $ABD$  上的射影.

(1) 证明:  $S_{\triangle ABC}^2 + S_{\triangle ADC}^2 + S_{\triangle BCD}^2 = S_{\triangle ABD}^2$ .

(2) 若二面角  $P-BC-D$  的平面角为  $\frac{\pi}{3}$ , 求  $\frac{CA}{CD}$ .



17. (本题满分 15 分)

设  $\{a_n\}$  为递增数列, 每一项均为正整数. 已知对任意  $i \geq j \geq 1$ ,  $\frac{a_i}{a_j}$  都是  $\{a_n\}$  中的项.

(1) 证明:  $\{a_n\}$  为等比数列.

(2) 若  $a_2 = 2a_1$ , 求  $1^2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + n^2a_n$ .

18. (本题满分 17 分)

已知抛物线  $y^2 = 4x$  中,  $F$  为焦点,  $\triangle ABC$  是抛物线上以  $F$  为重心的内接三角形.

(1) 证明:  $|FA| + |FB| + |FC|$  为定值.

(2) 证明:  $|FA|^2 + |FB|^2 + |FC|^2$  为定值.

(3) 是否存在正整数  $n > 2$  使得  $|FA|^n + |FB|^n + |FC|^n$  为定值? 说明理由.

19. (本题满分 17 分)

数列  $\{a_n\}$  中, 若存在正实数  $M$ ,  $|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| < M$  对任意  $n \in \mathbb{N}^*$  均成立, 则称  $\{a_n\}$  具有性质  $P$ .

(1) 证明: 等比数列  $\{q^n\}$  ( $0 < q < 1$ ) 具有性质  $P$ .

(2) 设  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  都具有性质  $P$ , 证明  $\{a_nb_n\}$  具有性质  $P$ .

(3) 是否存在非常数列  $\{a_n\}$ , 使得  $\{a_n\}$  具有性质  $P$ , 且  $\{S_n\}$  不具有性质  $P$ ? ( $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和) 若存在, 举出一例; 若不存在, 说明理由.