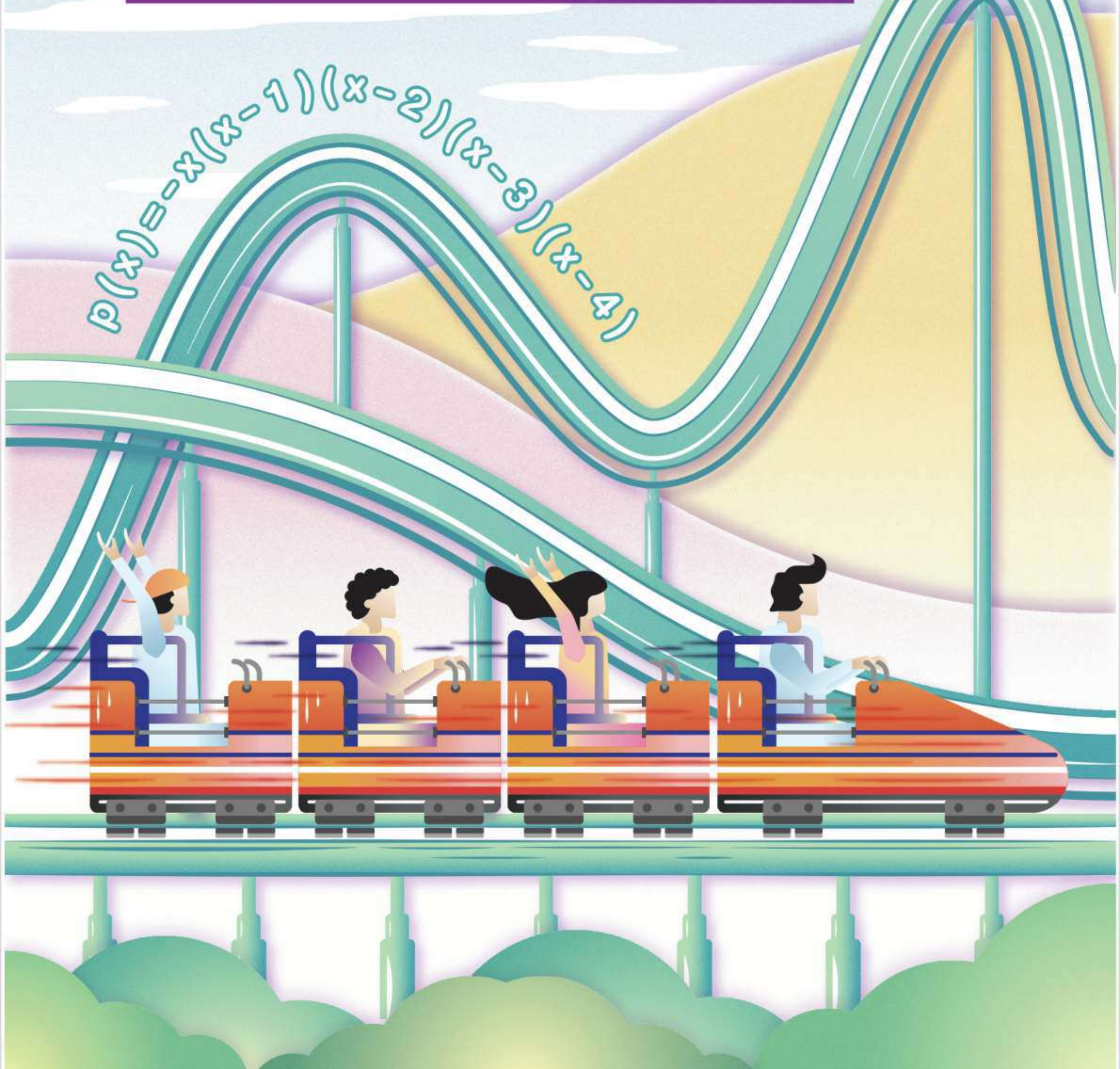
หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔

คณิตศาสตร์
เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑



หนังสือเรียน

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

จัดทำเป็นฉบับ e-book ครั้งที่ ๑ พ.ศ. ๒๕๖๓

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด ใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้และแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีการทำกิจกรรมด้วยการลงมือปฏิบัติเพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ ซึ่งในปีการศึกษา ๒๕๖๑ เป็นต้นไปนี้โรงเรียนจะต้องใช้หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๑ นี้ มีผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมที่ครอบคลุมเนื้อหาบางส่วนที่ปรากฏตามตัวชี้วัดรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ โดยเมื่อผู้เรียนเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ทั้ง ๖ เล่ม ครบทุกชั้นปีในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ แล้วจะสามารถบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามตัวชี้วัดของรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ได้ และในขณะเดียวกันก็สามารถต่อยอดเนื้อหาจากรายวิชาพื้นฐานไปสู่เนื้อหาในรายวิชาเพิ่มเติมได้โดยไม่ต้องเสียเวลาเรียนซ้ำซ้อน ทั้งนี้ หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๑ นี้ มีเนื้อหาที่จำเป็นที่ต้องเรียน ประกอบด้วยเรื่องเซต ตรรกศาสตร์ และจำนวนจริง ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญและเพียงพอสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ หรือประกอบอาชีพในสาขาที่ใช้วิทยาศาสตร์เป็นฐาน เช่น แพทย์ ทันตแพทย์ สัตวแพทย์ เทคโนโลยีชีวภาพ วิศวกรรม สถาปัตยกรรม เศรษฐศาสตร์ พาณิชยศาสตร์ ฯลฯ โดยเน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหาเชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง ตลอดจนมีกิจกรรมที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมทั้งสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศ

การจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการอิสระ คณาจารย์ทั้งหลาย รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชนจึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำอธิบายรายวิชา

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๑**
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ภาคเรียนที่ ๑ **เวลา ๑๐๐ ชั่วโมง** **จำนวน ๒.๕ หน่วยกิต**

ศึกษา พร้อมทั้งฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาของสาระ ดังนี้

เซต เซต การดำเนินการระหว่างเซต การแก้ปัญหาโดยใช้เซต

ตรรกศาสตร์ ประพจน์ การเชื่อมประพจน์ การหาค่าความจริงของประพจน์ การสร้างตารางค่าความจริง รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน สัจนิรันดร์ การอ้างเหตุผล ประโยคเปิด ตัวบ่งปริมาณ ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียว สมมูลและนิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

จำนวนจริง จำนวนจริง ระบบจำนวนจริง พหุนามตัวแปรเดียว การแยกตัวประกอบของพหุนาม สมการพหุนามตัวแปรเดียว เศษส่วนของพหุนาม สมการเศษส่วนของพหุนาม การไม่เท่ากันของจำนวนจริง อสมการพหุนามตัวแปรเดียว ค่าสัมบูรณ์ สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ของพหุนามตัวแปรเดียว

โดยจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์

การใช้สื่อ อุปกรณ์ เทคโนโลยี และแหล่งข้อมูล และนำประสบการณ์ ตลอดจนทักษะและกระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีความรอบคอบ และมีวิจารณญาณ

การวัดผลประเมินผล ใช้วิธีการที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัด

ผลการเรียนรู้

๑. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเซต ในการสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
๒. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับตรรกศาสตร์เบื้องต้น ในการสื่อสาร สื่อความหมาย และอ้างเหตุผล
๓. เข้าใจจำนวนจริง และใช้สมบัติของจำนวนจริงในการแก้ปัญหา
๔. แก้สมการและอสมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
๕. แก้สมการและอสมการเศษส่วนของพหุนามตัวแปรเดียว และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
๖. แก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ของพหุนามตัวแปรเดียว และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

รวมทั้งหมด ๖ ผลการเรียนรู้

แนะนำการใช้หนังสือเรียน

ส่วนนี้เป็นส่วนแนะนำโครงสร้างของหนังสือเรียนเพื่อการใช้หนังสือเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ

ในหนังสือเล่มนี้จะแบ่งบทเรียนเป็น 3 บท โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

“ .... ”

ส่วนนำของบท
เกริ่นนำบทด้วยข้อมูลที่น่าสนใจ รวมถึงการนำไปใช้ในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการเรียนเนื้อหาในบท

จุดมุ่งหมาย
เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

จุดมุ่งหมาย

ความรู้ก่อนหน้า
ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

เสริมสมอง
เกร็ดความรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เช่น ประวัตินักคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง การเชื่อมโยงเนื้อหาในบทกับวิชาอื่น

เสริมสมอง

กิจกรรม
กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creativity and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)

กิจกรรม

เทคโนโลยี

โจทย์ที่มีไอคอนนี้สามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคิดได้ โดยอาจใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรมสำเร็จรูปในคอมพิวเตอร์ โปรแกรมประยุกต์ในโทรศัพท์สมาร์ตโฟน การค้นหาข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต และอื่น ๆ ตามความเหมาะสม

โจทย์ท้าทาย

โจทย์ที่มีไอคอนนี้เป็นโจทย์ที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าโจทย์แบบฝึกหัดทั่วไป เพื่อท้าทายความสามารถของนักเรียนที่ต้องการพัฒนาทักษะเพิ่มเติมนอกเหนือจากการเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท

แบบฝึกหัด

โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของตนเองได้

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทแบ่งประเภทได้เป็น

- โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียนจบบท มีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท โดยจะมีแถบสี
- โจทย์ท้าทาย
- โจทย์เพื่อฝึกทักษะ ที่มีความน่าสนใจ โดยจะไม่มีแถบสีและไม่มีไอคอนหน้าเลขข้อ

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ....
....

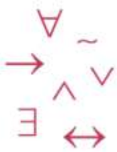
2. ....
....

3. ....
....

บทที่ 1 จะใช้สี   บทที่ 2 จะใช้สี   บทที่ 3 จะใช้สี

สารบัญ

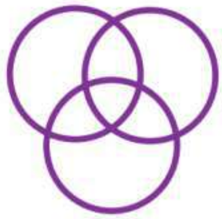
บทที่ 1 – 2



สารบัญ

บทที่ 3

บทที่ 1 | เซต



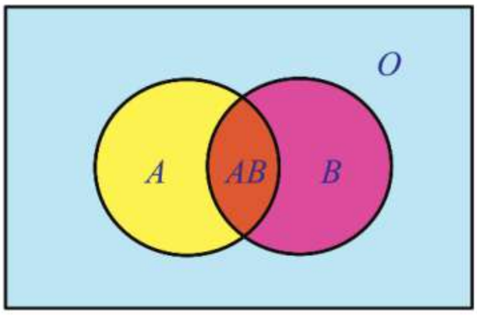
จุดมุ่งหมาย

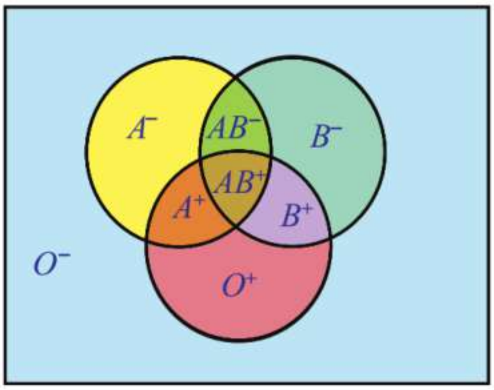
1. ใช้สัญลักษณ์เกี่ยวกับเซต
2. หาเพาเวอร์เซตของเซตจำกัด
3. หาผลการดำเนินการของเซต
4. ใช้แผนภาพเวนน์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต
5. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเซตในการแก้ปัญหา

บทที่ 1

เซต

การจำแนกหมู่เลือดด้วยระบบ ABO จะจำแนกได้ 4 หมู่ ได้แก่ เลือดหมู่ A, B, AB และ O ตามชนิดของแอนติเจน (antigen) 2 ชนิด ซึ่งปรากฏบนผิวของเซลล์เม็ดเลือดแดง ได้แก่ แอนติเจน A และแอนติเจน B ซึ่งแต่ละคนอาจจะมีหรือไม่มีแอนติเจนชนิดใดชนิดหนึ่งก็ได้ ถ้ามีแอนติเจน A อย่างเดียว เรียกว่าเลือดหมู่ A ถ้ามีแอนติเจน B อย่างเดียว เรียกว่าเลือดหมู่ B ถ้ามีทั้งแอนติเจน A และ B เรียกว่าเลือดหมู่ AB และถ้าไม่มีทั้งแอนติเจน A และ B เรียกว่าเลือดหมู่ O สามารถเขียนแผนภาพ เพื่ออธิบายหมู่เลือดทั้ง 4 หมู่ดังกล่าว ได้ดังรูปทางด้านขวา





นอกจากนี้ยังมีการจำแนกหมู่เลือดด้วยระบบ Rh ซึ่งมีความสำคัญมาก ในการให้และรับเลือดจากผู้หนึ่งไปยังอีกผู้หนึ่ง ซึ่งพิจารณาจากแอนติเจนบนผิวของเซลล์เม็ดเลือดแดงอีกชนิดหนึ่ง เรียกว่า แอนติเจน Rh ถ้ามีแอนติเจน Rh แสดงว่ามีเลือดหมู่ Rh^+ ถ้าไม่มีแอนติเจน Rh แสดงว่ามีเลือดหมู่ Rh^- ในการบริจาคเลือดจะได้รับการตรวจหมู่เลือดทั้ง 2 ระบบ จึงอาจพบถุงบริจาคเลือดระบุเป็น $A^+, B^+, AB^+, O^+, A^-, B^-, AB^-$ และ O^- ซึ่งสามารถเขียนแผนภาพ ได้ดังรูปทางด้านซ้าย

ในชีวิตประจำวันมักพบการจัดกลุ่มสิ่งของอยู่ทั่วไป เช่น การจำแนกหมู่เลือดดังที่กล่าวข้างต้น การจัดกลุ่มของหนังสือแยกตามประเภทของหนังสือในห้องสมุด การจัดกลุ่มสิ่งของเหล่านี้ ทำให้เกิดความเป็นระเบียบ ความชัดเจน และมีความสะดวกต่อการใช้งาน

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับจำนวนและสมการในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

goo.gl/ZHStZ6

1.1 เซต

ในวิชาคณิตศาสตร์ ใช้คำว่า **เซต (set)** ในการกล่าวถึงกลุ่มของสิ่งต่าง ๆ และเมื่อกล่าวถึงกลุ่มใดแล้วสามารถทราบได้แน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่ม และสิ่งใดไม่อยู่ในกลุ่ม เช่น

เซตของชื่อวันในสัปดาห์

เซตของคำตอบของสมการ $x^2 - 4 = 0$

เรียก สิ่งที่อยู่ในเซต ว่า **สมาชิก (element or member)** เช่น

เซตของชื่อวันในสัปดาห์ มีสมาชิก ได้แก่ จันทร์ อังคาร พุธ พฤหัสบดี ศุกร์ เสาร์ และอาทิตย์

เซตของคำตอบของสมการ $x^2 - 4 = 0$ มีสมาชิก ได้แก่ -2 และ 2

การเขียนแสดงเซตอาจเขียนได้สองแบบดังนี้

1) แบบแจกแจงสมาชิก เขียนสมาชิกทุกตัวของเซตลงในวงเล็บปีกกาและใช้เครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว เช่น

เซตของจำนวนนับที่น้อยกว่า 5 เขียนได้ดังนี้ $\{1, 2, 3, 4\}$

โดยทั่วไปจะแทนเซตด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C และแทนสมาชิกของเซตด้วยตัวพิมพ์เล็ก เช่น a, b, c

ตัวอย่างเช่น $A = \{a, b, c\}$ จะแทนเซต A ซึ่งมีสมาชิก 3 ตัว ได้แก่ a, b และ c

ให้ B แทนเซตของจำนวนเต็มที่ยกกำลังสองแล้วได้ 16 เขียนเซต B แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้

$B = \{-4, 4\}$ อ่านว่า B เป็นเซตที่มี -4 และ 4 เป็นสมาชิก

ในกรณีที่สมาชิกของเซตมีจำนวนมาก การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกนั้นจะใช้จุดสามจุด (…) เพื่อแสดงว่ามีสมาชิกอื่น ๆ ซึ่งเป็นที่เข้าใจกันทั่วไปว่ามีอะไรบ้างอยู่ในเซตนั้น เช่น เซต $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ สัญลักษณ์ "…" แสดงว่ามี 4, 5, 6, 7 และ 8 เป็นสมาชิกของเซตนี้ด้วย

ให้ C เป็นเซตของพยัญชนะในภาษาไทย เขียนเซต C แบบแจกแจงสมาชิก ได้ดังนี้

$$C = \{\text{ก}, \text{ข}, \text{ฃ}, \ldots, \text{ฮ}\}$$

ให้ D เป็นเซตของจำนวนคู่ เขียนเซต D แบบแจกแจงสมาชิก ได้ดังนี้

$$D = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก ต้องเขียนสมาชิกแต่ละตัวเพียงครั้งเดียวเท่านั้น เช่น
ให้ E เป็นเซตของเลขโดดที่ปรากฏในจำนวน 121 เขียนเซต E แบบแจกแจงสมาชิก ได้ดังนี้

$$E = \{1, 2\}$$

2) แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก ใช้ตัวแปรแทนสมาชิกแล้วบรรยายสมบัติหรือเงื่อนไข เช่น

$$F = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนนับที่มีหลักเดียว}\}$$

อ่านว่า F เป็นเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิก x โดยที่ x เป็นจำนวนนับที่มีหลักเดียว
เครื่องหมาย " | " แทนคำว่า "โดยที่" ซึ่งอาจจะใช้ " : " แทน

ส่วนเซต B และ C ในตัวอย่างที่กล่าวมาแล้ว สามารถนำมาเขียนแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก โดยเขียนได้เป็น

$$B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } x^2 = 16\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ เป็นพยัญชนะในภาษาไทย}\}$$

กำหนดให้ $G = \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$ จะเห็นว่า 2 และ $\frac{1}{2}$ ต่างก็เป็นสมาชิกของเซต G

คำว่า "เป็นสมาชิกของ" หรือ "อยู่ใน" เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$\in$" เช่น

2 เป็นสมาชิกของเซต G หรือ 2 อยู่ในเซต G เขียนแทนด้วย $2 \in G$

คำว่า "ไม่เป็นสมาชิกของ" เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$\notin$" เช่น

$\frac{1}{3}$ ไม่เป็นสมาชิกของเซต G หรือ $\frac{1}{3}$ ไม่อยู่ในเซต G เขียนแทนด้วย $\frac{1}{3} \notin G$

ตัวอย่างที่ 1

ให้ $A=\{0,1,2\}$ จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

1) $0 \in A$
2) $\{0\} \in A$
3) $\{1,2\} \notin A$

วิธีทำ A เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิก 3 ตัว ได้แก่ 0, 1 และ 2 ดังนั้น

1) เป็นจริง
2) เป็นเท็จ
3) เป็นจริง ■

เรียกเซตที่ไม่มีสมาชิก ว่า **เซตว่าง (empty set or null set)**
เขียนแทน เซตว่าง ด้วยสัญลักษณ์ “{ }” หรือ “$\varnothing$” เช่น
ให้ $A = \{\, x \mid x$ เป็นจำนวนจริง และ $x+1=x \,\}$ จะได้ $A=\varnothing$

การหาจำนวนสมาชิกของเซตที่มีสมาชิกไม่มากนัก สามารถทำได้โดยการเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก แล้วแจงนับจำนวนสมาชิกทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 2

จงหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

1) $\varnothing$
2) $A = \{\, x \mid x$ เป็นพยัญชนะในภาษาไทย$\}$
3) $B = \{\, x \mid x$ เป็นจำนวนคี่บวกที่มีสองหลัก$\}$

วิธีทำ
1) เนื่องจากเซตว่างไม่มีสมาชิก จะได้ว่าเซตว่างมีสมาชิก 0 ตัว
2) เขียนเซต A แบบแจกแจงสมาชิก ดังนี้
   $A = \{$ ก, ข, ฃ, … , ฮ $\}$
   จะได้ว่า A มีจำนวนสมาชิก 44 ตัว
3) เขียนเซต B แบบแจกแจงสมาชิก ดังนี้
   $B = \{11, 13, 15, \ldots, 99\}$
   จากการแจงนับสมาชิกในเซต B จะได้ว่า B มีจำนวนสมาชิก 45 ตัว ■

เซตจำกัดและเซตอนันต์

เซตที่มีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ หรือศูนย์ เรียกว่า **เซตจำกัด (finite set)** ตัวอย่างของเซตจำกัด เช่น

$\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$

$\{x \mid x$ เป็นชื่อจังหวัดในประเทศไทย$\}$

$\{\ \}$

เซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด เรียกว่า **เซตอนันต์ (infinite set)** ตัวอย่างของเซตอนันต์ เช่น

$\{1, 2, 3, \ldots\}$

$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$

$\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$

เสริมสมอง : Georg Cantor

Georg Cantor (ค.ศ. 1845–1918) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ผู้ได้รับการยกย่องว่าเป็นบิดาของทฤษฎีเซต (set theory) เป็นคนแรกที่ศึกษาเซตอนันต์ โดยจัดจำแนกเซตอนันต์ออกเป็นเซตนับได้ (countable set) และเซตนับไม่ได้ (uncountable set) รวมทั้งพิสูจน์ว่าเซตของจำนวนจริงเป็นเซตนับไม่ได้

เอกภพสัมพัทธ์

ในการเขียนเซตจะต้องกำหนดเซตที่บ่งบอกถึงขอบเขตของสิ่งที่จะพิจารณา เรียกเซตนี้ว่า **เอกภพสัมพัทธ์ (relative universe)** ซึ่งมักเขียนแทนด้วย U โดยมีข้อตกลงว่า เมื่อกล่าวถึงสมาชิกของเซตใด ๆ จะไม่กล่าวถึงสิ่งอื่นที่นอกเหนือจากสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์

กำหนดให้ U คือ เซตของจำนวนจริง

$A = \{x \mid x^2 = 4\}$

และ $B = \{x \mid x^3 = -1\}$

จะได้ $A = \{-2, 2\}$ และ $B = \{-1\}$

แต่ถ้ากำหนดให้ U คือ เซตของจำนวนเต็มบวก

จะได้ $A = \{2\}$ และ $B = \varnothing$

เอกภพสัมพัทธ์ที่พบบ่อย ได้แก่

$\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ

$\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม

$\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

$\mathbb{Q}'$ แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ

$\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

บางครั้งเพื่อความสะดวก จะระบุเอกภพสัมพัทธ์ลงในการเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข เช่น

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$$

จะได้ว่า $A = \{2\}$ แต่ $B = \{-2, 2\}$

หมายเหตุ ถ้ากล่าวถึงเซตของจำนวน และไม่ได้กำหนดว่าเซตใดเป็นเอกภพสัมพัทธ์ ในระดับชั้นนี้ให้ถือว่าเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง

เซตที่เท่ากัน

กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 0, 3, 2\}$ เซตทั้งสองนี้มีสมาชิกเหมือนกันทุกตัวแม้ลำดับของสมาชิกจะต่างกันก็ถือว่าเซตทั้งสองคือเซตเดียวกัน หรือกล่าวได้ว่า เซต A กับ เซต B เป็น**เซตที่เท่ากัน (equal sets or identical sets)** หรือเซต A เท่ากับ เซต B เขียนแทนด้วย $A = B$

บทนิยาม 1

เซต A เท่ากับ เซต B หมายถึง สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A

เซต A ไม่เท่ากับ เซต B หมายความว่า มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต A ที่ไม่ใช่สมาชิกของเซต B หรือมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต B ที่ไม่ใช่สมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $A \neq B$ เช่น

$A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2\}$

จะเห็นว่า $3 \in A$ แต่ $3 \notin B$

ดังนั้น $A \neq B$

ตัวอย่างที่ 3

จงพิจารณาว่าเซตในข้อใดบ้างเท่ากันและเซตในข้อใดบ้างไม่เท่ากัน

1) $A = \{1, 2, 3\}$

   $B = \{3, 2, 1\}$

2) $C = \{p, o, s, t\}$

   $D = \{s, t, o, p\}$

3) $E = \{i, d, e, a\}$

   $F = \{a, i, d\}$

วิธีทำ 1) $A = B$ เพราะสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A

2) $C = D$ เพราะสมาชิกทุกตัวของเซต C เป็นสมาชิกของเซต D และสมาชิกทุกตัวของเซต D เป็นสมาชิกของเซต C

3) $E \neq F$ เพราะ $e \in E$ แต่ $e \notin F$ ■

ตัวอย่างที่ 4

ให้ $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนคู่$\}$, $B = \{x \mid x$ เป็นจำนวนคี่บวก$\}$ และ $C = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
จงพิจารณาว่าเซตคู่ใดบ้างเท่ากันและเซตคู่ใดบ้างไม่เท่ากัน

วิธีทำ เขียนเซต A และ B แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้

$A = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ และ $B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

จะได้ $A \neq B$ เพราะมีสมาชิกของเซต A ที่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B เช่น $0 \in A$ แต่ $0 \notin B$

$B = C$ เพราะสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต C และสมาชิกทุกตัวของเซต C เป็นสมาชิกของเซต B

และ $A \neq C$ เพราะ $A \neq B$ แต่ $B = C$ ■

ตัวอย่างที่ 5

ให้ $S = \{2, 4, 6, \dots, 16\}$ และ $T = \{x \mid x$ เป็นจำนวนคู่บวกที่น้อยกว่า $20\}$
จงพิจารณาว่าเซต S เท่ากับเซต T หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า $18 \in T$ แต่ $18 \notin S$
ดังนั้น $S \neq T$ ■

แบบฝึกหัด 1.1ก

1. จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก
   1) เซตของสระในภาษาอังกฤษ
   2) เซตของจำนวนคู่บวกที่น้อยกว่า 10
   3) เซตของจำนวนเต็มบวกที่มีสองหลัก
   4) เซตของจำนวนเต็มที่มากกว่า 100
   5) เซตของจำนวนเต็มลบที่มากกว่า -100
   6) $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 3 และน้อยกว่า $10\}$
   7) $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0 กับ $1\}$
   8) เซตของจำนวนเต็มลบที่มีค่ามากกว่า 5
   9) เซตของจำนวนเต็มที่ยกกำลังสองแล้วได้ 196
   10) เซตของชื่อจังหวัดในประเทศไทยที่ขึ้นต้นด้วยพยัญชนะ "ช"

2. จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
   1) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
   2) $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
   3) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$
   4) $\{10, 20, 30, \dots\}$

3. จงบอกจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้
   1) $A = \{1234\}$
   2) $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
   3) $C = \{a, b, c, de, f, gh, ijk\}$
   4) $D = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 10 และ $20\}$
   5) $E = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกและน้อยกว่า $0\}$

4. ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ
   1) $\{a\} \in A$
   2) $\{b, c\} \notin A$
   3) $\varnothing \in A$

5. เซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตว่าง
   1) $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 4\}$
   2) $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 3 แต่น้อยกว่า $10\}$
   3) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\}$
   4) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$
   5) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$

6. เซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตจำกัด เซตใดเป็นเซตอนันต์
   1) $\{x \mid x$ เป็นจำนวนคู่$\}$
   2) $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$
   3) $\{x \mid x = \frac{1}{n}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}\}$
   4) $\{x \mid x = \frac{1}{n}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $n < 999\}$
   5) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3$ หาร x ลงตัว$\}$
   6) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 200$ และ 3 หาร x ลงตัว$\}$

7. จงพิจารณาว่าเซตในข้อใดบ้างเท่ากันและเซตในข้อใดบ้างไม่เท่ากัน

1) $A = \{0, 1, 3, 7\}$

   $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 10\}$

2) $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนคู่ที่น้อยกว่า $10\}$

   $B = \{2, 4, 6, 8\}$

3) $A = \{7, 14, 21, \ldots, 343\}$

   $B = \{x \mid x = 7n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $n < 50\}$

4) $A = \{x \mid x = 1 - \frac{1}{n}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}\}$

   $B = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$

5) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 36\}$

   $B = \{6\}$

8. ให้ $A = \{x \mid x$ เป็นพยัญชนะในคำว่า “กรรมกร”$\}$

   $B = \{x \mid x$ เป็นพยัญชนะในคำว่า “มรรคา”$\}$

   $C = \{x \mid x$ เป็นพยัญชนะในคำว่า “มกราคม”$\}$

   $D = \{x \mid x$ เป็นพยัญชนะในคำว่า “รากไม้”$\}$

   จงพิจารณาว่าเซตคู่ใดบ้างเท่ากัน

สับเซต

กำหนดให้ $A=\{7,8\}$ และ $B=\{1,3,5,7,8\}$ สมาชิกทั้งหมดของเซต A คือ 7 และ 8 ซึ่งต่างก็เป็นสมาชิกของเซต B ในกรณีเช่นนี้กล่าวได้ว่าเซต A เป็น**สับเซต (subset)** ของเซต B

บทนิยาม 2

เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B

เซต A เป็นสับเซตของเซต B เขียนแทนด้วย $A\subset B$

เซต A ไม่เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต A ที่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B โดยเซต A ไม่เป็นสับเซตของเซต B เขียนแทนด้วย $A\not\subset B$

หมายเหตุ 1) เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวเอง นั่นคือ ถ้าเซต A เป็นเซตใด ๆ แล้ว $A\subset A$
2) เซตว่างเป็นสับเซตของเซตทุกเซต นั่นคือ ถ้าเซต A เป็นเซตใด ๆ แล้ว $\varnothing\subset A$

ตัวอย่างที่ 6

จากเซต A และ B ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า เซต A เป็นสับเซตของเซต B หรือไม่ และเซต B เป็นสับเซตของเซต A หรือไม่

1) $A=\{1\}$ และ $B=\{0,1,2\}$
2) $A=\{3,4,5,6\}$ และ $B=\{0,1,2,3,4,5\}$
3) $A=\{1,3,5,7,9,\dots\}$ และ $B=\{x\mid x=2n-1$ เมื่อ $n\in\mathbb{N}\}$

วิธีทำ 1) จะเห็นว่า สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B ดังนั้น $A\subset B$
และมี 0 เป็นสมาชิกของเซต B แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A ดังนั้น $B\not\subset A$

2) จะเห็นว่า มี 6 เป็นสมาชิกของเซต A แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B ดังนั้น $A\not\subset B$
และมี 0 เป็นสมาชิกของเซต B แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A ดังนั้น $B\not\subset A$

3) เขียนเซต B แบบแจกแจงสมาชิก ได้ดังนี้ $B=\{1,3,5,7,9,\dots\}$
จะเห็นว่า สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B ดังนั้น $A\subset B$
และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A ดังนั้น $B\subset A$ ■

จากการสังเกต ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset A$ แล้ว $A = B$
และ ถ้า $A = B$ แล้ว $A \subset B$ และ $B \subset A$
ดังนั้น $A \subset B$ และ $B \subset A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$

ตัวอย่างที่ 7

กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ จงหาสับเซตที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเซต A

วิธีทำ สับเซตที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเซต A คือเซตทั้งหมดที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของเซต A ได้แก่

1) $\{1\}$ 2) $\{2\}$
3) $\{3\}$ 4) $\{1, 2\}$
5) $\{1, 3\}$ 6) $\{2, 3\}$
7) $\{1, 2, 3\}$ หรือ A 8) $\varnothing$ ■

เพาเวอร์เซต

เรียกเซตของสับเซตทั้งหมดของเซต A ว่า **เพาเวอร์เซต (power set)** ของเซต A เขียนแทนด้วย $P(A)$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$ แล้ว $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

ถ้า $B = \{a, b, c, d\}$ แล้ว $P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\},$
$\{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\},$
$\{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$

ในตัวอย่างข้างต้น A มีสมาชิก 3 ตัว $P(A)$ มีสมาชิก 8 ตัว และ
B มีสมาชิก 4 ตัว $P(B)$ มีสมาชิก 16 ตัว

ข้อสังเกต ถ้า A มีสมาชิก n ตัว จะได้ว่า $P(A)$ มีสมาชิก 2^n ตัว

แบบฝึกหัด 1.1ข

1. ให้ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ
   1) $6 \in A$
   2) $2 \subset A$
   3) $\{8\} \in A$
   4) $\varnothing \subset A$
   5) $\{2, 4\} \subset A$
   6) $\{4, 6, 8\} \not\subset A$

2. ให้ $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนคู่บวก และ $x - 5 < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 8\}$ และ $C = \{2, 4\}$ จงพิจารณาว่าเซตคู่ใดบ้างที่มีความสัมพันธ์เป็นสับเซต

3. กำหนดให้ $X = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ และ $Y = \{x \mid x = 2n+1$ เมื่อ $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ
   1) $X \subset Y$
   2) $Y \subset X$
   3) $X = Y$

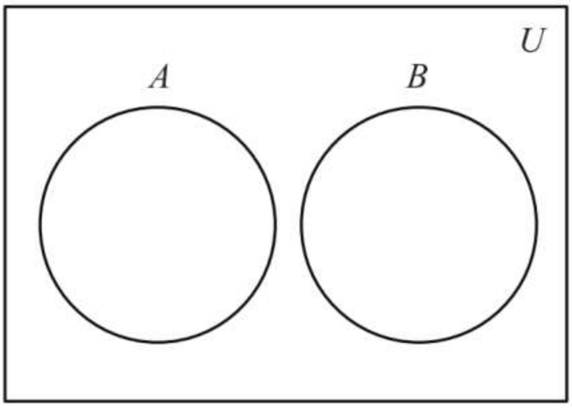
4. จงหาสับเซตทั้งหมดของเซตต่อไปนี้
   1) $\{1\}$
   2) $\{1, 2\}$
   3) $\{-1, 0, 1\}$
   4) $\{x, y\}$
   5) $\{a, b, c\}$
   6) $\varnothing$

5. จงหาเพาเวอร์เซตของแต่ละเซตต่อไปนี้
   1) $\{5\}$
   2) $\{0, 1\}$
   3) $\{2, 3, 4\}$
   4) $\varnothing$

แผนภาพเวนน์

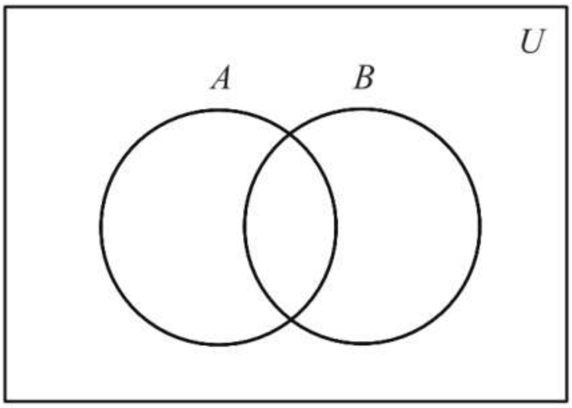
การเขียนแผนภาพแสดงเซตจะช่วยให้ความคิดเกี่ยวกับเซตชัดเจนขึ้น ในหนังสือเรียนเล่มนี้จะเรียกแผนภาพแสดงเซตว่า **แผนภาพเวนน์ (Venn diagram)** การเขียนแผนภาพมักจะแทนเอกภพสัมพัทธ์ U ด้วยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือรูปปิดใด ๆ ส่วนเซตอื่น ๆ ซึ่งเป็นสับเซตของ U นั้น อาจเขียนแทนด้วยวงกลม วงรี หรือรูปปิดใด ๆ

กำหนดให้ U แทนเอกภพสัมพัทธ์ และ A, B เป็นสับเซตของ U พิจารณาแผนภาพเวนน์ ดังนี้



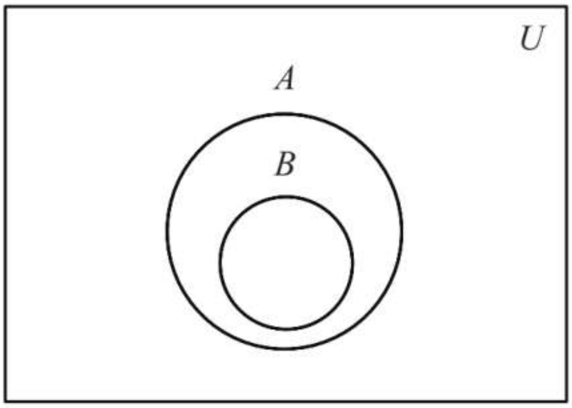
รูปที่ 1

จากรูป
เซต A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน
เรียกเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลยว่า
เซตไม่มีส่วนร่วม (disjoint sets)



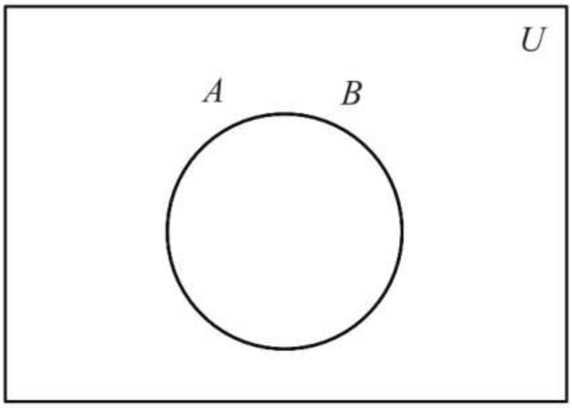
รูปที่ 2

จากรูป
เซต A และ B มีสมาชิกบางส่วนร่วมกัน
นั่นคือ $A \not\subset B$ และ $B \not\subset A$



รูปที่ 3

จากรูป
สมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A
นั่นคือ $B \subset A$

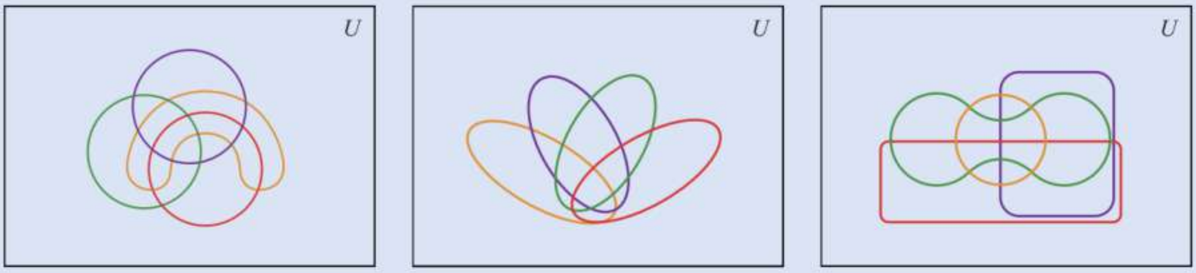


รูปที่ 4

จากรูป
สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B
และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A
นั่นคือ $A = B$

เสริมสมอง : แผนภาพสำหรับ 4 เซต

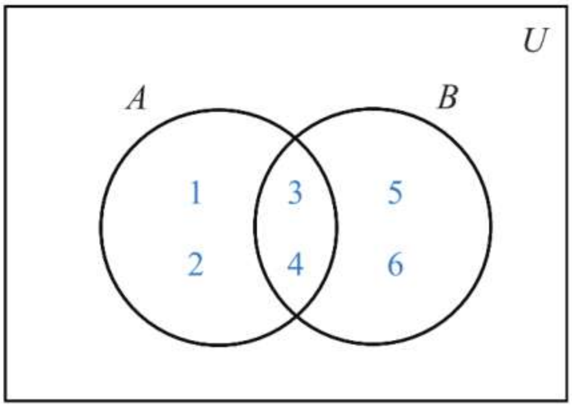
แผนภาพสำหรับ 4 เซต แบ่งเอกภพสัมพัทธ์ออกเป็นบริเวณได้มากที่สุด 16 บริเวณ ซึ่งอาจเขียนแผนภาพได้ดังรูป



ตัวอย่างที่ 8

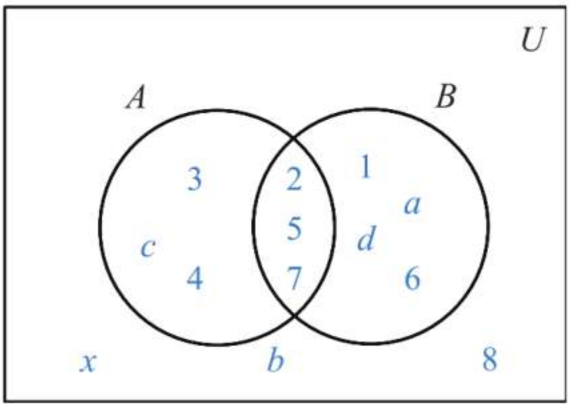
กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ จงเขียนแผนภาพเวนน์แสดงเซตทั้งสอง

วิธีทำ จากสิ่งที่กำหนดให้ เซต A และ B มีสมาชิกร่วมกันคือ 3 และ 4
เขียนแผนภาพเวนน์แสดงเซต A และ B ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 9

กำหนดแผนภาพดังนี้



จงหา

1) จำนวนสมาชิกในเซต A
2) จำนวนสมาชิกที่อยู่ทั้งในเซต A และ B
3) สมาชิกที่ไม่อยู่ในเซต A และไม่อยู่ในเซต B

วิธีทำ 1) จากแผนภาพ จะได้ $A = \{c, 2, 3, 4, 5, 7\}$ ดังนั้น เซต A มีสมาชิก 6 ตัว

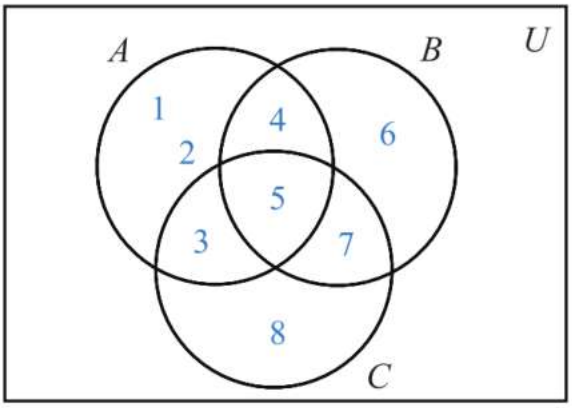
2) สมาชิกที่อยู่ทั้งในเซต A และ B คือ 2, 5 และ 7 มีทั้งหมด 3 ตัว

3) สมาชิกที่ไม่อยู่ในเซต A และไม่อยู่ในเซต B คือ x, b และ 8

ตัวอย่างที่ 10

กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ และ $C = \{3, 5, 7, 8\}$
จงเขียนแผนภาพเวนน์แสดงเซตทั้งสาม

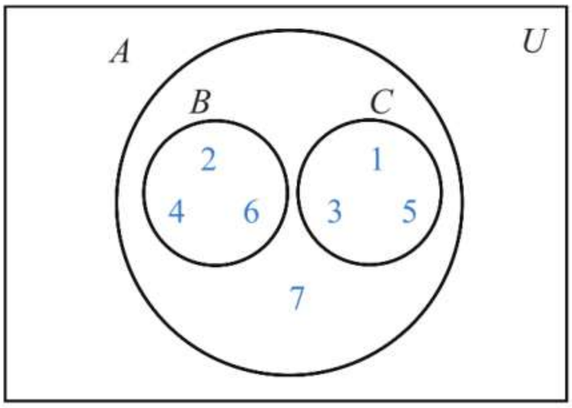
วิธีทำ จากสิ่งที่กำหนดให้ จะได้ 5 เป็นสมาชิกของเซต A, B และ C
4 เป็นสมาชิกของเซต A และ B แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต C
3 เป็นสมาชิกของเซต A และ C แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B
7 เป็นสมาชิกของเซต B และ C แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A
เขียนแผนภาพเวนน์แสดงเซต A, B และ C ได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 11

กำหนดให้ U เป็นเซตของจำนวนนับ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ และ $C = \{1, 3, 5\}$ จงเขียนแผนภาพเวนน์แสดงเซตทั้งสาม

วิธีทำ จากสิ่งที่กำหนดให้ จะได้ $B \subset A, C \subset A$ แต่เซต B และ C ไม่มีสมาชิกร่วมกัน เขียนแผนภาพเวนน์แสดงเซต A, B และ C ได้ดังนี้



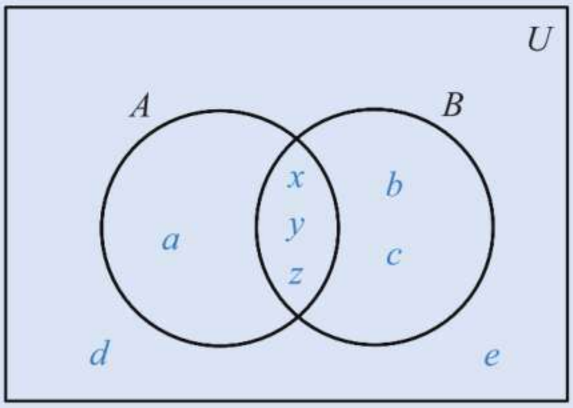
■

แบบฝึกหัด 1.1ค

1. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$A = \{2, 4, 6\}$
$B = \{1, 3, 5, 9\}$
จงเขียนแผนภาพเวนน์แสดงเซต A และ B

2. จงเขียนแผนภาพเวนน์แสดงเซตต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ U เป็นเซตของจำนวนนับ
   1) $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$
      $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
   2) $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$
      $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
      $C = \{1, 3, 5\}$
   3) $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$
      $B = \{1, 3, 5\}$
      $C = \{2, 5, 6\}$

3. กำหนดแผนภาพดังนี้



จงหา
   1) จำนวนสมาชิกที่อยู่ในเซต A แต่ไม่อยู่ในเซต B
   2) จำนวนสมาชิกที่ไม่อยู่ในเซต A และไม่อยู่ในเซต B
   3) จำนวนสมาชิกที่อยู่ทั้งในเซต A และ B

1.2 การดำเนินการระหว่างเซต

จะสามารถสร้างเซตใหม่จากเซตที่กำหนดให้ ซึ่งมีเอกภพสัมพัทธ์เดียวกันได้ดังนี้

1.2.1 อินเตอร์เซกชัน

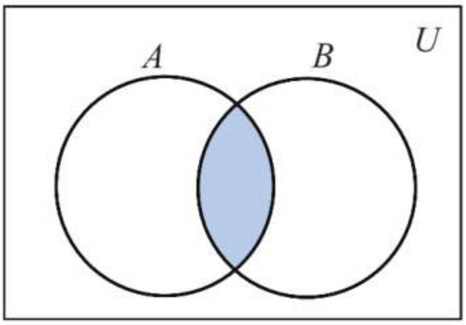
เมื่อกำหนด $A=\{1, 2, 3, 4\}$ และ $B=\{2, 4, 6, 8\}$ สร้างเซต C ที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของทั้งเซต A และ B ได้ดังนี้ $C=\{2, 4\}$

จะเห็นว่า สมาชิกแต่ละตัวของเซต C เป็นสมาชิกของทั้งเซต A และ B เรียกเซต C ว่า **อินเตอร์เซกชัน (intersection)** ของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A\cap B$

บทนิยาม 3

$$A\cap B = \{x \mid x\in A \text{ และ } x\in B\}$$

อาจเขียนแสดง $A\cap B$ ได้ด้วยแผนภาพ ดังนี้



ส่วนที่แรเงาคือ $A\cap B$

รูปที่ 5

ตัวอย่างที่ 12

ให้ $A=\{0, 1, 2, 3\}$ และ $B=\{0, 3, 5\}$ จงหา $A\cap B$

วิธีทำ เซต A และ B มีสมาชิกร่วมกัน คือ 0 และ 3
ดังนั้น $A\cap B=\{0, 3\}$ ■

ตัวอย่างที่ 13

ให้ $A=\{0, 1, 2, 3\}$, $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ และ $C=\{0\}$ จงหา $A\cap B$, $A\cap C$ และ $B\cap C$

วิธีทำ เซต A และ B มีสมาชิกร่วมกัน คือ 0, 1, 2 และ 3
ดังนั้น $A\cap B=\{0, 1, 2, 3\}$
เซต A และ C มีสมาชิกร่วมกัน คือ 0
ดังนั้น $A\cap C=\{0\}$
เซต B และ C มีสมาชิกร่วมกัน คือ 0
ดังนั้น $B\cap C=\{0\}$ ■

ตัวอย่างที่ 14

ให้ $A=\{2, 3, 5, 7\}$ และ $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ จงหา $A\cap B$

วิธีทำ เซต A และ B มีสมาชิกร่วมกัน คือ 2, 3, 5 และ 7
ดังนั้น $A\cap B = \{2, 3, 5, 7\} = A$ ■

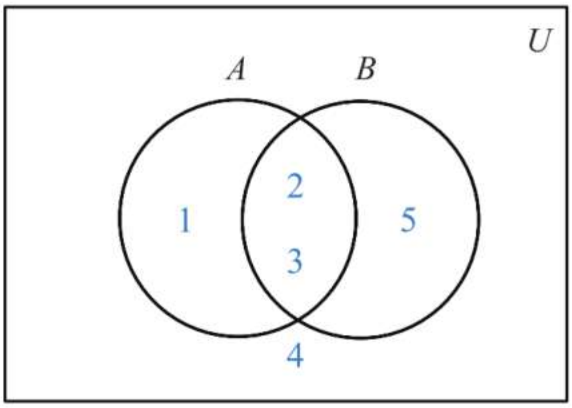
ตัวอย่างที่ 15

ให้ $A=\{0, 1, 2, 3\}$ และ $B=\{4, 5\}$ จงหา $A\cap B$

วิธีทำ เซต A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน
ดังนั้น $A\cap B=\varnothing$ ■

ตัวอย่างที่ 16

กำหนดแผนภาพดังนี้

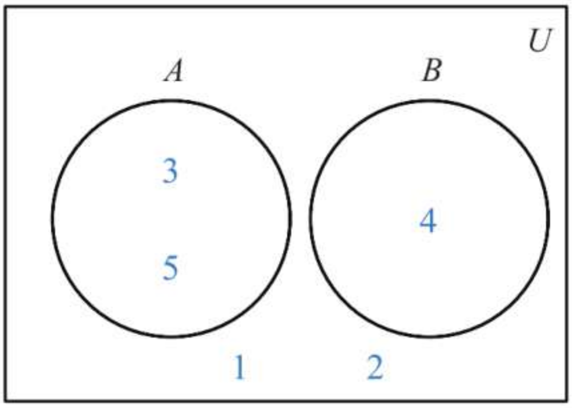


จงหา $A \cap B$

วิธีทำ จากแผนภาพ เซต A และ B มีสมาชิกร่วมกัน คือ 2 และ 3
ดังนั้น $A \cap B = \{2, 3\}$ ■

ตัวอย่างที่ 17

กำหนดแผนภาพดังนี้

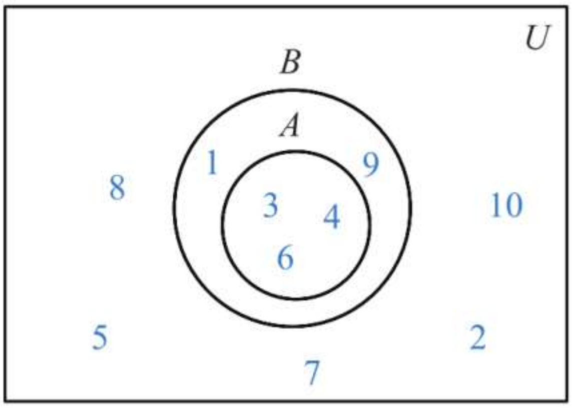


จงหา $A \cap B$

วิธีทำ จากแผนภาพ เซต A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน ดังนั้น $A \cap B = \varnothing$ ■

ตัวอย่างที่ 18

กำหนดแผนภาพดังนี้



จงหา $A \cap B$

วิธีทำ จากแผนภาพ เซต A และ B มีสมาชิกร่วมกัน คือ 3, 4 และ 6
ดังนั้น $A \cap B = \{3, 4, 6\}$

1.2.2 ยูเนียน

ให้ $A = \{2, 3, 4\}$ และ $B = \{3, 4, 8, 9\}$ สร้างเซต C ซึ่งเป็นเซตใหม่ โดยที่สมาชิกของเซต C เป็นสมาชิกของเซต A หรือเซต B หรือทั้งสองเซตได้ดังนี้

$$C = \{2, 3, 4, 8, 9\}$$

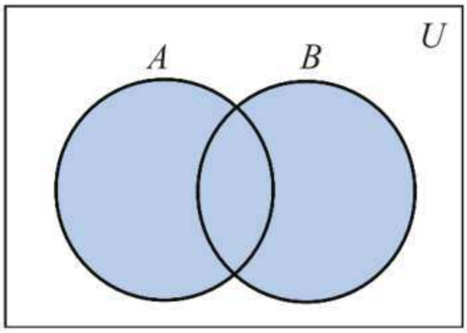
เรียกเซต C ว่า **ยูเนียน (union)** ของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \cup B$

บทนิยาม 4

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

หมายเหตุ ในทางคณิตศาสตร์ “หรือ” หมายถึง อย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่าง

อาจเขียนแสดง $A \cup B$ ได้ด้วยแผนภาพ ดังนี้



ส่วนที่แรเงาคือ $A \cup B$

รูปที่ 6

เสริมสมอง : Giuseppe Peano

Giuseppe Peano (ค.ศ. 1858 – 1932) นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลี เป็นคนแรกที่นำสัญลักษณ์มาใช้ในการศึกษาเรื่องเซต เช่น สัญลักษณ์แทนอินเตอร์เซกชัน ($\cap$) และยูเนียน ($\cup$)

ตัวอย่างที่ 19

ให้ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 3, 5, 7\}$ จงหา $A \cup B$

วิธีทำ $A \cup B$ เกิดจากการนำสมาชิกของเซต A และ B มาเขียนไว้ด้วยกัน
ดังนั้น $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$ ■

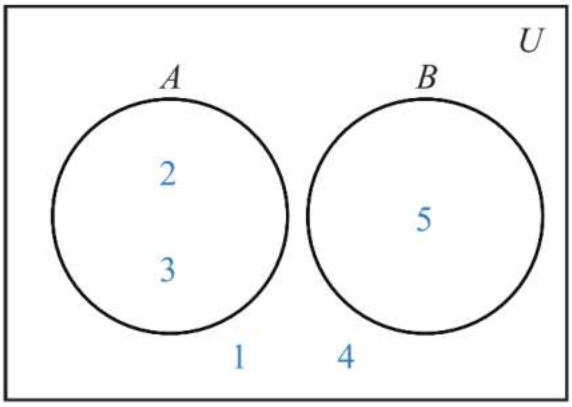
ตัวอย่างที่ 20

ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ จงหา $A \cup B$

วิธีทำ $A \cup B$ เกิดจากการนำสมาชิกของเซต A และ B มาเขียนไว้ด้วยกัน
ดังนั้น $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B$ ■

ตัวอย่างที่ 21

กำหนดแผนภาพดังนี้

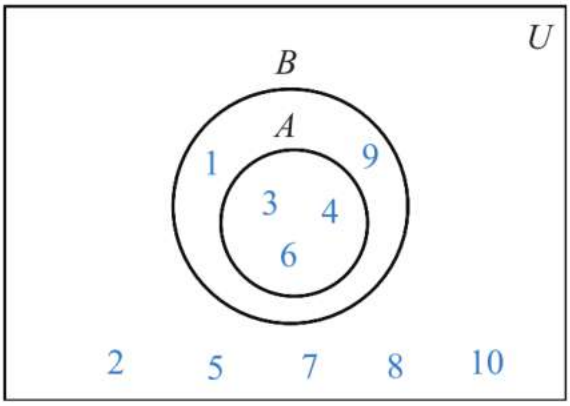


จงหา $A \cup B$

วิธีทำ จากแผนภาพ จะได้ $A \cup B = \{2, 3, 5\}$ ■

ตัวอย่างที่ 22

กำหนดแผนภาพดังนี้



จงหา $A \cup B$

วิธีทำ จากแผนภาพ จะได้ $A \cup B = \{1, 3, 4, 6, 9\} = B$ ■

1.2.3 คอมพลีเมนต์

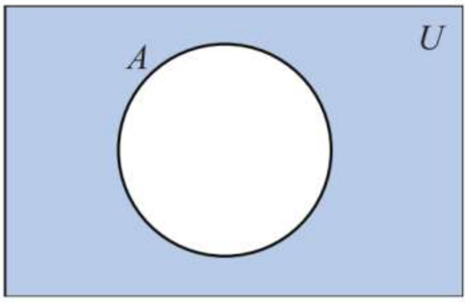
ให้ A เป็นเซตที่มี U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ เรียกเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นสมาชิกของ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A ว่า **คอมพลีเมนต์ (complement)** ของเซต A เมื่อเทียบกับ U หรือคอมพลีเมนต์ของเซต A เขียนแทนคอมพลีเมนต์ของเซต A ด้วย A'

บทนิยาม 5

$$A' = \{ x \mid x \in U \text{ และ } x \notin A \}$$

หมายเหตุ ในหนังสือบางเล่มอาจใช้สัญลักษณ์อื่นแทน A' เช่น $\bar{A}, A^c, \tilde{A}, C(A)$

อาจเขียนแสดง A' ได้ด้วยแผนภาพ ดังนี้



ส่วนที่แรเงาคือ A'
รูปที่ 7

ตัวอย่างที่ 23

ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $A = \{0, 2\}$ จงหา A'

วิธีทำ เนื่องจาก 1, 3, 4 และ 5 เป็นสมาชิกของ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A
ดังนั้น $A' = \{1, 3, 4, 5\}$ ■

ตัวอย่างที่ 24

ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{0, 2, 4\}$ และ $B = \{3, 4\}$ จงหา A' และ B'

วิธีทำ จะได้ $A' = \{1, 3\}$ และ $B' = \{0, 1, 2\}$ ■

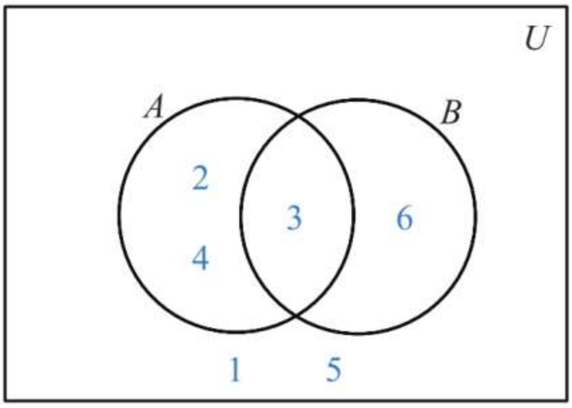
ตัวอย่างที่ 25

ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ และ $C = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ จงหา C'

วิธีทำ จะได้ $C' = \{1, 3, 5, \dots\}$ หรือ $C' = \{x \mid x \in U$ และ x เป็นจำนวนคี่$\}$ ■

ตัวอย่างที่ 26

กำหนดแผนภาพดังนี้



จงหา A' และ B'

วิธีทำ จากแผนภาพ จะได้ $A' = \{1, 5, 6\}$ และ $B' = \{1, 2, 4, 5\}$ ■

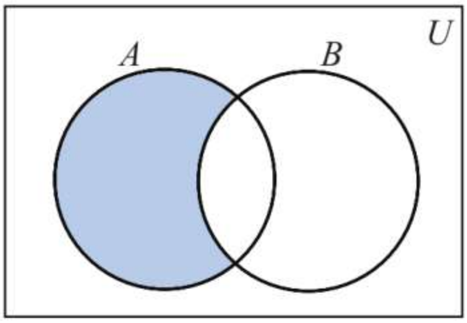
1.2.4 ผลต่างระหว่างเซต

ผลต่างระหว่างเซต (difference of sets) ของเซต A และ B หมายถึง เซตที่มีสมาชิกอยู่ในเซต A แต่ไม่อยู่ในเซต B เขียนแทนด้วย $A-B$

บทนิยาม 6

$$A-B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

อาจเขียนแสดง $A-B$ ได้ด้วยแผนภาพ ดังนี้



ส่วนที่แรเงาคือ $A-B$

รูปที่ 8

ตัวอย่างที่ 27

ให้ $A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ และ $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$ จงหา $A-B$ และ $B-A$

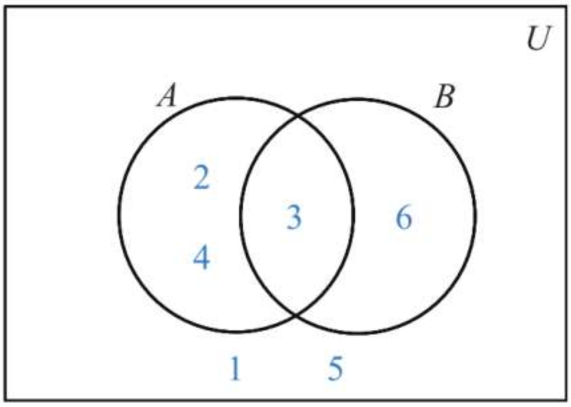
วิธีทำ จะได้ $A-B = \{0, 1, 2\}$

$B-A = \{5, 6, 7\}$ ■

ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่า $A-B \neq B-A$

ตัวอย่างที่ 28

กำหนดแผนภาพดังนี้

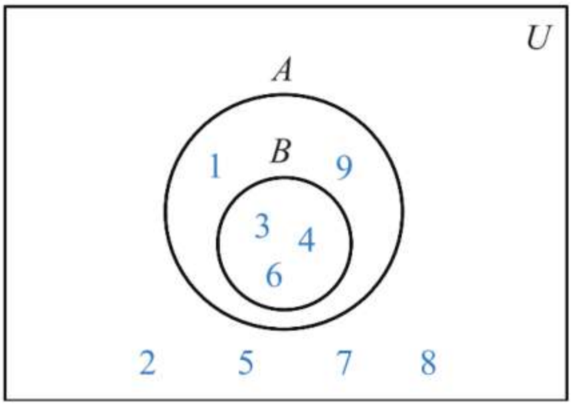


จงหา $A-B$ และ $B-A$

วิธีทำ จากแผนภาพ จะได้ $A-B=\{2, 4\}$ และ $B-A=\{6\}$ ■

ตัวอย่างที่ 29

กำหนดแผนภาพดังนี้



จงหา $A-B$ และ $B-A$

วิธีทำ จากแผนภาพ จะได้ $A-B=\{1, 9\}$ และ $B-A=\varnothing$ ■

สมบัติของการดำเนินการของเซต

ให้ A, B และ C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U จะได้

1) $A \cup B = B \cup A$

   $A \cap B = B \cap A$

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

   $(A \cap B)' = A' \cup B'$

5) $A - B = A \cap B'$

6) $A' = U - A$

จากสมบัติข้อ 2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ทำให้สามารถเขียนแทน $(A \cup B) \cup C$ และ $A \cup (B \cup C)$ ด้วย $A \cup B \cup C$ ได้โดยไม่มีความกำกวม และเนื่องจาก $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ทำให้สามารถเขียนแทน $(A \cap B) \cap C$ และ $A \cap (B \cap C)$ ด้วย $A \cap B \cap C$

หมายเหตุ จะไม่เขียน $A \cup B \cap C$ เพราะโดยทั่วไป $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$ ถ้าเป็นตัวดำเนินการต่างชนิดกัน จะต้องใส่วงเล็บเสมอ เพื่อบอกว่าต้องดำเนินการระหว่างเซตสองเซตใดก่อน

ตัวอย่างที่ 30

ให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

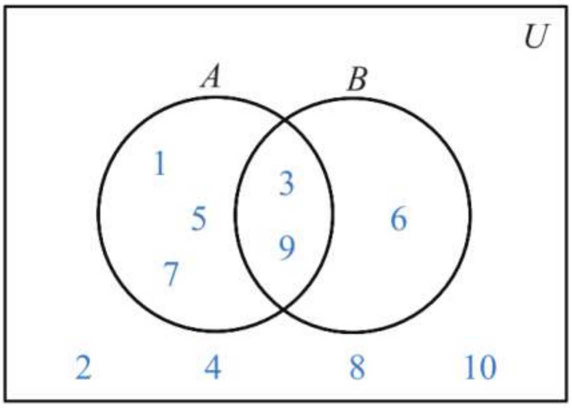
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{3, 6, 9\}$

จงใช้แผนภาพในการหาเซตต่อไปนี้

1) A'
2) B'
3) $A \cup B$
4) $(A \cup B)'$
5) $A' \cap B'$

วิธีทำ เขียนแผนภาพแสดงเซตที่กำหนดให้ได้ดังนี้



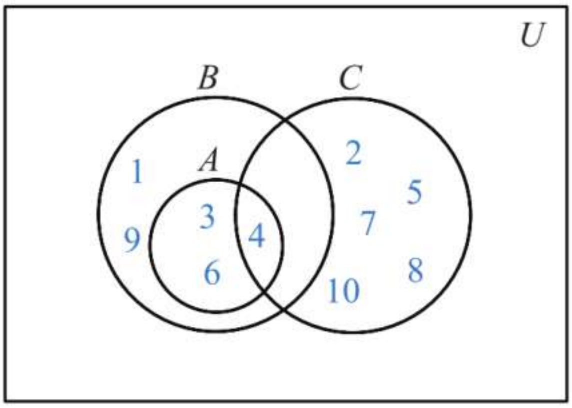
จากแผนภาพ จะได้

1) $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
2) $B' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$
3) $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$
4) $(A \cup B)' = \{2, 4, 8, 10\}$
5) $A' \cap B' = \{2, 4, 8, 10\}$

ตัวอย่างที่ 31

จงใช้แผนภาพในการหาเซตต่อไปนี้

1) $A \cap B$ 2) $A \cap C$ 3) $B - C$ 4) C'



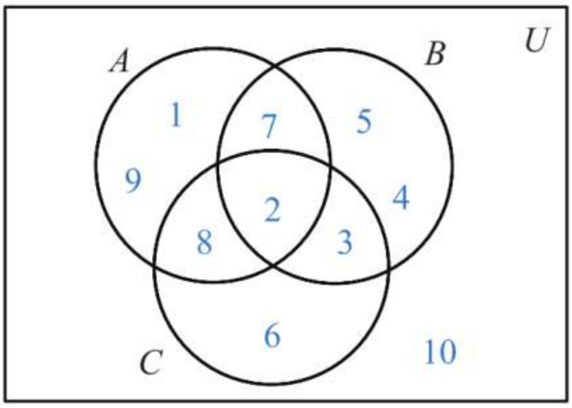
วิธีทำ จากแผนภาพ จะได้

1) $A \cap B = \{3, 4, 6\}$
2) $A \cap C = \{4\}$
3) $B - C = \{1, 3, 6, 9\}$
4) $C' = \{1, 3, 6, 9\}$

ตัวอย่างที่ 32

จงใช้แผนภาพในการหาเซตต่อไปนี้

1) $A \cap B$ 2) $(A \cap B) \cap C$ 3) $A \cap (B \cup C)$
4) $(A \cup B)'$ 5) $B \cap C'$ 6) $B - C$

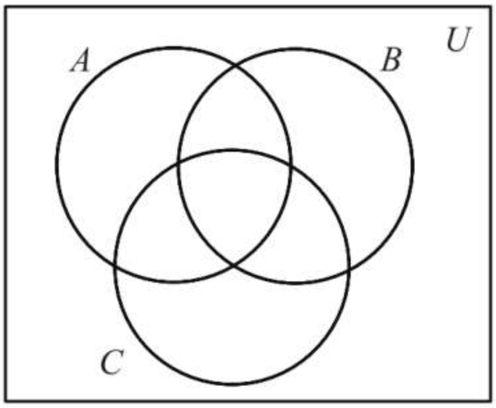


วิธีทำ จากแผนภาพ จะได้

1) $A \cap B = \{2, 7\}$
2) $(A \cap B) \cap C = \{2\}$
3) $A \cap (B \cup C) = \{2, 7, 8\}$
4) $(A \cup B)' = \{6, 10\}$
5) $B \cap C' = \{4, 5, 7\}$
6) $B - C = \{4, 5, 7\}$ ■

ตัวอย่างที่ 33

กำหนดแผนภาพดังนี้

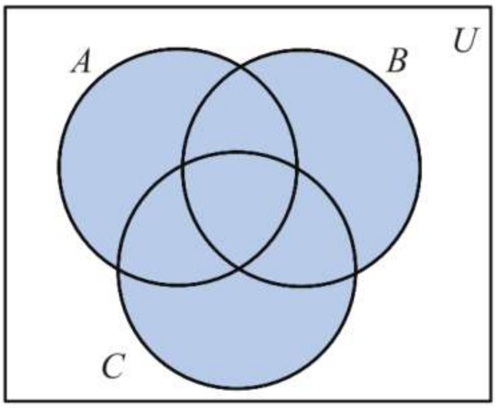


จงแรเงาบริเวณที่แสดงเซตต่อไปนี้

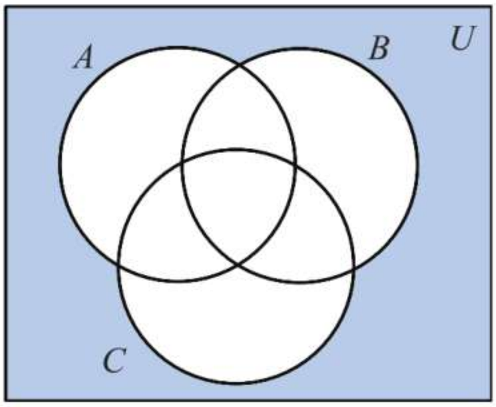
1) $A \cup B \cup C$
2) $A' \cap B' \cap C'$
3) $(A \cup B) - C$

วิธีทำ

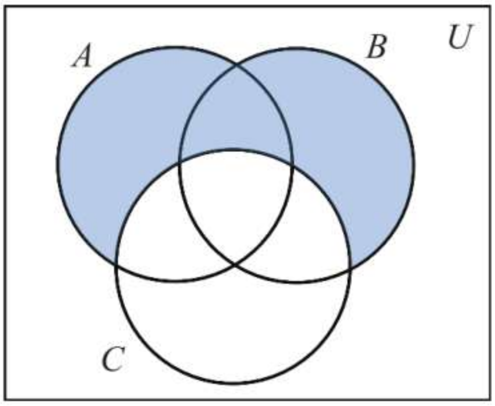
1)



2)



3)



แบบฝึกหัด 1.2

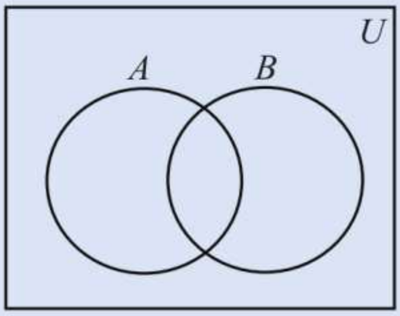
1. ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 1, 2, 8\}$ และ $B = \{0, 2, 4, 7, 9\}$ จงหา

1) $A \cup B$	2) $A \cap B$
3) $A - B$	4) $B - A$
5) A'	6) B'
7) $A \cup B'$	8) $A' \cap B$

2. ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ และ $C = \{3, 4, 5, 6\}$ จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

1) $A \cap B$	2) $B \cup C$
3) $B \cap C$	4) $A \cap C$
5) C'	6) $C' \cap A$
7) $C' \cap B$	8) $(A \cap B) \cup B$

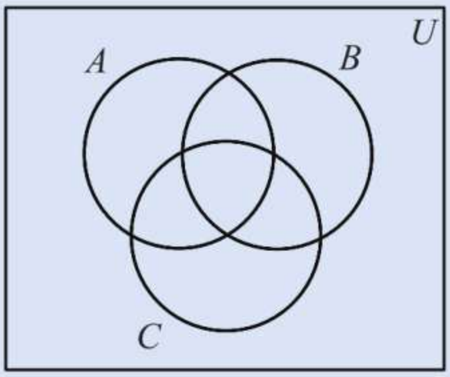
3.



จงแรเงาแผนภาพที่กำหนดให้เพื่อแสดงเซตต่อไปนี้

1) A'	2) B'
3) $A' \cap B'$	4) $(A \cup B)'$
5) $A' \cup B'$	6) $(A \cap B)'$
7) $A - B$	8) $A \cap B'$

4.



จงแรเงาแผนภาพที่กำหนดให้เพื่อแสดงเซตต่อไปนี้

1) $(A \cup B) \cup C$ 2) $A \cup (B \cup C)$
3) $(A \cap B) \cap C$ 4) $A \cap (B \cap C)$
5) $(A \cup B) \cap C$ 6) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

5. ให้ U แทนเซตของจำนวนเต็มบวกที่มี 2 หลักทั้งหมด
A แทนเซตของสมาชิกใน U ซึ่งลงท้ายด้วย 0
B แทนเซตของสมาชิกใน U ซึ่งหารด้วย 5 ลงตัว
C แทนเซตของสมาชิกใน U ซึ่งมี 6 อยู่ในหลักสิบ

จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปการดำเนินการของเซต A, B หรือ C

1) เซตของสมาชิกใน U ซึ่งลงท้ายด้วย 0 และมี 6 อยู่ในหลักสิบ
2) เซตของสมาชิกใน U ซึ่งมี 6 อยู่ในหลักสิบ หรือหารด้วย 5 ไม่ลงตัว
3) เซตของสมาชิกใน U ซึ่งลงท้ายด้วย 5

6. ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ซึ่งมี A เป็นสับเซต จงเขียนเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) U' 2) $A \cup A$
3) $A \cap A'$ 4) $A \cup A'$
5) $A \cup U$ 6) $A - U$
7) $U - A$ 8) $A - A$

1.3 การแก้ปัญหาโดยใช้เซต

จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A ใด ๆ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n(A)$

กำหนด $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$ และ $B=\{1, 3, 5, 7\}$

จะได้ $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ และ $A\cap B=\{3, 5\}$

จะได้ $n(A) = 5$, $n(B) = 4$

$n(A\cup B) = 7$, $n(A\cap B) = 2$

ถ้าเซต A และ B เป็นเซตจำกัดแล้ว จำนวนสมาชิกของเซต $A\cup B$ หาได้จาก

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

ในกรณีที่เซต A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน จะได้ว่า $n(A\cap B)=0$ ดังนั้น

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

ตัวอย่างที่ 34

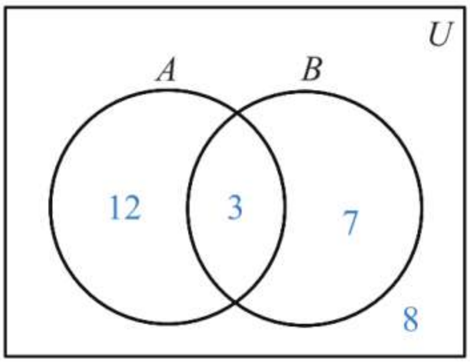
กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ U ซึ่ง $n(U)=30$ ให้ A และ B เป็นสับเซตของ U โดยที่ $n(A)=15$, $n(B)=10$ และ $n(A\cap B)=3$ จงหา $n(A\cup B)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} n(A\cup B) &= n(A)+n(B)-n(A\cap B) \\ &= 15+10-3 \\ &= 22 \end{aligned}$$

■

จากตัวอย่างข้างต้น นอกจากการหาจำนวนสมาชิกของ $A\cup B$ โดยใช้สูตรแล้ว ยังสามารถใช้แผนภาพแสดงเซตเพื่อคำนวณหาจำนวนสมาชิกของเซตได้ดังนี้



เนื่องจาก $n(A)=15$ และ $n(A\cap B)=3$
ดังนั้น ส่วนของเซต A ที่ไม่อยู่ในเซต B ซึ่งคือ $A-B$ มีจำนวนสมาชิก $15-3=12$ ตัว
เนื่องจาก $n(B)=10$ และ $n(A\cap B)=3$
จะได้ว่า ส่วนของเซต B ที่ไม่อยู่ในเซต A ซึ่งคือ $B-A$ มีจำนวนสมาชิก $10-3=7$ ตัว
จากแผนภาพ จะได้ $n(A\cup B)=12+3+7=22$

ตัวอย่างที่ 35

จากการสำรวจจำนวนลูกค้าในร้านค้าแห่งหนึ่งพบว่า ในวันที่สำรวจมีลูกค้าที่มาซื้อสินค้าทั้งหมด 55 คน เป็นผู้ที่มาซื้อสินค้าที่เป็นของใช้จำนวน 38 คน และมีผู้ที่มาซื้อสินค้าที่เป็นอาหารสำเร็จรูป 22 คน จงหาว่า มีลูกค้าที่ซื้อสินค้าทั้งสองประเภทคือที่เป็นของใช้และอาหารสำเร็จรูปกี่คน

วิธีทำ ให้ U แทนเซตของลูกค้าในร้านค้า ในวันที่ทำการสำรวจ
A แทนเซตของลูกค้าที่มาซื้อสินค้าที่เป็นของใช้
B แทนเซตของลูกค้าที่มาซื้อสินค้าที่เป็นอาหารสำเร็จรูป
นั่นคือ $A\cup B$ แทนเซตของลูกค้าที่มาซื้อสินค้าที่เป็นของใช้หรืออาหารสำเร็จรูป
$A\cap B$ แทนเซตของลูกค้าที่มาซื้อสินค้าทั้งสองประเภท
จะได้ $n(A\cup B) = 55$
$n(A) = 38$
$n(B) = 22$
จาก $n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
จะได้ $n(A\cap B) = n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
ดังนั้น $n(A\cap B) = 38+22-55 = 5$
นั่นคือ มีลูกค้าที่มาซื้อสินค้าทั้งสองประเภท 5 คน ■

ตัวอย่างที่ 36

โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียน 500 คน เป็นนักเรียนหญิง 320 คน และมีนักเรียนที่ไม่ใส่แว่นสายตา 380 คน ถ้ามีนักเรียนชายที่ใส่แว่นสายตา 50 คน จะมีนักเรียนหญิงที่ใส่แว่นสายตากี่คน

วิธีทำ ให้ U แทนเซตของนักเรียนทั้งหมดในโรงเรียน

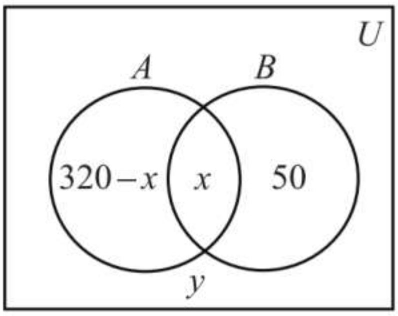
A แทนเซตของนักเรียนหญิงในโรงเรียน

B แทนเซตของนักเรียนที่ใส่แว่นสายตา

นั่นคือ $A \cap B$ แทนเซตของนักเรียนหญิงที่ใส่แว่นสายตา

จะได้ว่า $n(U) = 500,\ n(A) = 320,\ n(B') = 380$ และ $n(A' \cap B) = 50$

ให้ $x = n(A \cap B)$ และ $y = n\left((A \cup B)'\right)$ นำข้อมูลทั้งหมดไปใช้ในการเขียนแผนภาพ จะได้ดังนี้



ดังนั้น $y = n\left((A \cup B)'\right) = 500 - (320 - x + x + 50) = 130$

เนื่องจาก $n(B') = 380$

จะได้ $(320 - x) + 130 = 380$

นั่นคือ $x = 70$

ดังนั้น นักเรียนหญิงที่ใส่แว่นสายตามี 70 คน ■

นอกจากจะหาจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ แล้ว ยังสามารถหาจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B \cup C$ ได้โดยใช้หลักเกณฑ์ต่อไปนี้

ถ้าเซต A, B และ C เป็นเซตจำกัด จำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B \cup C$ หาได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
n(A\cup B\cup C) &= n((A\cup B)\cup C)\\
&= n(A\cup B)+n(C)-n((A\cup B)\cap C)\\
&= (n(A)+n(B)-n(A\cap B))+n(C)-n((A\cap C)\cup(B\cap C))\\
&= (n(A)+n(B)-n(A\cap B))+n(C)\\
&\quad -(n(A\cap C)+n(B\cap C)-n((A\cap C)\cap(B\cap C)))\\
&= n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-n(A\cap C)-n(B\cap C)\\
&\quad +n(A\cap B\cap C)
\end{aligned}
$$

สรุปได้ว่า

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

ตัวอย่างที่ 37

ในการสอบถามแม่บ้านเกี่ยวกับการใช้ผงซักฟอกยี่ห้อต่าง ๆ ปรากฏว่า มีแม่บ้านที่ใช้ผงซักฟอกยี่ห้อ A, B และ C จำนวน 30%, 40% และ 50% ตามลำดับ โดยที่มีแม่บ้านใช้ผงซักฟอก A และ B จำนวน 10% ใช้ผงซักฟอก A และ C จำนวน 15% ใช้ผงซักฟอก B และ C จำนวน 20% และใช้ทั้งผงซักฟอก A, B และ C จำนวน 3% จงหาว่า

1) แม่บ้านที่ใช้ผงซักฟอก A, B หรือ C อย่างน้อยหนึ่งยี่ห้อมีกี่เปอร์เซ็นต์
2) แม่บ้านที่ใช้ผงซักฟอกยี่ห้ออื่นที่ไม่ใช่ A หรือ B หรือ C มีกี่เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ ให้ U แทนเซตของแม่บ้านที่ใช้ผงซักฟอกยี่ห้อ A, B, C และยี่ห้ออื่น ๆ

A แทนเซตของแม่บ้านที่ใช้ผงซักฟอกยี่ห้อ A

B แทนเซตของแม่บ้านที่ใช้ผงซักฟอกยี่ห้อ B

C แทนเซตของแม่บ้านที่ใช้ผงซักฟอกยี่ห้อ C

นั่นคือ $A\cap B$ แทนเซตของแม่บ้านที่ใช้ผงซักฟอกยี่ห้อ A และ B

$A\cap C$ แทนเซตของแม่บ้านที่ใช้ผงซักฟอกยี่ห้อ A และ C

$B\cap C$ แทนเซตของแม่บ้านที่ใช้ผงซักฟอกยี่ห้อ B และ C

$A\cap B\cap C$ แทนเซตของแม่บ้านที่ใช้ผงซักฟอกทั้งสามยี่ห้อ

$A\cup B\cup C$ แทนเซตของแม่บ้านที่ใช้ผงซักฟอกยี่ห้อ A, B หรือ C อย่างน้อยหนึ่งยี่ห้อ

สมมติว่ามีการสอบถามแม่บ้านทั้งหมด 100 คน

จะได้

$$\begin{aligned} n(U) &= 100 \\ n(A) &= 30 \\ n(B) &= 40 \\ n(C) &= 50 \\ n(A\cap B) &= 10 \\ n(A\cap C) &= 15 \\ n(B\cap C) &= 20 \\ n(A\cap B\cap C) &= 3 \end{aligned}$$

1) จาก $n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)$
$-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$
$= 30+40+50-10-15-20+3$
$= 78$

ดังนั้น แม่บ้านใช้ผงซักฟอกยี่ห้อ A, B หรือ C อย่างน้อยหนึ่งยี่ห้อมี 78%

2) เนื่องจาก $n\left((A\cup B\cup C)'\right) = n(U)-n(A\cup B\cup C)$
$= 100-78$
$= 22$

ดังนั้น แม่บ้านที่ใช้ผงซักฟอกยี่ห้ออื่นที่ไม่ใช่ยี่ห้อ A หรือ B หรือ C มี 22% ■

ตัวอย่างที่ 38

หมู่บ้านแห่งหนึ่งมีประชากร 200 คน พบว่า

120 คน ชอบเล่นฟุตบอล
105 คน ชอบเล่นบาสเกตบอล
86 คน ชอบเล่นแบดมินตัน
93 คน ชอบเล่นฟุตบอลและบาสเกตบอล
71 คน ชอบเล่นบาสเกตบอลและแบดมินตัน
64 คน ชอบเล่นฟุตบอลและแบดมินตัน
60 คน ชอบเล่นกีฬาทั้งสามชนิด

จงหา

1) จำนวนคนที่ชอบเล่นฟุตบอลเพียงอย่างเดียว
2) จำนวนคนที่ไม่ชอบเล่นกีฬาชนิดใดเลยในสามชนิดนี้
3) จำนวนคนที่ชอบเล่นฟุตบอลและบาสเกตบอลแต่ไม่ชอบเล่นแบดมินตัน

วิธีทำ ให้ U แทนเซตของประชากรในหมู่บ้าน

A แทนเซตของคนในหมู่บ้านที่ชอบเล่นฟุตบอล

B แทนเซตของคนในหมู่บ้านที่ชอบเล่นบาสเกตบอล

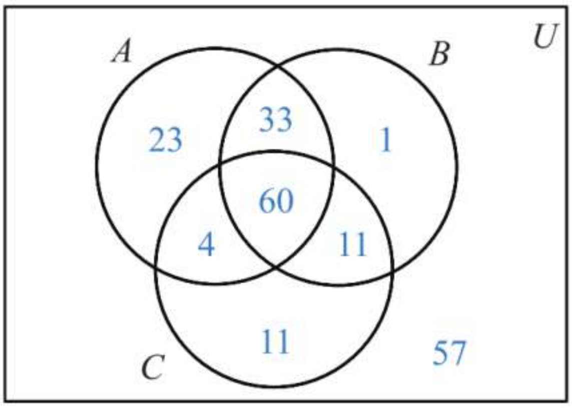
C แทนเซตของคนในหมู่บ้านที่ชอบเล่นแบดมินตัน

จะได้ $n(A) = 120,\ n(B) = 105,\ n(C) = 86$

$n(A \cap B) = 93, n(B \cap C) = 71, n(A \cap C) = 64$

$n(A \cap B \cap C) = 60$

นำข้อมูลที่ได้ไปเขียนในแผนภาพ โดยเริ่มจากบริเวณที่เป็น $A \cap B \cap C$ ก่อนจะได้ดังนี้



ดังนั้น จากแผนภาพข้างต้น

1) คนที่ชอบเล่นฟุตบอลเพียงอย่างเดียวมี 23 คน
2) คนที่ไม่ชอบเล่นกีฬาชนิดใดเลยในสามชนิดนี้มี 57 คน
3) คนที่ชอบเล่นฟุตบอลและบาสเกตบอลแต่ไม่ชอบเล่นแบดมินตันมี 33 คน ■

แบบฝึกหัด 1.3

1. กำหนดให้ U, A, B และ $A \cap B$ เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิก 100, 40, 25 และ 6 ตามลำดับ จงเติมจำนวนสมาชิกของเซตต่าง ๆ ลงในตารางต่อไปนี้

เซต	$A-B$	$B-A$	$A \cup B$	A'	B'	$(A \cup B)'$
จำนวนสมาชิก						

2. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ U ซึ่ง $n(U) = 50$ ให้ A และ B เป็นสับเซตของ U โดยที่ $n(A) = 25,\ n(B) = 30$ และ $n(A \cap B) = 13$ จงหา
   1) $n(A \cup B)$ 2) $n(A - B)$ 3) $n(A' \cap B')$

3. กำหนดจำนวนสมาชิกของเซตต่าง ๆ ดังนี้

เซต	U	A	B	C	$A \cap B$	$A \cap C$	$B \cap C$	$A \cap B \cap C$
จำนวนสมาชิก	50	25	20	30	12	15	10	5

   จงหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้
   1) $A \cup C$ 2) $A \cup B \cup C$ 3) $(A \cup B \cup C)'$
   4) $B - (A \cup C)$ 5) $(A \cap B) - C$

4. ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด โดยที่ $n(A) = 18,\ n(B) = 25$ และ $n(A \cup B) = 37$ จงหา $n(A \cap B)$

5. ถ้า $n(A - B) = 20$ และ $n(A \cup B) = 80$ จงหา $n(B)$

6. จากการสอบถามพนักงานบริษัทแห่งหนึ่ง พบว่า มีผู้ที่ดื่มชาหรือกาแฟเป็นประจำจำนวน 120 คน มีผู้ที่ชอบดื่มชา 60 คน ชอบดื่มกาแฟ 70 คน จงหาจำนวนพนักงานที่ชอบดื่มทั้งชาและกาแฟ

7. โรงพยาบาลแห่งหนึ่งทำการสำรวจข้อมูลจากผู้ป่วยที่มีอายุเกิน 40 ปี จำนวน 1,000 คน ปรากฏว่ามีคนสูบบุหรี่ 312 คน มีคนเป็นมะเร็งปอด 180 คน และมี 660 คนไม่สูบบุหรี่และไม่เป็นมะเร็งปอด จงหาว่า มีผู้สูบบุหรี่และเป็นมะเร็งปอดจำนวนเท่าใด และคิดเป็นร้อยละเท่าใดของจำนวนผู้สูบบุหรี่ทั้งหมด

8. ในการสอบของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายห้องหนึ่ง พบว่า มีผู้สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ 37 คน วิชาสังคมศึกษา 48 คน วิชาภาษาไทย 45 คน และมีผู้ที่สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์และสังคมศึกษา 15 คน ผู้ที่สอบผ่านวิชาสังคมศึกษาและภาษาไทยมี 13 คน ผู้ที่สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์และภาษาไทยมี 7 คน และมีผู้ที่สอบผ่านทั้งสามวิชา 5 คน จงหาจำนวนผู้ที่สอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชา

9. จากการสำรวจผู้ถือหุ้นในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย 3,000 คน พบว่า มีผู้ถือหุ้นของบริษัท ก, ข และ ค ดังนี้

ผู้ถือหุ้นบริษัท ก	200	คน
ผู้ถือหุ้นบริษัท ข	250	คน
ผู้ถือหุ้นบริษัท ค	300	คน
ผู้ถือหุ้นบริษัท ก และ ข	50	คน
ผู้ถือหุ้นบริษัท ข และ ค	40	คน
ผู้ถือหุ้นบริษัท ก และ ค	30	คน

และไม่มีผู้ที่ถือหุ้นทั้งสามบริษัทพร้อมกัน

จากจำนวนผู้ถือหุ้นที่สำรวจ ผู้ถือหุ้นบริษัทอื่น ๆ ที่ไม่ใช่หุ้นของสามบริษัทนี้มีจำนวนเท่าใด

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก
   1) เซตของจำนวนนับที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 12 และ 16 ลงตัว
   2) $\{x \mid x$ เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า $1\}$
   3) เซตของจำนวนนับที่หารด้วย 5 ลงตัว
   4) $\{x \mid x$ เป็นจำนวนคู่ที่ $-4 < x < 4\}$
   5) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \le 100\}$

2. จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก
   1) $\{1, 4, 7, 10, 13\}$
   2) $\{-20, -19, -18, \ldots, -10\}$
   3) $\{5, 9, 13, 17, 21, 25, \ldots\}$
   4) $\{1, 8, 27, 64, 125, 216, \ldots\}$

3. เซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตจำกัด เซตใดเป็นเซตอนันต์
   1) เซตของจำนวนเต็มลบที่มากกว่า 5
   2) เซตของจำนวนเต็มที่มากกว่า 10
   3) $\{x \mid x$ เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า $5\}$
   4) $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 1\}$
   5) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

4. ให้ $A = \{0, \{4, 5\}, 4\}$ จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ
   1) $0 \in A$
   2) $\{0, 4\} \notin A$
   3) $\{4, 5\} \subset A$
   4) $\{4, 5\} \in A$
   5) $\{\{4, 5\}\} \subset A$
   6) $\{5\} \in A$
   7) $\varnothing \in P(A)$
   8) $\varnothing \subset P(A)$
   9) $\{4, 5\} \in P(A)$

5. ให้ $U = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{x \mid x > 7\}$ และ $B = \{5, 6\}$ จงหา
   1) $P(A) \cap P(B)$
   2) $P(A \cap B)$
   3) $P(A) \cup P(B)$
   4) $P(A')$

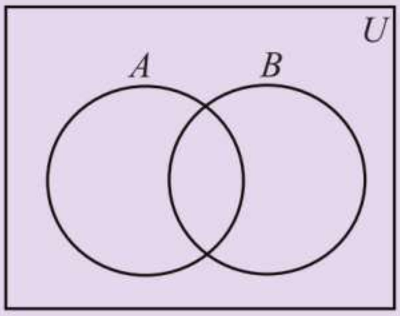
6. ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ซึ่งมี A เป็นสับเซต จงเขียนเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $U - A'$
2) $A' - U$
3) $\varnothing'$
4) $A \cap (A \cup A)$
5) $A \cap (U \cup A)$
6) $U \cap (A \cup A')$

7. จงพิจารณาว่าเซตแต่ละคู่ต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่

1) $A \cup B$ กับ $A \cup (B - A)$
2) $A \cap B'$ กับ $A - (A \cap B)$
3) $A' \cap B'$ กับ $U - (A \cup B)$

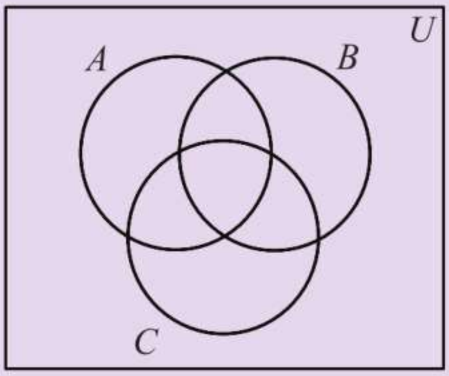
8.



จงแรเงาแผนภาพที่กำหนดให้เพื่อแสดงเซตต่อไปนี้

1) $A' \cap B$
2) $(A \cap B')'$
3) $(A \cup B')'$

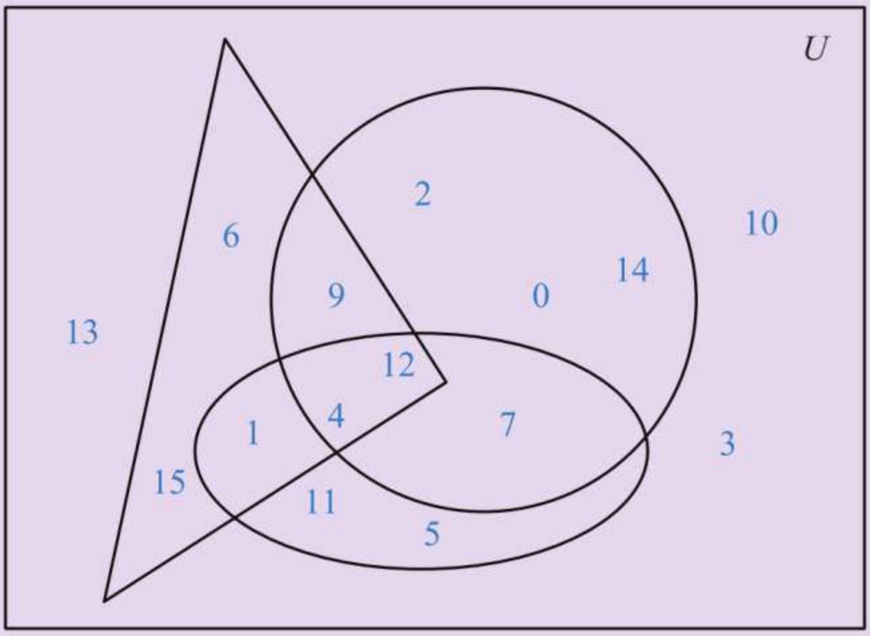
9.



จงแรเงาแผนภาพที่กำหนดให้เพื่อแสดงเซตต่อไปนี้

1) $A \cup (A - B)$
2) $(A' \cap B) \cap C$
3) $(A - B)' \cap C$
4) $A \cup (C' - B)$
5) $(A \cap B') \cup C$
6) $A' \cap (C' \cap B)$
7) $A \cup (C' \cap B)'$

10. กำหนดแผนภาพดังนี้



จงหา

1) เซตของสมาชิกที่อยู่ในรูปวงกลม
2) เซตของสมาชิกที่อยู่ในรูปสามเหลี่ยม
3) เซตของสมาชิกที่อยู่ในรูปวงรี
4) เซตของสมาชิกที่อยู่ในรูปสามเหลี่ยมและรูปวงกลม
5) เซตของสมาชิกที่อยู่ในรูปสามเหลี่ยมและรูปวงรี
6) เซตของสมาชิกที่อยู่ในรูปวงรีและรูปวงกลม
7) เซตของสมาชิกที่อยู่ในรูปวงกลมแต่ไม่อยู่ในรูปสามเหลี่ยม
8) เซตของสมาชิกที่อยู่ในรูปวงรีหรือรูปสามเหลี่ยมแต่ไม่อยู่ในรูปวงกลม

11. กำหนดให้ A และ B เป็นเซต ซึ่ง $A \cap B = \varnothing$ จงตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ โดยใช้แผนภาพเวนน์
   1) $A \subset B'$
   2) $B \subset A'$
   3) $A' \cup B' = U$

12. กำหนดให้ A และ B เป็นเซต ซึ่ง $A \subset B$ จงตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ โดยใช้แผนภาพเวนน์
   1) $A \cup B = B$
   2) $A \cap B = A$
   3) $B' \subset A'$
   4) $A \cap B' = \varnothing$
   5) $A' \cup B = U$

13. ให้ A และ B เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน ถ้า $n(A \cap B) = 101$ และ $n(A \cup B) = 233$ จงหา $n(A)$

14. โรงพยาบาลแห่งหนึ่งทำการสำรวจข้อมูลจากผู้ป่วย พบว่า มีผู้ป่วยเป็นโรคตา 40% มีผู้ป่วยเป็นโรคฟัน 20% และมีผู้ป่วยเป็นทั้งสองโรค 5% จงหาว่ามีผู้ป่วยไม่เป็นโรคตาและไม่เป็นโรคฟันกี่เปอร์เซ็นต์

15. ร้านค้าแห่งหนึ่งได้ทำการสำรวจความนิยมของลูกค้าเกี่ยวกับการใช้พัดลม พบว่า 60% ใช้พัดลมชนิดตั้งโต๊ะ 45% ใช้ชนิดแขวนเพดาน และ 15% ใช้ทั้งสองชนิด จงหาว่า
   1) ลูกค้าที่ไม่ใช้พัดลมทั้งสองชนิดนี้มีกี่เปอร์เซ็นต์
   2) ลูกค้าที่ใช้พัดลมเพียงชนิดเดียวมีกี่เปอร์เซ็นต์

16. แดนเปิดอู่ซ่อมรถยนต์ ในเดือนหนึ่งมีรถเข้ามาตรวจซ่อมบำรุงทั้งหมด 50 คัน พบว่ามี 23 คัน ต้องซ่อมเบรก มี 34 คัน ต้องซ่อมระบบท่อไอเสีย และมี 6 คัน ที่มีสภาพปกติ จงหา
1) จำนวนรถยนต์ที่ต้องซ่อมทั้งเบรกและระบบท่อไอเสีย
2) จำนวนรถยนต์ที่ต้องซ่อมเบรกแต่ไม่ต้องซ่อมระบบท่อไอเสีย

17. ในการสำรวจผู้ใช้บริการขนส่ง พบว่า

มีผู้ใช้บริการขนส่งทางรถไฟ	100	คน
มีผู้ใช้บริการขนส่งทางรถยนต์	150	คน
มีผู้ใช้บริการขนส่งทางเรือ	200	คน
มีผู้ใช้บริการขนส่งทางรถไฟและรถยนต์	50	คน
มีผู้ใช้บริการขนส่งทางรถยนต์และเรือ	25	คน
ไม่มีผู้ใช้บริการขนส่งทางรถไฟและเรือ		
ไม่มีผู้ใช้บริการขนส่งทั้งทางรถไฟ รถยนต์ และเรือ		
มีผู้ใช้บริการขนส่งแบบอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ทางรถไฟ รถยนต์ หรือเรือ	30	คน

จงหาว่า จำนวนผู้ใช้บริการขนส่งที่เข้าร่วมการสำรวจมีทั้งหมดกี่คน

18. ในการสำรวจคนทำงานเกี่ยวกับกิจกรรมที่ชอบทำซึ่งมี 3 อย่าง คือ การเดินป่า การไปทะเล และการเล่นสวนน้ำ พบว่ามี

35% ชอบการเดินป่า
57% ชอบการไปทะเล
20% ชอบการเล่นสวนน้ำ
8% ชอบการเดินป่าและการไปทะเล
15% ชอบการเดินป่าและการเล่นสวนน้ำ
5% ชอบการไปทะเลและการเล่นสวนน้ำ
3% ชอบทั้งสามอย่าง

จงหาว่า
1) คนที่ชอบการไปทะเลหรือชอบการเล่นสวนน้ำมีกี่เปอร์เซ็นต์
2) คนที่ชอบการเดินป่าหรือชอบการไปทะเลมีกี่เปอร์เซ็นต์
3) คนที่ชอบทำกิจกรรมเพียงอย่างเดียวมีกี่เปอร์เซ็นต์
4) คนที่ไม่ชอบการเดินป่าหรือไปทะเลหรือเล่นสวนน้ำมีกี่เปอร์เซ็นต์

19. จากการสำรวจความนิยมในการรับประทานผลไม้ของประชาชน 1,000 คน พบว่า

720 คน ชอบทุเรียน
605 คน ชอบมังคุด
586 คน ชอบมะม่วง
483 คน ชอบทุเรียนและมังคุด
470 คน ชอบมังคุดและมะม่วง
494 คน ชอบมะม่วงและทุเรียน
400 คน ชอบผลไม้ทั้งสามชนิด

จงหา

1) จำนวนคนที่ชอบมังคุดเพียงอย่างเดียว
2) จำนวนคนที่ชอบผลไม้อย่างน้อยหนึ่งชนิดใน 3 ชนิดนี้
3) จำนวนคนที่ไม่ชอบผลไม้ชนิดใดเลยใน 3 ชนิดนี้

20. จากการสอบถามนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายในโรงเรียนแห่งหนึ่ง พบว่า มีนักเรียนที่ชอบวิชาคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ และภาษาไทย จำนวน 56%, 47% และ 82% ตามลำดับ ถ้ามีนักเรียนที่ชอบเพียง 2 วิชาเท่านั้นจำนวน 71% และมีนักเรียน 4% ที่ไม่ชอบทั้งสามวิชา จงหาว่ามีนักเรียนที่ชอบเพียงวิชาเดียวเท่านั้นกี่เปอร์เซ็นต์

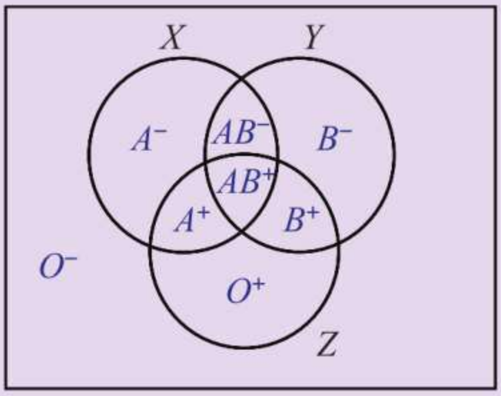
21. จากการสำรวจหมู่เลือดของคนกลุ่มหนึ่งพบว่า

20% มีเลือดหมู่ A
30% มีเลือดหมู่ B
9% มีเลือดหมู่ AB
18% มีเลือดหมู่ A^+
29% มีเลือดหมู่ B^+
8% มีเลือดหมู่ AB^+
40% มีเลือดหมู่ O^+

เสริมสมอง : หมู่เลือด

ในการให้และรับเลือดจากคนหนึ่งไปยังอีกคนหนึ่ง ผู้รับเลือดจะต้องมีชนิดของแอนติเจนตรงกับผู้ให้เลือด เช่น ผู้ที่มีเลือดหมู่ B^+ ไม่สามารถให้เลือดกับผู้ที่มีเลือดหมู่ B^- ได้ เพราะผู้ให้มีแอนติเจน Rh แต่ผู้รับไม่มีแอนติเจน Rh เมื่อผู้รับได้รับแอนติเจน Rh ร่างกายจะกระตุ้นให้สร้างแอนติบอดีต่อแอนติเจน Rh ถ้าหากร่างกายได้รับแอนติเจน Rh ในครั้งต่อไป อาจทำให้ผู้รับเกิดอันตรายถึงขั้นเสียชีวิตได้ แต่ผู้ที่มีเลือดหมู่ B^- สามารถให้เลือดแก่ผู้รับที่มีเลือดหมู่ B^+ ได้ เนื่องจากผู้ให้ไม่มีแอนติเจน Rh ผู้ที่มีเลือดหมู่ O^- สามารถให้เลือดแก่ผู้ใดก็ได้ แต่สามารถรับได้จากผู้ที่มีเลือดหมู่ O^- ด้วยกันเท่านั้น ดังนั้น เมื่อเกิดอุบัติเหตุจึงมักมีการประกาศหาผู้บริจาคเลือดที่มีเลือดหมู่ O^- เป็นกรณีพิเศษ

จงหาว่ามีคนกลุ่มนี้กี่เปอร์เซ็นต์ที่มีเลือดหมู่ O^- โดยใช้แผนภาพต่อไปนี้ช่วยในการหาคำตอบ



กำหนดให้ เซต X แทนเซตของคนที่มีแอนติเจน A

เซต Y แทนเซตของคนที่มีแอนติเจน B

และ เซต Z แทนเซตของคนที่มีแอนติเจน Rh

โดย เรียกคนที่มีเลือดหมู่ A^+ หรือ A^- ว่ามีเลือดหมู่ A

เรียกคนที่มีเลือดหมู่ B^+ หรือ B^- ว่ามีเลือดหมู่ B

เรียกคนที่มีเลือดหมู่ AB^+ หรือ AB^- ว่ามีเลือดหมู่ AB

และ เรียกคนที่มีเลือดหมู่ O^+ หรือ O^- ว่ามีเลือดหมู่ O

22. ให้ U แทนเซตของจำนวนคู่ตั้งแต่ 0 ถึง 100

A แทนเซตของจำนวนคู่ตั้งแต่ 0 ถึง 100 ที่หารด้วย 3 ลงตัว

B แทนเซตของจำนวนคู่ตั้งแต่ 0 ถึง 100 ที่หารด้วย 4 ลงตัว

C แทนเซตของจำนวนคู่ตั้งแต่ 0 ถึง 100 ที่หารด้วย 5 ลงตัว

จงหา

1) $n(B \cup C')$

2) $n(A \cap B \cap C')$

3) $n(A \cup B \cup C)$

4) $n\left((A \cup B \cup C)'\right)$

บทที่ 2 | ตรรกศาสตร์

จุดมุ่งหมาย

1. จำแนกข้อความว่าเป็นประพจน์หรือไม่เป็นประพจน์
2. หาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม
3. ตรวจสอบความสมมูลระหว่างประพจน์สองประพจน์
4. จำแนกประพจน์ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่เป็นสัจนิรันดร์
5. ตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผล
6. หาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียว
7. ตรวจสอบความสมมูลระหว่างประโยคสองประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียว
8. หานิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียว
9. ใช้ความรู้เกี่ยวกับตรรกศาสตร์ในการแก้ปัญหา

บทที่ 2

ตรรกศาสตร์

“

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ศึกษาสิ่งที่เป็นนามธรรมโดยมีแนวคิดที่เป็นระบบ การทำความเข้าใจในเรื่องใดเรื่องหนึ่งจึงต้องทำอย่างชัดเจนรัดกุม เพื่อให้ผู้ศึกษามีความเข้าใจที่ตรงตามที่ต้องการสื่อสาร เมื่อจะกำหนดคำใหม่ขึ้น ต้องมีการบอกความหมายให้ชัดเจนและรัดกุม ซึ่งเรียกว่าการนิยาม ในกรณีที่เขียนนิยามแล้วอาจทำให้ไม่เกิดประโยชน์ อาจต้องกำหนดให้เป็นคำที่ไม่นิยาม เช่น ถ้านิยามว่า “จุดคือสิ่งที่ไม่มีขนาด” ก็จะเกิดคำถามว่าขนาดคืออะไร ถ้าอธิบายว่า “ขนาด” คือสิ่งที่บอกให้รู้ว่าใหญ่หรือเล็ก จะต้องมีคำถามอีกว่า ใหญ่คืออะไร และเล็กคืออะไร ในที่สุดอาจต้องอธิบายว่า ใหญ่คือไม่เล็กและเล็กคือไม่ใหญ่ ทำให้เกิดความวกวนและไม่ก่อให้เกิดความเข้าใจเพิ่มขึ้น ด้วยเหตุนี้จึงมีคำบางคำที่จะไม่นิยาม เรียกว่า **คำอนิยาม** เมื่อตกลงให้คำบางคำเป็นคำอนิยามแล้วจะนิยามคำอื่น ๆ ได้โดยอาศัยคำอนิยาม ซึ่งเรียกว่า **บทนิยาม**

นอกจากนี้ ยังมีข้อความอีกประเภทหนึ่ง คือ **สัจพจน์** ซึ่งเป็นข้อความที่สมมติหรือตกลงกันว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ อีกคำหนึ่งที่สำคัญคือ **ทฤษฎีบท** ซึ่งหมายถึงข้อความที่สามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริงโดยใช้กระบวนการอ้างเหตุผล จากคำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ หรือทฤษฎีบทที่มีอยู่ก่อนแล้วด้วยหลักการทางตรรกศาสตร์ นอกจากนี้ ในบางกรณี จะใช้คำว่า **สมบัติ** แทนบทนิยาม สัจพจน์ หรือทฤษฎีบทก็ได้ เรียกสิ่งซึ่งประกอบด้วย คำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทว่า **โครงสร้างของระบบคณิตศาสตร์** ดังนั้นในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ความรู้ทางตรรกศาสตร์จึงเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการให้เหตุผลอย่างถูกต้อง มีหลักการ เพื่อให้เกิดข้อสรุปต่าง ๆ ที่สมเหตุสมผลเชื่อถือได้

”

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับจำนวน สมการ และอสมการในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- เซต

goo.gl/VGTLAf

2.1 ประพจน์

ประพจน์ (statement) คือ ประโยคหรือข้อความที่เป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ซึ่งประโยคหรือข้อความดังกล่าวจะอยู่ในรูปบอกเล่าหรือปฏิเสธก็ได้

ตัวอย่างประโยคหรือข้อความที่เป็นประพจน์

ดาวพุธเป็นดาวเคราะห์	(จริง)
จังหวัดเชียงใหม่ไม่อยู่ในภาคใต้ของประเทศไทย	(จริง)
$9 \neq 3$	(จริง)
$17+8 \neq 25$	(เท็จ)
π เป็นจำนวนตรรกยะ	(เท็จ)
เซตว่างเป็นสับเซตของเซตทุกเซต	(จริง)

เสริมสมอง : Aristotle

Aristotle (384 – 322 ปีก่อนคริสต์ศักราช) นักปรัชญาและนักวิทยาศาสตร์ชาวกรีก เป็นผู้ริเริ่มศึกษาตรรกศาสตร์อย่างเป็นระบบ และได้รับการยกย่องว่าเป็นบิดาของวิชาตรรกศาสตร์ โดยงานทางด้านตรรกศาสตร์ของเขาได้รวบรวมไว้ในชุดหนังสือชื่อ Organon

ในตรรกศาสตร์เรียกการเป็น **จริง** หรือ **เท็จ** ของแต่ละประพจน์ว่า **ค่าความจริง (truth value)** ของประพจน์ เช่น $3=1+2$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง หรือกล่าวสั้น ๆ ว่า $3=1+2$ เป็นประพจน์ที่เป็นจริง

ตัวอย่างประโยคหรือข้อความที่ไม่เป็นประพจน์

ฝนตกหรือเปล่า	อย่าเดินลัดสนาม	ช่วยด้วย
กรุณาเปิดหน้าต่างด้วย	ได้โปรดเถิด	น่ากลัวจริง
ออกไปให้พ้น	ขออภัยในความไม่สะดวก	อยากไปเที่ยวเหลือเกิน

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงพิจารณาประโยคหรือข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นประพจน์ จงหาค่าความจริงของประพจน์นั้น
   1) เดือนสิงหาคมมี 30 วัน
   2) $7 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$
   3) $(8+22)^3$ หารด้วย 10^2 ไม่ลงตัว
   4) กรุณารักษาความสะอาด
   5) จงตอบคำถามต่อไปนี้
   6) $\pi > 3$
   7) 9 เป็นจำนวนเฉพาะ
   8) $\varnothing \not\subset \{1, 2\}$
   9) โทรได้ไม่อั้น
   10) 7 เป็นตัวประกอบของ 217
   11) {ก, ข, ค} = {1, 2, 3}
   12) $\varnothing \cup \{0\} \neq \{\varnothing, 0\}$
   13) อย่ามายุ่งกับฉันได้ไหม
   14) ทำไมมาโรงเรียนสาย
   15) $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนเต็ม
   16) ขอให้เดินทางกลับโดยสวัสดิภาพ
   17) ยินดีต้อนรับ
   18) ตัวประกอบที่เป็นจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของ 12 มี 6 ตัว
2. จงเขียนประโยคหรือข้อความที่เป็นประพจน์มา 5 ประพจน์ พร้อมทั้งบอกค่าความจริงของประพจน์นั้น ๆ

2.2 การเชื่อมประพจน์

ในวิชาคณิตศาสตร์หรือในชีวิตประจำวัน จะพบประโยคที่ได้จากการเชื่อมประโยคมากกว่าหนึ่งประโยค ด้วยคำว่า "และ" "หรือ" "ถ้า...แล้ว..." "ก็ต่อเมื่อ" หรือพบประโยคซึ่งเปลี่ยนแปลงมาจากประโยคเดิมโดยเติมคำว่า "ไม่" คำเหล่านี้เรียกว่า **ตัวเชื่อม (connective)** เช่น

1 เป็นจำนวนคี่ **และ** 4 เป็นจำนวนคู่

ถ้า 3 เป็นจำนวนคี่ **แล้ว** 3^2 เป็นจำนวนคี่

รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า **ก็ต่อเมื่อ** รูปสามเหลี่ยม ABC มีความยาวของด้านเท่ากันทุกด้าน

เรียกประพจน์ที่นำมาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อมต่าง ๆ ว่า **ประพจน์ย่อย (atomic statement)** หรือ **ประพจน์เชิงเดียว (simple statement)** เรียกประพจน์ที่เกิดจากการเชื่อมประพจน์เชิงเดียวด้วยตัวเชื่อม ว่า **ประพจน์เชิงประกอบ (compound statement)**

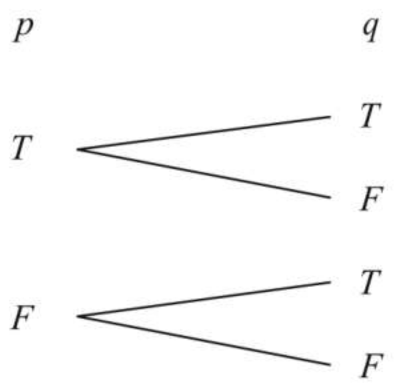
นิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก เช่น p, q, r, s แทนประพจน์ที่นำมาเชื่อมกัน

ถ้า p เป็นประพจน์ใด ๆ แล้วค่าความจริงของ p เป็นได้ 2 กรณี คือ **จริง (true)** ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ T หรือ **เท็จ (false)** ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ F แสดงได้ดังตาราง

p
T
F

เรียกตารางซึ่งแสดงกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดของประพจน์ p ว่า **ตารางค่าความจริง (truth table)** ของ p

ถ้ามีสองประพจน์ คือ p และ q แล้วจะมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด 4 กรณี ซึ่ง T และ F ของ p ต่างก็จับคู่กับกรณี T และ F ของ q ได้ดังนี้



p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

2.2.1 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "และ"

พิจารณาประพจน์ $1+2 = 2+1$

$3\times 2 = 2\times 3$

เมื่อเชื่อมประพจน์ทั้งสองด้วย "และ" จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$1+2 = 2+1$ **และ** $3\times 2 = 2\times 3$

ในการเชื่อมประพจน์ด้วย "และ" มีข้อตกลงว่า ประพจน์ใหม่จะเป็นจริงในกรณีที่ประพจน์ที่นำมาเชื่อมกันนั้นเป็นจริงทั้งคู่ กรณีอื่น ๆ เป็นเท็จทุกกรณี

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว การเชื่อมประพจน์ p กับประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม **"และ" (and)** ได้ประพจน์ใหม่เป็น " p และ q " ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \wedge q$ และเขียนตารางค่าความจริงของ $p \wedge q$ ได้ดังนี้

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

จากตารางค่าความจริงข้างต้น เมื่อต้องการหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม "และ" ให้พิจารณาค่าความจริงของประพจน์ที่นำมาเชื่อมว่าตรงกับกรณีใด เช่น ต้องการหาค่าความจริงของประพจน์

$3 \in \{1, 3, 5, \ldots\}$ **และ** 3 เป็นจำนวนคี่

จะต้องพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ "$3 \in \{1, 3, 5, \ldots\}$" และ "$3$ เป็นจำนวนคี่" ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่ ดังนั้น ค่าความจริงของ "$3 \in \{1, 3, 5, \ldots\}$ **และ** 3 เป็นจำนวนคี่" คือ จริง

ในทำนองเดียวกัน ค่าความจริงของประพจน์

3 เป็นจำนวนตรรกยะ **และ** $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

คือ เท็จ เพราะประพจน์ "$\sqrt{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะ" มีค่าความจริงเป็นเท็จ ประพจน์ "3 เป็นจำนวนตรรกยะ **และ** $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะ" อาจเขียนโดยย่อเป็น "3 **และ** $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะ"

ตัวเชื่อม "และ" อาจเขียนในรูปอื่นที่มีความหมายอย่างเดียวกัน เช่น "แต่" "กับ"

2.2.2 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "หรือ"

พิจารณาประพจน์ $1+5 = 5+1$

$$4(2+3) = (4\times 2)+(4\times 3)$$

เมื่อเชื่อมประพจน์ทั้งสองด้วย "หรือ" จะได้ประพจน์ใหม่คือ

$1+5 = 5+1$ **หรือ** $4(2+3) = (4\times 2)+(4\times 3)$

ในการเชื่อมประพจน์ด้วย "หรือ" มีข้อตกลงว่า ประพจน์ใหม่จะเป็นเท็จในกรณีที่ประพจน์ที่นำมาเชื่อมกันเป็นเท็จทั้งคู่ กรณีอื่น ๆ เป็นจริงทุกกรณี

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว การเชื่อมประพจน์ p กับประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม **"หรือ" (or)** ได้ประพจน์ใหม่เป็น "p หรือ q" ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \vee q$ และเขียนตารางค่าความจริงของ $p \vee q$ ได้ดังนี้

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

จากตารางจะหาค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อม "หรือ" ได้ดังตัวอย่าง

1) "$\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ **หรือ** $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนเต็ม" มีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะ "$\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ" และ "$\sqrt{2}$ เป็นจำนวนเต็ม" มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งคู่
2) "2 เป็นจำนวนคู่ **หรือ** 2^3 เป็นจำนวนคี่" มีค่าความจริงเป็นจริง เพราะค่าความจริงของ "2 เป็นจำนวนคู่" คือ จริง

หมายเหตุ ความหมายของคำว่า "หรือ" ที่ใช้โดยทั่วไปมีสองกรณี

กรณีที่ 1 หมายถึง อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น เช่น ในการโยนเหรียญครั้งละ 1 เหรียญ แต่ละครั้งเหรียญจะขึ้นหัวหรือก้อยเพียงอย่างเดียว

กรณีที่ 2 หมายถึง อย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่าง เช่น ครูให้รางวัลแก่นักเรียนที่เรียนดีหรือนักเรียนที่ช่วยกิจกรรมของโรงเรียน นักเรียนที่ได้รับรางวัลบางคนอาจเรียนดีเพียงอย่างเดียว บางคนอาจช่วยกิจกรรมของโรงเรียนเพียงอย่างเดียว แต่บางคนอาจทั้งเรียนดีและช่วยกิจกรรมของโรงเรียน

ในตรรกศาสตร์มีข้อตกลงว่า ตัวเชื่อม "หรือ" หมายถึงกรณีที่ 2

2.2.3 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...”

พิจารณาประพจน์ $2+3=3+2$

$$6(2+3)=6(3+2)$$

เมื่อเชื่อมด้วย “ถ้า...แล้ว...” ประพจน์ใหม่ที่เกิดขึ้น คือ

ถ้า $2+3=3+2$ **แล้ว** $6(2+3)=6(3+2)$

ประพจน์ซึ่งตามหลังคำว่า **ถ้า** เรียกว่า **เหตุ** ส่วนประพจน์ซึ่งตามหลังคำว่า **แล้ว** เรียกว่า **ผล**

ในการเชื่อมประพจน์ด้วย “ถ้า...แล้ว...” มีข้อตกลงว่า ประพจน์ใหม่จะเป็นเท็จในกรณีที่เหตุเป็นจริงและผลเป็นเท็จเท่านั้น กรณีอื่น ๆ เป็นจริงทุกกรณี

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว การเชื่อมประพจน์ p กับประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม **“ถ้า...แล้ว...” (if…then…)** ได้ประพจน์ใหม่เป็น “ถ้า p แล้ว q” ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \to q$ และเขียนตารางค่าความจริงของ $p \to q$ ได้ดังนี้

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

จากตารางจะหาค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...” ได้ดังตัวอย่าง

1) “**ถ้า** 5 เป็นจำนวนคี่ **แล้ว** 5^4 เป็นจำนวนคี่” มีค่าความจริงเป็นจริง เพราะ “5 เป็นจำนวนคี่” และ “5^4 เป็นจำนวนคี่” มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่
2) “**ถ้า** 0 เป็นจำนวนเต็ม **แล้ว** 0 เป็นจำนวนลบ” มีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะ “0 เป็นจำนวนเต็ม” และ “0 เป็นจำนวนลบ” มีค่าความจริงเป็นจริง และเท็จ ตามลำดับ

ประพจน์ที่ใช้ตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...” มีบทบาทสำคัญยิ่งในวิชาคณิตศาสตร์ เนื่องจากทฤษฎีบทในวิชาคณิตศาสตร์ส่วนมากจะอยู่ในรูป $p \to q$ เช่น

ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน **แล้ว**มุมตรงข้ามจะมีขนาดเท่ากัน

ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว **แล้ว**รูปสามเหลี่ยม ABC จะมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุม

2.2.4 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "ก็ต่อเมื่อ"

พิจารณาประพจน์ $2(3+2)=2\times 5$

$3+2=5$

เมื่อเชื่อมประพจน์ทั้งสองด้วย "ก็ต่อเมื่อ" ประพจน์ที่ได้ใหม่คือ

$2(3+2)=2\times 5$ **ก็ต่อเมื่อ** $3+2=5$

ซึ่งมีความหมายเป็น

ถ้า $2(3+2)=2\times 5$ แล้ว $3+2=5$ และ ถ้า $3+2=5$ แล้ว $2(3+2)=2\times 5$

ในการเชื่อมประพจน์ด้วย "ก็ต่อเมื่อ" มีข้อตกลงว่า ประพจน์ใหม่จะเป็นจริงในกรณีที่ประพจน์ที่นำมาเชื่อมกันนั้นเป็นจริงทั้งคู่หรือเป็นเท็จทั้งคู่เท่านั้น กรณีอื่น ๆ เป็นเท็จเสมอ

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว การเชื่อมประพจน์ p กับประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม **"ก็ต่อเมื่อ" (if and only if)** ได้ประพจน์ใหม่เป็น " p ก็ต่อเมื่อ q " ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p\leftrightarrow q$ และเขียนตารางค่าความจริงของ $p\leftrightarrow q$ ได้ดังนี้

p	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

จากตารางจะหาค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ” ได้ดังตัวอย่าง

1) “$2<3$ **ก็ต่อเมื่อ** $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$” มีค่าความจริงเป็นจริง เพราะ “$2<3$” และ “$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$” มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่
2) “$2^2=(-2)^2$ **ก็ต่อเมื่อ** $2=-2$” มีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะ “$2^2=(-2)^2$” มีค่าความจริงเป็นจริง แต่ “$2=-2$” มีค่าความจริงเป็นเท็จ
3) “7 หารด้วย 2 ลงตัว **ก็ต่อเมื่อ** 7 เป็นจำนวนคู่” มีค่าความจริงเป็นจริง เพราะ “7 หารด้วย 2 ลงตัว” และ “7 เป็นจำนวนคู่” มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งคู่

หมายเหตุ ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่เป็นบทนิยามต่าง ๆ ถ้านำมาเขียนเป็นประโยคที่มีตัวเชื่อมจะมีความหมายเดียวกับการใช้ตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ” เช่น “รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน” หมายความว่า “รูปสามเหลี่ยมใดจะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วก็ต่อเมื่อรูปสามเหลี่ยมนั้นมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน”

2.2.5 นิเสธของประพจน์

นิเสธของประพจน์ $2+3=5$ คือ $2+3\neq 5$

นิเสธของประพจน์ $2<3$ คือ $2\not<3$ (อ่านว่า 2 ไม่น้อยกว่า 3 หมายความว่า 2 อาจมากกว่า 3 หรือเท่ากับ 3 ซึ่งเขียนได้อีกแบบหนึ่งว่า $2\geq 3$)

ค่าความจริงของนิเสธจะตรงข้ามกับค่าความจริงของประพจน์เดิมเสมอ

ถ้า p เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว **นิเสธ (negation)** ของ p เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim p$ และเขียนตารางค่าความจริงของ $\sim p$ ได้ดังนี้

p	$\sim p$
T	F
F	T

จากตารางจะหาค่าความจริงของนิเสธของประพจน์ ได้ดังตัวอย่าง

1. ถ้า p แทนประพจน์ "จุด $(2,0)$ อยู่บนแกน X" แล้ว $\sim p$ หรือประพจน์ "จุด $(2,0)$ ไม่อยู่บนแกน X" มีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะค่าความจริงของ p คือ จริง
2. ถ้า q แทนประพจน์ "งูไม่เป็นสัตว์เลื้อยคลาน" แล้ว $\sim q$ หรือประพจน์ "งูเป็นสัตว์เลื้อยคลาน" มีค่าความจริงเป็นจริง เพราะค่าความจริงของ q คือ เท็จ

เสริมสมอง : ตรรกศาสตร์ในภาพยนตร์

ในภาพยนตร์ซีรีย์ทีวีเรื่อง Star Trek มีตอนหนึ่งได้นำตรรกศาสตร์มานำเสนอ ในตอนนั้นคอมพิวเตอร์ปัญญาประดิษฐ์ที่ชั่วร้ายได้ขังลูกเรือของยานเอ็นเตอร์ไพรส์ไว้ทั้งหมด ต่อมาลูกเรือทั้งหมดสามารถหนีออกมาได้เพราะลูกเรือคนหนึ่งได้พูดกับคอมพิวเตอร์นั้นว่า "ฉันกำลังโกหกคุณ" ซึ่งประโยคนี้ทำให้คอมพิวเตอร์สับสน เนื่องจากหากเขาพูดโกหกว่า "ฉันกำลังโกหกคุณ" แสดงว่าเขาไม่ได้พูดโกหก แต่หากเขาไม่ได้พูดโกหก แสดงว่าประโยค "ฉันกำลังโกหกคุณ" เป็นจริง นั่นคือเขาพูดโกหก คอมพิวเตอร์ไม่สามารถประมวลผลได้ว่าข้อความที่พูดนั้นเป็นจริงหรือเท็จ จึงพังทลายในที่สุด

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
   1) 0 เป็นจำนวนนับ และ 6 เป็นจำนวนเต็ม
   2) 9 ไม่เท่ากับ 10 หรือ 10 ไม่น้อยกว่า 9
   3) $\sqrt{2}$ และ -1 เป็นจำนวนจริง
   4) ถ้า $1 \notin \{1,2\}$ แล้ว $1 \subset \{1,2\}$
   5) $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะ และไม่ใช่จำนวนจริง
   6) 2 เป็น ห.ร.ม. ของ 4 และ 6 ก็ต่อเมื่อ 2 หาร $4+6$ ไม่ลงตัว
   7) ถ้า 3 เป็นจำนวนคี่ แล้ว 3^2 เป็นจำนวนคี่
   8) $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนอตรรกยะ
   9) 13 เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ 13 มีตัวประกอบคือ 1 กับ 13
   10) ถ้า $\{3\} \subset \{3,4\}$ แล้ว $3 \notin \{3,4\}$
   11) $(2+6)+4=12$ หรือ $12=2(5)+2$
   12) ถ้าแมงมุมเป็นแมลง แล้วแมงมุมต้องมี 6 ขา
   13) งูเห่าและงูจงอางเป็นสัตว์มีพิษ
   14) โลมาหรือคนเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยน้ำนม

2. จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้ และบอกค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นนิเสธของประพจน์ที่กำหนดให้
   1) $4+9 = 10+3$
   2) $|-7| \ngtr |6|$
   3) เซตของจำนวนนับที่เป็นคำตอบของสมการ $x^2+1=0$ เป็นเซตว่าง
   4) $\{3,4\} \cup \{1,3,5\} = \{1,3,4,5\}$
   5) $\{\{2\}\} \not\subset \{2\}$
   6) $|-3+6| \le |-3|+|6|$

7) 15 ไม่ใช่จำนวนจริง

8) วาฬเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยน้ำนม

3. ให้ p แทนข้อความ “ฉันตื่นนอนแต่เช้า”
และ q แทนข้อความ “ฉันมาเรียนทันเวลา”
จงเขียนประพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปข้อความ

1) $\sim p$

2) $p \rightarrow \sim q$

3) $p \wedge q$

4) $p \leftrightarrow q$

5) $\sim p \vee \sim q$

6) $\sim p \vee (p \rightarrow q)$

4. ให้ p แทนข้อความ “12 หารด้วย 3 ลงตัว”
และ q แทนข้อความ “$4-3<2$”
จงเขียนข้อความต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์และหาค่าความจริง

1) 12 หารด้วย 3 ไม่ลงตัว และ $4-3<2$

2) 12 หารด้วย 3 ลงตัว หรือ $4-3<2$

3) ถ้า $4-3 \geq 2$ แล้ว 12 หารด้วย 3 ลงตัว

4) 12 หารด้วย 3 ไม่ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $4-3<2$

2.3 การหาค่าความจริงของประพจน์

ตารางค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมแบบต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วมีไว้เพื่อช่วยในการตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์ที่ได้จากการเชื่อมประพจน์ย่อย เมื่อทราบค่าความจริงของประพจน์ย่อย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ a, b และ c เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง จริง และเท็จ ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(a \wedge b) \vee c$

วิธีทำ จาก a เป็นจริง และ b เป็นจริง จะได้ $a \wedge b$ เป็นจริง
จาก $a \wedge b$ เป็นจริง และ c เป็นเท็จ
จะได้ $(a \wedge b) \vee c$ เป็นจริง ■

ตัวอย่างที่ 2

จงหาค่าความจริงของประพจน์ $\sim(a \rightarrow \sim b)$ เมื่อ a และ b เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

วิธีทำ จาก b เป็นจริง จะได้ $\sim b$ เป็นเท็จ
จาก a เป็นจริง และ $\sim b$ เป็นเท็จ จะได้ $a \rightarrow \sim b$ เป็นเท็จ
ดังนั้น $\sim(a \rightarrow \sim b)$ มีค่าความจริงเป็นจริง ■

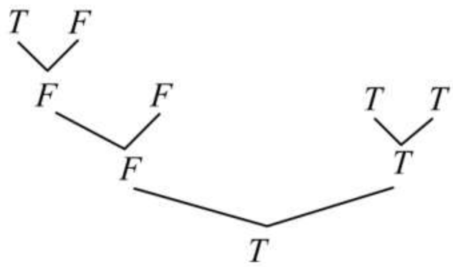
ในการหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมนั้น อาจทำได้รวดเร็วขึ้นโดยใช้แผนภาพ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง เท็จ เท็จ และจริง ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ $\left[(p \wedge q) \vee r\right] \rightarrow (p \vee s)$

วิธีทำ กำหนดให้ T แทนจริง และ F แทนเท็จ

$$\left[(\ p \wedge q\ ) \vee r\right] \quad \rightarrow \quad (\ p \vee s\ )$$



ดังนั้น ประพจน์ $\left[(p \wedge q) \vee r\right] \rightarrow (p \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นจริง ■

การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมตั้งแต่สองตัวขึ้นไป ทำได้โดยหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบในวงเล็บก่อน แต่ถ้าประพจน์เชิงประกอบนั้นไม่ได้ใส่วงเล็บ ให้หาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม "$\sim$" ก่อน แล้วจึงหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม "$\wedge$", "$\vee$" จากนั้นจึงหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม "$\rightarrow$" และลำดับสุดท้ายเป็นการหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม "$\leftrightarrow$"

แบบฝึกหัด 2.3

1. กำหนดให้ p , q , r , s และ t เป็นประพจน์มีค่าความจริงเป็นจริง เท็จ จริง เท็จ และเท็จ ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
   1) $(p \vee q) \wedge r$
   2) $(p \wedge r) \vee (t \wedge s)$
   3) $(p \vee \sim s) \wedge (q \vee r)$
   4) $(p \wedge \sim q) \wedge t$
   5) $\sim[\sim(r \vee \sim s) \wedge p]$
   6) $(p \vee \sim q) \rightarrow (r \vee t)$
   7) $(\sim r \wedge q) \leftrightarrow \sim(s \wedge \sim t)$
   8) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \rightarrow s)$
   9) $(s \wedge \sim p) \leftrightarrow (q \rightarrow \sim r)$
   10) $(q \vee r) \rightarrow (q \leftrightarrow \sim s)$
   11) $[(p \rightarrow q) \wedge (t \rightarrow r)] \rightarrow s$
   12) $[(p \vee q) \wedge (t \vee s)] \vee [(q \rightarrow r) \rightarrow \sim s]$

2. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์
   1) ถ้า $p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ p และ q
   2) ถ้า $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ p และ q
   3) ถ้า $p \vee q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$
   4) ถ้า $p \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(p \vee q) \wedge r$
   5) ถ้า $(p \wedge q) \rightarrow (\sim r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(\sim p \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge s)$

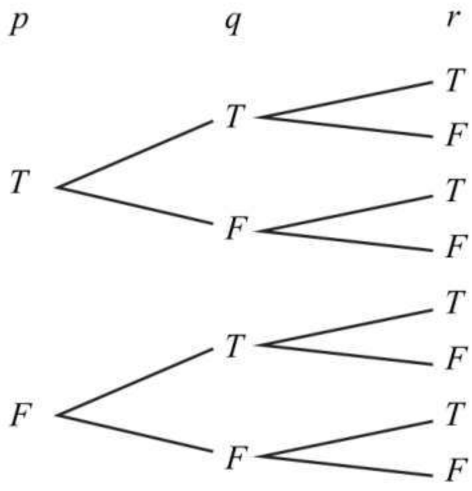
2.4 การสร้างตารางค่าความจริง

พิจารณาประพจน์ที่มีตัวเชื่อม เช่น $\sim p,\ p\wedge q,\ p\vee q,\ p\rightarrow q,\ p\leftrightarrow q$ และ $(p\wedge q)\rightarrow r$ จะเห็นว่าประพจน์เหล่านี้มี p, q และ r เป็นประพจน์ย่อย ซึ่งยังไม่กำหนดค่าความจริง จะเรียก p, q และ r ว่าเป็นตัวแปรแทนประพจน์ใด ๆ และเรียกประพจน์ที่มีตัวเชื่อม เช่น $\sim p,\ p\wedge q,\ p\vee q,\ p\rightarrow q,\ p\leftrightarrow q$ ว่า รูปแบบของประพจน์ เนื่องจาก p, q และ r เป็นตัวแปรแทนประพจน์ใด ๆ ดังนั้น ในการพิจารณาค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์จึงต้องกำหนดค่าความจริงของประพจน์ย่อยทุกกรณีที่เป็นไปได้ เช่น

ถ้ามีประพจน์เดียวคือ p แล้วจะมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่พิจารณา 2 กรณี

ถ้ามีสองประพจน์คือ p และ q แล้วจะมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่พิจารณา 4 กรณี

ในทำนองเดียวกัน ถ้ามีสามประพจน์คือ p, q และ r แล้วจะมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่พิจารณาทั้งหมด 8 กรณี ดังนี้



p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

ถ้ามีจำนวนประพจน์มากกว่านี้ การหากรณีทั้งหมดที่จะพิจารณาสามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 4

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงสร้างตารางค่าความจริงของ $(p \to q) \to (\sim p \wedge \sim q)$

วิธีทำ รูปแบบของประพจน์ $(p \to q) \to (\sim p \wedge \sim q)$ ประกอบด้วยประพจน์ย่อยสองประพจน์ คือ p และ q จึงมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด 4 กรณี จะได้ตารางค่าความจริงของ $(p \to q) \to (\sim p \wedge \sim q)$ ดังนี้

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \to q) \to (\sim p \wedge \sim q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T

ตัวอย่างที่ 5

กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ จงสร้างตารางค่าความจริงของ $(p \wedge q) \to r$

วิธีทำ รูปแบบของประพจน์ $(p \wedge q) \to r$ ประกอบด้วยประพจน์ย่อยสามประพจน์ คือ p, q และ r จึงมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด 8 กรณี จะได้ตารางค่าความจริงของ $(p \wedge q) \to r$ ดังนี้

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

แบบฝึกหัด 2.4

กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ จงสร้างตารางแสดงค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์ต่อไปนี้

1. $p \vee (q \rightarrow p)$
2. $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$
3. $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$
4. $(q \vee \sim q) \leftrightarrow r$
5. $\sim q \leftrightarrow [p \wedge (q \rightarrow \sim p)]$
6. $(q \wedge r) \rightarrow (r \vee p)$

2.5 รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน

ในตรรกศาสตร์ ถ้ารูปแบบของประพจน์สองรูปแบบใดมีค่าความจริงตรงกันกรณีต่อกรณี แล้วจะสามารถนำไปใช้แทนกันได้ เรียกรูปแบบของประพจน์ทั้งสองว่าเป็น **รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน** เช่น $p \rightarrow q$ กับ $\sim p \vee q$ เป็นรูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน ซึ่งแสดงการตรวจสอบความสมมูลได้ดังนี้

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

จะเห็นว่า ค่าความจริงของ $p \rightarrow q$ กับ $\sim p \vee q$ ตรงกันกรณีต่อกรณี
ดังนั้น $p \rightarrow q$ **สมมูลกับ** $\sim p \vee q$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

ตัวอย่างที่ 6

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่า $p \vee q$ สมมูลกับ $q \vee p$ หรือไม่

วิธีทำ สร้างตารางค่าความจริงของ $p \vee q$ กับ $q \vee p$ ได้ดังนี้

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

จะเห็นว่า ค่าความจริงของ $p \vee q$ กับ $q \vee p$ ตรงกันกรณีต่อกรณี
ดังนั้น $p \vee q$ สมมูลกับ $q \vee p$ ■

ตัวอย่างที่ 7

กำหนดให้ p เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่า p สมมูลกับ $\sim(\sim p)$ หรือไม่

วิธีทำ สร้างตารางค่าความจริงของ p กับ $\sim(\sim p)$ ได้ดังนี้

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F

จะเห็นว่า ค่าความจริงของ p กับ $\sim(\sim p)$ ตรงกันกรณีต่อกรณี
ดังนั้น p สมมูลกับ $\sim(\sim p)$ ■

นอกจากการใช้ตารางค่าความจริงตรวจสอบการสมมูลกันของรูปแบบของประพจน์สองรูปแบบ แล้วยังสามารถใช้รูปแบบของประพจน์ที่ทราบมาแล้วว่าสมมูลกับรูปแบบของประพจน์ที่ต้องการตรวจสอบมาช่วยในการพิจารณา ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 8

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่า $p \to q$ สมมูลกับ $\sim q \to \sim p$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
p \to q &\equiv \sim p \vee q \\
&\equiv q \vee \sim p \\
&\equiv \sim(\sim q) \vee \sim p \\
&\equiv \sim q \to \sim p
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $p \to q$ สมมูลกับ $\sim q \to \sim p$ ■

รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกันที่ควรทราบมีดังนี้

$$
\begin{aligned}
p &\equiv \sim(\sim p) \\
p \wedge q &\equiv q \wedge p \\
p \vee q &\equiv q \vee p \\
\sim(p \wedge q) &\equiv \sim p \vee \sim q \\
\sim(p \vee q) &\equiv \sim p \wedge \sim q \\
p \to q &\equiv \sim p \vee q \\
p \to q &\equiv \sim q \to \sim p \\
p \leftrightarrow q &\equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \\
p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\
p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 9

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่า $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim(\sim q \wedge p)$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} p \rightarrow q &\equiv \sim p \vee q \\ &\equiv q \vee \sim p \\ &\equiv \sim(\sim q) \vee \sim p \\ &\equiv \sim(\sim q \wedge p) \end{aligned}$$

ดังนั้น $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim(\sim q \wedge p)$ ■

ตัวอย่างที่ 10

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่า $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim p \wedge q$ หรือไม่

วิธีทำ สร้างตารางค่าความจริงของ $p \rightarrow q$ กับ $\sim p \wedge q$ ได้ดังนี้

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	F

จะเห็นว่า ค่าความจริงของ $p \rightarrow q$ กับ $\sim p \wedge q$ มีบางกรณีที่ต่างกัน
ดังนั้น $p \rightarrow q$ ไม่สมมูลกับ $\sim p \wedge q$ ■

การตรวจสอบว่าประพจน์สองประพจน์ที่อยู่ในรูปข้อความสมมูลกันหรือไม่ สามารถทำได้โดยเปลี่ยนประพจน์ที่อยู่ในรูปข้อความให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ แล้วพิจารณาว่ารูปแบบของประพจน์ทั้งสองสมมูลกันหรือไม่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 11

จงตรวจสอบว่าประพจน์สองประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่

"ถ้า 8^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว 8 เป็นจำนวนคู่"

"ถ้า 8 ไม่เป็นจำนวนคู่ แล้ว 8^2 ไม่เป็นจำนวนคู่"

วิธีทำ ให้ p แทน "8^2 เป็นจำนวนคู่"

และ q แทน "8 เป็นจำนวนคู่"

ดังนั้น $p \to q$ แทน "ถ้า 8^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว 8 เป็นจำนวนคู่"

และ $\sim q \to \sim p$ แทน "ถ้า 8 ไม่เป็นจำนวนคู่ แล้ว 8^2 ไม่เป็นจำนวนคู่"

เนื่องจาก $p \to q$ สมมูลกับ $\sim q \to \sim p$

ดังนั้น ประพจน์ทั้งสองประพจน์จึงสมมูลกัน ■

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงเขียนข้อความที่สมมูลกับข้อความต่อไปนี้
   1) $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนจริง
   2) ภพหรือภูมิเป็นนักเรียน และ ภพหรือภัทรเป็นนักเรียน

2. จงพิจารณาว่ารูปแบบของประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกับรูปแบบของประพจน์ในข้อใด
   1) $p \leftrightarrow q$
      (ก) $(p \to q) \wedge (q \wedge \sim p)$ (ข) $(\sim q \to \sim p) \wedge (\sim q \vee p)$
   2) $(p \to q) \to r$
      (ก) $(\sim p \to r) \wedge (q \to r)$ (ข) $(p \to r) \wedge (q \to r)$
   3) $(p \to r) \wedge (q \to r)$
      (ก) $\sim (p \vee q) \to r$ (ข) $\sim (p \vee q) \vee r$

4) $p \rightarrow \sim(q \rightarrow p)$
   (ก) $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$ (ข) $\sim p \vee (p \vee q)$
5) $\sim p \rightarrow [q \rightarrow (r \vee p)]$
   (ก) $(p \wedge \sim q) \vee r$ (ข) $(p \vee \sim q) \vee r$
6) $\sim[(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)]$
   (ก) $(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim r)$ (ข) $p \wedge \sim(q \rightarrow r)$

3. "รูปแบบของประพจน์ (ก) เป็นนิเสธของรูปแบบของประพจน์ (ข) เมื่อค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์ (ก) ตรงข้ามกับค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์ (ข) ทุกกรณี" จงตรวจสอบแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า (ก) กับ (ข) เป็นนิเสธกันหรือไม่
   1) (ก) $p \wedge q$ (ข) $\sim p \wedge \sim q$
   2) (ก) $p \vee q$ (ข) $\sim p \wedge \sim q$
   3) (ก) $p \rightarrow q$ (ข) $p \wedge \sim q$
   4) (ก) $p \rightarrow q$ (ข) $\sim p \rightarrow \sim q$
   5) (ก) $p \leftrightarrow q$ (ข) $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
   6) (ก) $\sqrt{2}$ หรือ $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะ (ข) $\sqrt{2}$ หรือ $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
   7) (ก) ถ้า $2+1=3$ แล้ว 3 เป็นจำนวนนับ (ข) 3 ไม่ใช่จำนวนนับ แต่ $2+1=3$
   8) (ก) 4 เป็นจำนวนคู่และเป็นจำนวนเต็ม (ข) 4 เป็นจำนวนคี่หรือไม่ใช่จำนวนเต็ม

2.6 สัจนิรันดร์

พิจารณาค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์ $[(p \to q) \wedge p] \to q$

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

จะเห็นว่ารูปแบบของประพจน์ $[(p \to q) \wedge p] \to q$ มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี จะกล่าวว่า รูปแบบของประพจน์ $[(p \to q) \wedge p] \to q$ เป็น **สัจนิรันดร์ (tautology)**

บทนิยาม 1

รูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี เรียกว่า สัจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 12

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงแสดงว่า $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ เป็นสัจนิรันดร์

วิธีทำ สร้างตารางค่าความจริงของ $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ ได้ดังนี้

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

จะเห็นว่ารูปแบบของประพจน์ $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ เป็นจริงทุกกรณี
ดังนั้น รูปแบบของประพจน์ $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ เป็นสัจนิรันดร์ ■

ตัวอย่างที่ 13

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่ารูปแบบของประพจน์ $[(p \to q) \wedge \sim p] \to \sim q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีทำ สร้างตารางค่าความจริงของ $[(p \to q) \wedge \sim p] \to \sim q$ ได้ดังนี้

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \sim p$	$[(p \to q) \wedge \sim p] \to \sim q$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T

จะเห็นว่ากรณีที่ p เป็นเท็จ และ q เป็นจริง
ทำให้รูปแบบของประพจน์ $[(p \to q) \wedge \sim p] \to \sim q$ เป็นเท็จ
ดังนั้น รูปแบบของประพจน์ $[(p \to q) \wedge \sim p] \to \sim q$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ ■

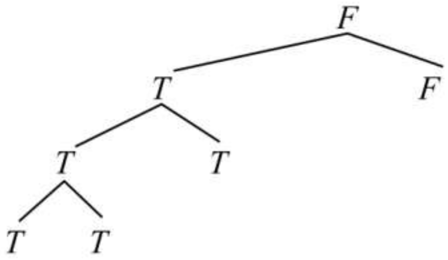
นอกจากนี้ยังสามารถตรวจสอบความเป็นสัจนิรันดร์ของประพจน์ เมื่อรูปแบบของประพจน์เชื่อมด้วย "ถ้า...แล้ว..." โดย **วิธีการหาข้อขัดแย้ง** ซึ่งวิธีนี้จะสมมติให้รูปแบบของประพจน์ที่กำหนดให้เป็นเท็จ ซึ่งสามารถเกิดขึ้นได้เพียงกรณีเดียวคือ เมื่อเหตุเป็นจริง และผลเป็นเท็จ แล้วจึงหาค่าความจริงของประพจน์ย่อย หากมีข้อขัดแย้ง แสดงว่า รูปแบบของประพจน์นั้นเป็นสัจนิรันดร์ แต่ถ้าไม่มีข้อขัดแย้ง แสดงว่า รูปแบบของประพจน์นั้นไม่เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 14

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่ารูปแบบของประพจน์ $\left[(p \to q) \wedge p\right] \to {\sim} q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีทำ สมมติว่า $\left[(p \to q) \wedge p\right] \to {\sim} q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$$\left[\ (\ p \to q\ )\ \wedge\ p\ \right] \quad \to \quad {\sim} q$$



จากแผนภาพ จะเห็นว่า เมื่อสมมติให้ $\left[(p \to q) \wedge p\right] \to {\sim} q$ เป็นเท็จ จะพบว่าค่าความจริงของประพจน์ย่อยไม่ขัดแย้งกัน

นั่นคือ มีกรณีที่ p เป็นจริง และ q เป็นจริง ที่ทำให้รูปแบบของประพจน์ $\left[(p \to q) \wedge p\right] \to {\sim} q$ เป็นเท็จ

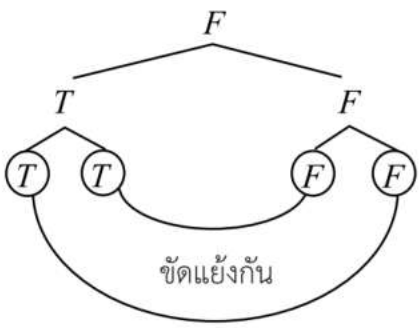
ดังนั้น รูปแบบของประพจน์ $\left[(p \to q) \wedge p\right] \to {\sim} q$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ ■

ตัวอย่างที่ 15

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่ารูปแบบของประพจน์ $(p \wedge q) \rightarrow (q \vee p)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีทำ สมมติว่า $(p \wedge q) \rightarrow (q \vee p)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$$(\ p \wedge q\ ) \quad \rightarrow \quad (\ q \vee p\ )$$



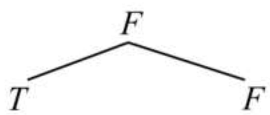
จากแผนภาพ จะเห็นว่า ค่าความจริงของ p และ q เป็นได้ทั้งจริงและเท็จ
ดังนั้น รูปแบบของประพจน์ $(p \wedge q) \rightarrow (q \vee p)$ เป็นสัจนิรันดร์ ■

ตัวอย่างที่ 16

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่ารูปแบบของประพจน์ $({\sim} q \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow {\sim} p)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีทำ สมมติว่า $({\sim} q \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow {\sim} p)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$$({\sim} q \rightarrow p) \quad \rightarrow \quad (q \rightarrow {\sim} p)$$



จากแผนภาพ การหาค่าความจริงของ p และ q จะพิจารณาจาก $q \rightarrow {\sim} p$ ซึ่งมีค่าความจริงเป็นเท็จ ทำให้ค่าความจริงของ p และ q มีได้เพียงกรณีเดียว คือ p เป็นจริง และ q เป็นจริง และทำให้ได้ว่า ${\sim} q \rightarrow p$ เป็นจริง

จะเห็นว่า มีกรณีที่ p เป็นจริง และ q เป็นจริง ที่ทำให้ $(\sim q \to p) \to (q \to \sim p)$ เป็นเท็จ ดังนั้น รูปแบบของประพจน์ $(\sim q \to p) \to (q \to \sim p)$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ ■

แบบฝึกหัด 2.6

กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ จงตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่กำหนดให้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1. $[(p \to q) \to p] \to p$
2. $\sim (p \to q) \to \sim q$
3. $[\sim (p \to q)] \to (\sim p \leftrightarrow q)$
4. $\sim (p \wedge q) \to \sim (p \leftrightarrow q)$
5. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

2.7 การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผลคือ การอ้างว่า เมื่อมีประพจน์ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ชุดหนึ่ง แล้วสามารถสรุปประพจน์ C ประพจน์หนึ่งได้ การอ้างเหตุผลประกอบด้วยส่วนสำคัญสองส่วนคือ **เหตุ**หรือ**สิ่งที่กำหนดให้** ได้แก่ ประพจน์ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ และ **ผล**หรือ**ข้อสรุป** คือ ประพจน์ C โดยใช้ตัวเชื่อม $\wedge$ เชื่อมเหตุทั้งหมดเข้าด้วยกัน และใช้ตัวเชื่อม $\to$ เชื่อมส่วนที่เป็นเหตุกับผลดังนี้

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to C$$

จะกล่าวว่า การอ้างเหตุผลนี้ **สมเหตุสมผล (valid)** ถ้ารูปแบบของประพจน์ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to C$ เป็นสัจนิรันดร์ และจะกล่าวว่า การอ้างเหตุผลนี้ **ไม่สมเหตุสมผล (invalid)** ถ้ารูปแบบของประพจน์ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to C$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้น ในการตรวจสอบความสมเหตุสมผลจึงใช้วิธีเดียวกับการตรวจสอบสัจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 17

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $p \rightarrow q$

2. p

ผล q

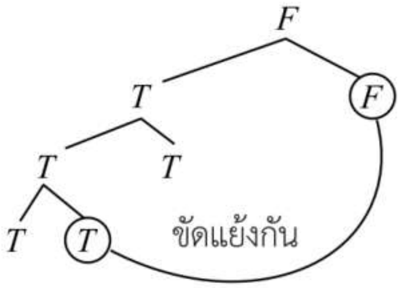
วิธีทำ **ขั้นที่ 1** ใช้ $\wedge$ เชื่อมเหตุเข้าด้วยกัน และใช้ $\rightarrow$ เชื่อมส่วนที่เป็นเหตุกับผล

จะได้รูปแบบของประพจน์คือ $\left[(p \rightarrow q) \wedge p\right] \rightarrow q$

ขั้นที่ 2 ตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่ได้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

สมมติให้ $\left[(p \rightarrow q) \wedge p\right] \rightarrow q$ เป็นเท็จ

$$\left[(\ p \rightarrow q\ ) \wedge p\ \right] \quad \rightarrow \quad q$$



จากแผนภาพ แสดงว่า รูปแบบของประพจน์ $\left[(p \rightarrow q) \wedge p\right] \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 18

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $p \to q$

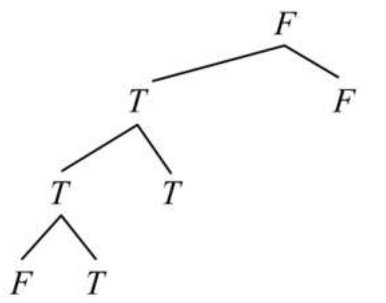
2. $\sim p$

ผล $\sim q$

วิธีทำ **ขั้นที่ 1** ใช้ $\wedge$ เชื่อมเหตุเข้าด้วยกัน และใช้ $\to$ เชื่อมส่วนที่เป็นเหตุกับผล จะได้รูปแบบของประพจน์ คือ $\left[(p \to q) \wedge \sim p\right] \to \sim q$

ขั้นที่ 2 ตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่ได้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ สมมติให้ $\left[(p \to q) \wedge \sim p\right] \to \sim q$ เป็นเท็จ

$$\left[(p \to q) \wedge \sim p\ \right] \ \to \ \sim q$$



จากแผนภาพ มีกรณีที่ p เป็นเท็จ และ q เป็นจริง ที่ทำให้ $\left[(p \to q) \wedge \sim p\right] \to \sim q$ เป็นเท็จ

แสดงว่า รูปแบบของประพจน์ $\left[(p \to q) \wedge \sim p\right] \to \sim q$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 19

จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้าฝนตกที่บ้านของสุชาดา แล้วหลังคาบ้านของสุชาดาเปียก

2. หลังคาบ้านของสุชาดาไม่เปียก

ผล ฝนไม่ตกที่บ้านของสุชาดา

วิธีทำ ให้ p แทนประพจน์ "ฝนตกที่บ้านของสุชาดา"

q แทนประพจน์ "หลังคาบ้านของสุชาดาเปียก"

เขียนแทนข้อความข้างต้นในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

เหตุ 1. $p \rightarrow q$

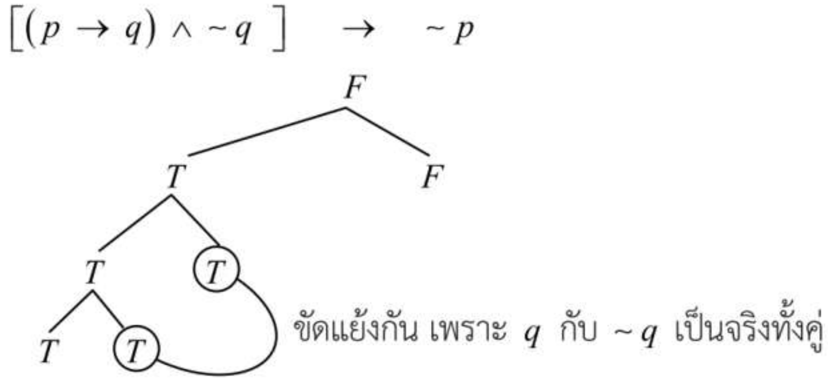
2. $\sim q$

ผล $\sim p$

ดังนั้น รูปแบบของประพจน์ในการอ้างเหตุผลนี้ คือ $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

ตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่ได้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

สมมติให้ $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ เป็นเท็จ



จากแผนภาพ แสดงว่า รูปแบบของประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล ■

ตัวอย่างที่ 20

จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้าแป้งได้โบนัส แล้วแป้งจะฝากเงินกับธนาคาร 10,000 บาท

2. แป้งฝากเงินกับธนาคาร 10,000 บาท

ผล แป้งได้โบนัส

วิธีทำ ให้ p แทนประพจน์ "แป้งได้โบนัส"

q แทนประพจน์ "แป้งฝากเงินกับธนาคาร 10,000 บาท"

เขียนแทนข้อความข้างต้นในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

เหตุ 1. $p \to q$

2. q

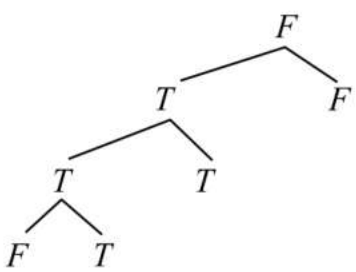
ผล p

ดังนั้น รูปแบบของประพจน์ในการอ้างเหตุผลนี้ คือ $[(p \to q) \wedge q] \to p$

ตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่ได้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

สมมติให้ $[(p \to q) \wedge q] \to p$ เป็นเท็จ

$$[(\ p \to q\ ) \wedge q\ ] \to p$$



จากแผนภาพ มีกรณีที่ p เป็นเท็จ และ q เป็นจริง ที่ทำให้ $[(p \to q) \wedge q] \to p$ เป็นเท็จ

แสดงว่า รูปแบบของประพจน์ $[(p \to q) \wedge q] \to p$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล ■

ตัวอย่างที่ 21

จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. นุ่นซื้อรถคันใหม่ หรือ นุ่นลงทุนในตลาดหุ้น

2. นุ่นไม่ซื้อรถคันใหม่

ผล นุ่นลงทุนในตลาดหุ้น

วิธีทำ ให้ p แทนประพจน์ "นุ่นซื้อรถคันใหม่"

q แทนประพจน์ "นุ่นลงทุนในตลาดหุ้น"

เขียนแทนข้อความข้างต้นในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

เหตุ 1. $p \vee q$

2. $\sim p$

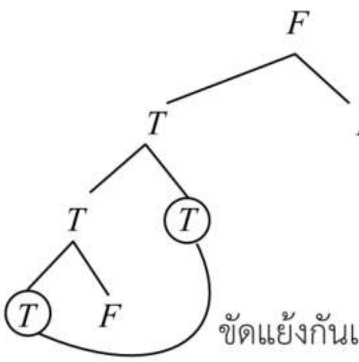
ผล q

ดังนั้น รูปแบบของประพจน์ในการอ้างเหตุผลนี้ คือ $\left[(p \vee q) \wedge \sim p\right] \rightarrow q$

ตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่ได้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

สมมติให้ $\left[(p \vee q) \wedge \sim p\right] \rightarrow q$ เป็นเท็จ

$$\left[(p \vee q) \wedge \sim p\right] \rightarrow q$$



ขัดแย้งกันเพราะ p กับ $\sim p$ เป็นจริงทั้งคู่

จากแผนภาพ แสดงว่า รูปแบบของประพจน์ $\left[(p \vee q) \wedge \sim p\right] \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล ■

ตัวอย่างที่ 22

จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้าไฟฟ้าดับ แล้วโรงแรมต้องใช้เครื่องปั่นไฟ

2. ถ้าโรงแรมต้องใช้เครื่องปั่นไฟ แล้วลิฟต์จะทำงานไม่ได้

ผล ถ้าไฟฟ้าดับ แล้วลิฟต์จะทำงานไม่ได้

วิธีทำ ให้ p แทนประพจน์ "ไฟฟ้าดับ"

q แทนประพจน์ "โรงแรมต้องใช้เครื่องปั่นไฟ"

r แทนประพจน์ "ลิฟต์จะทำงานไม่ได้"

เขียนแทนข้อความข้างต้นในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

เหตุ 1. $p \to q$

2. $q \to r$

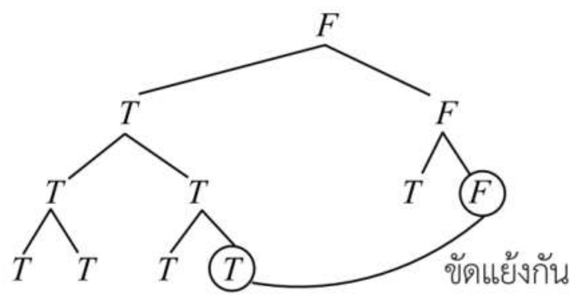
ผล $p \to r$

ดังนั้น รูปแบบของประพจน์ในการอ้างเหตุผลนี้ คือ $\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \to (p \to r)$

ตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่ได้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

สมมติให้ $\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \to (p \to r)$ เป็นเท็จ

$$\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \quad \to \quad (p \to r)$$



จากแผนภาพ แสดงว่า รูปแบบของประพจน์ $\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \to (p \to r)$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล ■

ตัวอย่างที่ 23

จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้าเก่งไปทำงาน แล้วก้องอยู่บ้าน

2. ถ้าก้องไม่อยู่บ้าน แล้วกล้าเป็นคนดูแลบ้าน

3. กล้าไม่ได้เป็นคนดูแลบ้าน

ผล เก่งไม่ได้ไปทำงาน

วิธีทำ ให้ p แทนประพจน์ "เก่งไปทำงาน"

q แทนประพจน์ "ก้องอยู่บ้าน"

r แทนประพจน์ "กล้าเป็นคนดูแลบ้าน"

เขียนแทนข้อความข้างต้นในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

เหตุ 1. $p \to q$

2. $\sim q \to r$

3. $\sim r$

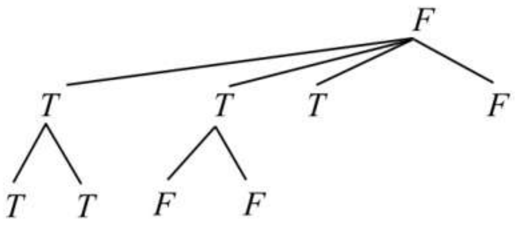
ผล $\sim p$

ดังนั้น รูปแบบของประพจน์ในการอ้างเหตุผลนี้ คือ $\left[(p \to q) \wedge (\sim q \to r) \wedge \sim r\right] \to \sim p$

ตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่ได้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

สมมติให้ $\left[(p \to q) \wedge (\sim q \to r) \wedge \sim r\right] \to \sim p$ เป็นเท็จ

$$\left[(p \to q) \wedge (\sim q \to r) \wedge \sim r\right] \quad \to \quad \sim p$$



จากแผนภาพ แสดงว่า รูปแบบของประพจน์ $\left[(p \to q) \wedge (\sim q \to r) \wedge \sim r\right] \to \sim p$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล ■

เสริมสมอง : เหตุผลวิบัติ

เหตุผลวิบัติ (fallacy) เป็นการใช้เหตุผลที่ไม่ดี ซึ่งมีทั้งผู้ที่ใช้เหตุผลวิบัติในการหลอกลวงให้ผู้ฟังยอมรับข้อสรุปที่เสนอด้วยเหตุผลที่ไร้น้ำหนัก และผู้ที่ใช้เหตุผลวิบัติโดยไม่รู้ตัว เช่น “ถ้าผมรวยแล้วผมไม่โกง และถ้าผมไม่โกงแล้วผมเป็นคนดี ดังนั้น ถ้าผมรวยแล้วผมเป็นคนดี” “การใช้ปืนยิงบุคคลคืออาชญากรรม ตำรวจใช้ปืนยิงผู้ร้าย ดังนั้น ตำรวจเป็นอาชญากร”

แบบฝึกหัด 2.7

1. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

   1) เหตุ 1. $p \wedge q$

      2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

      ผล r

   2) เหตุ 1. $p \rightarrow (q \vee r)$

      2. $\sim q \vee \sim r$

      ผล $\sim p$

   3) เหตุ 1. $p \vee q$

      2. $\sim p \vee r$

      3. $\sim r$

      ผล p

   4) เหตุ 1. $\sim p \rightarrow q$

      2. p

      3. r

      ผล $\sim q$

5) **เหตุ** 1. $p \to \sim q$
2. $r \vee p$
3. q
4. $r \to s$

ผล s

2. จงตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลในแต่ละข้อต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

1) **เหตุ** 1. พัฒนาชอบสีฟ้า หรือ พัฒนีชอบสีชมพู
2. พัฒนาไม่ชอบสีฟ้า

ผล พัฒนีไม่ชอบสีชมพู

2) **เหตุ** 1. ถ้าโชคสร้างบ้านหลังใหม่เสร็จ แล้วครอบครัวของโชคจะย้ายมาอยู่ด้วย
2. ถ้าครอบครัวของโชคย้ายมาอยู่ด้วย แล้วโชคจะได้ดูแลพ่อแม่ที่ชราแล้ว

ผล ถ้าโชคสร้างบ้านหลังใหม่เสร็จ โชคจะได้ดูแลพ่อแม่ที่ชราแล้ว

3) **เหตุ** 1. ถ้าชัยทำยอดขายได้ตามเป้าหมายที่ผู้จัดการตั้งไว้ แล้วเขาจะได้รับโบนัส
2. ชัยทำยอดขายได้ตามเป้าหมายที่ผู้จัดการตั้งไว้

ผล ชัยได้รับโบนัส

4) **เหตุ** 1. ถ้าอิงฟ้าซื้อกระเป๋าถือสีดำ แล้วอิงฟ้าจะซื้อรองเท้าสีดำด้วย
2. อิงฟ้าซื้อรองเท้าสีดำ

ผล อิงฟ้าซื้อกระเป๋าถือสีดำ

5) **เหตุ** 1. ถ้ามะนาวพบคนพิการที่ขายสลากกินแบ่งรัฐบาล แล้วมะนาวจะซื้อสลากกินแบ่งรัฐบาล
2. มะนาวไม่ได้ซื้อสลากกินแบ่งรัฐบาล

ผล มะนาวไม่พบคนพิการที่ขายสลากกินแบ่งรัฐบาล

กิจกรรม : ใครคือฆาตกร

ถ้าคุณได้รับหน้าที่ให้สอบสวนผู้ต้องสงสัย 3 คน ในคดีฆาตกรรม ซึ่งแต่ละคนมีคำให้การดังต่อไปนี้

นาย ก : นาย ข เป็นฆาตกร และนาย ค เป็นผู้บริสุทธิ์

นาย ข : ถ้านาย ก เป็นฆาตกร แล้วนาย ค จะเป็นฆาตกรด้วย

นาย ค : ผมบริสุทธิ์ แต่คนที่เหลืออย่างน้อยหนึ่งคนเป็นฆาตกร

ถ้ามีเพียงคนเดียวที่พูดจริง โดยผู้บริสุทธิ์พูดจริง และฆาตกรพูดเท็จ
คุณสามารถบอกได้หรือไม่ว่า ... **ใครคือฆาตกร**

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ถ้ากำหนดให้ p แทนประพจน์ "นาย ก เป็นผู้บริสุทธิ์"
   q แทนประพจน์ "นาย ข เป็นผู้บริสุทธิ์"
   r แทนประพจน์ "นาย ค เป็นผู้บริสุทธิ์"
   จงเขียนคำให้การของทั้งสามคนโดยใช้ p, q และ r
2. สมมติให้ นาย ก เป็นคนเดียวที่พูดจริง
   2.1 หาค่าความจริงของประพจน์ p, q และ r
   2.2 หาค่าความจริงของคำให้การของนาย ก นาย ข และนาย ค
   2.3 ค่าความจริงที่ได้ในข้อ 2.2 สอดคล้องกับที่สมมติว่านาย ก เป็นคนเดียวที่พูดจริง หรือไม่
3. สมมติให้ นาย ข เป็นคนเดียวที่พูดจริง
   3.1 หาค่าความจริงของประพจน์ p, q และ r
   3.2 หาค่าความจริงของคำให้การของนาย ก นาย ข และนาย ค
   3.3 ค่าความจริงที่ได้ในข้อ 3.2 สอดคล้องกับที่สมมติว่านาย ข เป็นคนเดียวที่พูดจริง หรือไม่
4. สมมติให้ นาย ค เป็นคนเดียวที่พูดจริง
   4.1 หาค่าความจริงของประพจน์ p, q และ r
   4.2 หาค่าความจริงของคำให้การของนาย ก นาย ข และนาย ค
   4.3 ค่าความจริงที่ได้ในข้อ 4.2 สอดคล้องกับที่สมมติว่านาย ค เป็นคนเดียวที่พูดจริง หรือไม่
5. จากข้อ 2, 3 และ 4 ข้อใดที่ค่าความจริงที่ได้จากคำให้การของนาย ก นาย ข และนาย ค สอดคล้องกับที่สมมติไว้ สรุปได้ว่าใครคือคนที่พูดจริง และใครคือฆาตกร

2.8 ประโยคเปิด

พิจารณาประโยค "เขาเป็นนักคณิตศาสตร์" ประโยคนี้ยังไม่ทราบว่าเป็นจริงหรือเท็จ จนกว่าจะทราบว่า เขา ในที่นี้เป็นใคร ถ้าแทน เขา ด้วย ยุคลิด ก็จะได้ประโยคที่เป็นจริงคือ ยุคลิดเป็นนักคณิตศาสตร์

ในทำนองเดียวกัน ประโยค "$x>2$" ถ้าแทน x ด้วย 3 จะได้ประโยค $3>2$ ซึ่งเป็นจริง แต่ถ้าแทน x ด้วย 2 จะได้ประโยค $2>2$ ซึ่งเป็นเท็จ

คำว่า เขา และ x ในประโยคข้างต้น เรียกว่า **ตัวแปร** และประโยคดังกล่าวเรียกว่า **ประโยคเปิด**

ตัวแปรที่ใช้ในประโยคเปิดจะแทนที่ด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ เช่น ในประโยคที่กล่าวมา คำว่า เขา ให้แทนที่ด้วยชื่อคน จะถือว่าเซตของคนเป็นเอกภพสัมพัทธ์

ในประโยค $x>2$ ให้แทน x ด้วยจำนวน ซึ่งอาจกำหนดให้เซตของจำนวนเซตใดเซตหนึ่งเป็นเอกภพสัมพัทธ์

บทนิยาม 2

ประโยคเปิด คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปร

ประโยคเปิดจะไม่สามารถระบุค่าความจริงได้ว่าจริงหรือเท็จ แต่เมื่อแทนตัวแปรในประโยคเปิดด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ จะได้ประพจน์ซึ่งมีค่าความจริง

กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง
พิจารณาข้อความ $2x+1=3$ จะเห็นว่าข้อความนี้เป็นประโยคเปิด เพราะมีตัวแปร x และเมื่อแทน x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ แล้วได้ประพจน์ เช่น

แทน x ด้วย 0 ได้ $0+1=3$ เป็นเท็จ
แทน x ด้วย 1 ได้ $2+1=3$ เป็นจริง
แทน x ด้วย 2 ได้ $4+1=3$ เป็นเท็จ

ถ้าพิจารณาเฉพาะนิพจน์ $2x+1$ จะเห็นว่าไม่เป็นประโยคเปิด เพราะเมื่อแทน x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ แล้วไม่เป็นประพจน์

สัญลักษณ์แทนประโยคเปิดใด ๆ ที่มี x เป็นตัวแปร เขียนแทนด้วย $P(x)$

การเชื่อมประโยคเปิดด้วยตัวเชื่อม $\wedge, \vee, \rightarrow$ และ $\leftrightarrow$ ตลอดจนการเติม $\sim$ ทำได้เช่นเดียวกับการเชื่อมประพจน์

แบบฝึกหัด 2.8

ประโยคต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือประโยคเปิด หรือไม่ใช่ทั้งประพจน์และประโยคเปิด

1. เขากำลังเรียนอยู่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ใช่หรือไม่
2. ถ้า $\{3\} \not\subset \{0,1\}$ แล้ว $3 \in \{0,1\}$
3. $x^2+x-6=0$
4. เธอเป็นนักร้องเพลงไทยสากลของโรงเรียน
5. x^2-1
6. กรุณาทิ้งขยะให้เป็นที่
7. $\frac{1}{2}x-x^2 \geq 6$
8. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^2$ และ $-4<-2$
9. $\{1\} \subset \{1, \{1, 2\}\}$
10. ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $\sqrt{x}$ ไม่ใช่จำนวนจริง

2.9 ตัวบ่งปริมาณ

ในวิชาคณิตศาสตร์จะพบว่ามีการใช้ข้อความ **สำหรับ x ทุกตัว** และ **สำหรับ x บางตัว** เสมอ เช่น

สำหรับ x ทุกตัว $x+0=x$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง

สำหรับ x บางตัว $x+x=x^2$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง

เรียก "สำหรับ...ทุกตัว" และ "สำหรับ...บางตัว" ว่า **ตัวบ่งปริมาณ (quantifier)** แทนด้วยสัญลักษณ์ $\forall$ และ $\exists$ ตามลำดับ โดยใช้สัญลักษณ์

$\forall x$ แทน สำหรับ x ทุกตัว

$\exists x$ แทน สำหรับ x บางตัว

U แทน เอกภพสัมพัทธ์

$\mathbb{R}$ แทน เซตของจำนวนจริง

$\mathbb{Q}$ แทน เซตของจำนวนตรรกยะ

$\mathbb{Z}$ แทน เซตของจำนวนเต็ม

$\mathbb{N}$ แทน เซตของจำนวนนับ

พิจารณาข้อความ "สำหรับ x ทุกตัว $x+0=x$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง" และ "สำหรับ x บางตัว $x+x=x^2$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง" จะเห็นว่าข้อความดังกล่าวประกอบด้วยส่วนที่เป็นตัวบ่งปริมาณและส่วนที่เป็นประโยคเปิด ข้อความในลักษณะนี้เรียกว่า **ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ (quantified statement)** และข้อความข้างต้นอาจเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น $\forall x[x+0=x], U=\mathbb{R}$ อาจเขียนแทนด้วย $\forall x\in\mathbb{R}[x+0=x]$ และ $\exists x[x+x=x^2], U=\mathbb{R}$ อาจเขียนแทนด้วย $\exists x\in\mathbb{R}[x+x=x^2]$ ตามลำดับ

ตัวบ่งปริมาณที่ปรากฏในข้อความนั้น บางครั้งไม่ได้ปรากฏอย่างชัดเจน แต่ก็สามารถบอกได้ว่าข้อความดังกล่าวมีตัวบ่งปริมาณแบบใดปรากฏอยู่ และข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณซึ่งมีความหมายเหมือนกันอาจเขียนโดยใช้คำที่ต่างกัน เช่น

ประโยค "จำนวนจริงแต่ละจำนวนรวมกับศูนย์แล้วเท่ากับจำนวนนั้น"

และ "จำนวนจริงทุกจำนวนรวมกับศูนย์แล้วเท่ากับจำนวนนั้น"

ประโยคทั้งสองมีตัวบ่งปริมาณประเภทเดียวกัน คือ สำหรับ...ทุกตัว

สำหรับประโยค “มีจำนวนจริงอย่างน้อยหนึ่งจำนวนที่น้อยกว่าศูนย์” และ “จำนวนจริงบางจำนวนน้อยกว่าศูนย์” ประโยคทั้งสองมีตัวบ่งปริมาณประเภทเดียวกัน คือ สำหรับ...บางตัว

ตัวอย่างที่ 24

จงเขียนข้อความต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ เมื่อ $U = \mathbb{R}$

1) สำหรับ x ทุกจำนวน $x + x = 2x$
2) มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x + 0 = 2x$
3) สำหรับ x ทุกจำนวน ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว x เป็นจำนวนจริง
4) จำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจำนวนเต็ม
5) จำนวนเต็มบางจำนวนยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 1

วิธีทำ ให้ $U = \mathbb{R}$

1) $\forall x[x + x = 2x]$
2) $\exists x[x + 0 = 2x]$
3) $\forall x[x \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in \mathbb{R}]$
   (ข้อความนี้กล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนจริง)
4) $\forall x[x \in \mathbb{Z}]$
5) จำนวนเต็มบางจำนวนยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 1 กล่าวได้อีกแบบหนึ่งว่า
   สำหรับจำนวนจริง x บางจำนวน x เป็นจำนวนเต็มและ $x^2 = 1$
   เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น $\exists x[x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 = 1]$
   (ข้อความนี้จะเขียนเป็น $\exists x[x^2 = 1]$ ไม่ได้ เพราะจะหมายถึงจำนวนจริงบางจำนวนยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 1) ■

หมายเหตุ ในกรณีที่เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง มักนิยมละการเขียนเอกภพสัมพัทธ์

ตัวอย่างที่ 25

จงเขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์ เมื่อ A และ B เป็นเซตใด ๆ

1) $A = B$ ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และสมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ A
2) $A \not\subset B$ ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกบางตัวของ A ไม่เป็นสมาชิกของ B

วิธีทำ 1) $A = B$ ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และสมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ A เขียนได้เป็น

$$\text{“}A = B\text{”} \leftrightarrow \text{“}\forall x[x \in A \rightarrow x \in B] \wedge \forall x[x \in B \rightarrow x \in A]\text{”}$$

2) $A \not\subset B$ ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกบางตัวของ A ไม่เป็นสมาชิกของ B เขียนได้เป็น

$$\text{“}A \not\subset B\text{”} \leftrightarrow \text{“}\exists x[x \in A \wedge x \notin B]\text{”}$$

■

แบบฝึกหัด 2.9

1. จงเขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์ เมื่อ $U = \mathbb{R}$
   1) จำนวนตรรกยะแต่ละจำนวนคูณกับ 1 แล้วเท่ากับจำนวนนั้น
   2) มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x^2 = 2$
   3) มีจำนวนจริง x ซึ่ง $|x| + 1 \le 1$
   4) จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนจริง
2. จงเขียนข้อความแทนข้อความที่อยู่ในรูปสัญลักษณ์ต่อไปนี้ เมื่อ $U = \mathbb{R}$
   1) $\forall x[x < 2 \rightarrow x^2 < 4]$
   2) $\forall y[y^2 - 4 = (y-2)(y+2)]$
   3) $\exists y[2y + 1 = 0]$
   4) $\exists x[x \in \mathbb{Q} \rightarrow x^2 = 2]$

2.10 ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียว

พิจารณาประโยคต่อไปนี้

$\forall x\left[x^2>0\right], U=\{0, 1, 2, 3\}$ หมายถึง สมาชิกทุกตัวใน U ยกกำลังสองแล้วมากกว่า 0

$\exists x\left[x^2>0\right], U=\{0, 1, 2, 3\}$ หมายถึง สมาชิกบางตัวใน U ยกกำลังสองแล้วมากกว่า 0

เมื่อแทนตัวแปรในประโยคเปิด $x^2>0$ ด้วยสมาชิกแต่ละตัวใน $U=\{0, 1, 2, 3\}$ จะได้ประพจน์ดังนี้

$0^2>0$ เป็นเท็จ

$1^2>0$ เป็นจริง

$2^2>0$ เป็นจริง

$3^2>0$ เป็นจริง

เนื่องจาก $0^2>0$ เป็นเท็จ จะได้ว่า "สมาชิกทุกตัวใน U ยกกำลังสองแล้วมากกว่า 0" มีค่าความจริงเป็นเท็จ

นั่นคือ $\forall x\left[x^2>0\right], U=\{0, 1, 2, 3\}$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ในทำนองเดียวกัน $\exists x\left[x^2>0\right], U=\{0, 1, 2, 3\}$ มีค่าความจริงเป็นจริง เพราะมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวใน U ที่ยกกำลังสองแล้วมากกว่า 0 เช่น $1^2>0$

$\forall x\left[x^2>0\right], U=\{1, 2, 3\}$ มีค่าความจริงเป็นจริง เพราะสมาชิกทุกตัวใน U ยกกำลังสองแล้วมากกว่า 0

$\exists x\left[x^2>0\right], U=\{1, 2, 3\}$ มีค่าความจริงเป็นจริง เพราะมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวใน U ที่ยกกำลังสองแล้วมากกว่า 0 เช่น $1^2>0$

$\exists x\left[x^2<0\right], U=\{1, 2, 3\}$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะไม่มีสมาชิกตัวใดใน U ที่ยกกำลังสองแล้วน้อยกว่า 0

จากตัวอย่างที่กล่าวมา จะเห็นได้ว่า ถ้าเติมตัวบ่งปริมาณข้างหน้าประโยคเปิดจะได้ประพจน์

การพิจารณาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณนั้น โดยทั่วไปจะพิจารณาแต่ละส่วนของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ ดังนี้

ส่วนที่ 1 **ตัวบ่งปริมาณ**
ส่วนที่ 2 **ประโยคเปิด**
ส่วนที่ 3 **เอกภพสัมพัทธ์**

ในที่นี้จะพิจารณาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียว ซึ่งเป็นประโยคเปิดที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียว และเพื่อความสะดวก จะแทนประโยคเปิดที่มีตัวแปร x ด้วย $P(x)$ ดังนั้น ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ดังนี้

$\forall x[P(x)]$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือ U
$\exists x[P(x)]$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือ U

บทนิยาม 3

$\forall x[P(x)]$ **มีค่าความจริงเป็นจริง** ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร x ใน $P(x)$ ด้วยสมาชิกแต่ละตัวในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งหมด

$\forall x[P(x)]$ **มีค่าความจริงเป็นเท็จ** ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร x ใน $P(x)$ ด้วยสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$\exists x[P(x)]$ **มีค่าความจริงเป็นจริง** ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร x ใน $P(x)$ ด้วยสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

$\exists x[P(x)]$ **มีค่าความจริงเป็นเท็จ** ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร x ใน $P(x)$ ด้วยสมาชิกแต่ละตัวในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 26

จงหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณต่อไปนี้

1) $\forall x[x<5]$ เมื่อ $U=\{0, 1, 2, 3\}$
2) $\forall x[x<5]$ เมื่อ $U=\mathbb{Z}$
3) $\exists x[x<5]$ เมื่อ $U=\mathbb{Z}$
4) $\exists x[x<5]$ เมื่อ $U=\{6, 7, 8\}$

วิธีทำ 1) ให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด $x<5$

เนื่องจาก $P(0)$ แทน $0<5$ ซึ่งเป็นจริง

$P(1)$ แทน $1<5$ ซึ่งเป็นจริง

$P(2)$ แทน $2<5$ ซึ่งเป็นจริง

$P(3)$ แทน $3<5$ ซึ่งเป็นจริง

จะเห็นว่าเมื่อแทน x ด้วยสมาชิกแต่ละตัวใน U ในประโยคเปิด $x<5$ แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริงทั้งหมด

ดังนั้น $\forall x[x<5]$ เป็นจริง เมื่อ $U=\{0, 1, 2, 3\}$

2) ให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด $x<5$

จะเห็นว่า $6\in\mathbb{Z}$ และ $P(6)$ แทน $6<5$ ซึ่งเป็นเท็จ

นั่นคือ มีสมาชิกใน $\mathbb{Z}$ อย่างน้อยหนึ่งตัวคือ 6 ที่เมื่อนำไปแทน x ใน $P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่เป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x[x<5]$ เป็นเท็จ เมื่อ $U=\mathbb{Z}$

3) เนื่องจากมีสมาชิกใน $\mathbb{Z}$ บางตัว ที่เมื่อนำไปแทน x แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริง เช่น เมื่อแทน x ด้วย 1 ใน $x<5$ จะได้ $1<5$ ซึ่งเป็นจริง

ดังนั้น $\exists x[x<5]$ เป็นจริง เมื่อ $U=\mathbb{Z}$

4) เนื่องจากไม่ว่าจะแทน x ด้วย 6 หรือ 7 หรือ 8 ใน $x<5$ จะได้ประพจน์ที่เป็นเท็จเสมอ

ดังนั้น $\exists x[x<5]$ เป็นเท็จ เมื่อ $U=\{6, 7, 8\}$ ■

ตัวอย่างที่ 27

จงหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณต่อไปนี้ เมื่อ $U=\{-1, 0, 1\}$

1) $\forall x[(x<0)\rightarrow(x^2>0)]$
2) $\forall x[x<0]\rightarrow\forall x[x^2>0]$
3) $\exists x[(x<0)\wedge(x-1=0)]$
4) $\exists x[x<0]\wedge\exists x[x-1=0]$

วิธีทำ 1) พิจารณาประโยคเปิด $x<0$ และ $x^2>0$

แทน x ด้วย -1 จะได้ $-1<0$ ซึ่งเป็นจริง และ $(-1)^2>0$ ซึ่งเป็นจริง

ดังนั้น $-1<0 \rightarrow (-1)^2>0$ เป็นจริง

แทน x ด้วย 0 จะได้ $0<0$ ซึ่งเป็นเท็จ และ $0^2>0$ ซึ่งเป็นเท็จ

ดังนั้น $0<0 \rightarrow 0^2>0$ เป็นจริง

แทน x ด้วย 1 จะได้ $1<0$ ซึ่งเป็นเท็จ และ $1^2>0$ ซึ่งเป็นจริง

ดังนั้น $1<0 \rightarrow 1^2>0$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $\forall x[(x<0)\rightarrow(x^2>0)]$ เป็นจริง

2) พิจารณาประโยคเปิด $x<0$

แทน x ด้วยสมาชิกแต่ละตัวของ U

จะได้ $-1<0$ ซึ่งเป็นจริง

$0<0$ ซึ่งเป็นเท็จ

$1<0$ ซึ่งเป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x[x<0]$ เป็นเท็จ ------- (1)

พิจารณาประโยคเปิด $x^2>0$

แทน x ด้วยสมาชิกแต่ละตัวของ U

จะได้ $(-1)^2>0$ ซึ่งเป็นจริง

$0^2>0$ ซึ่งเป็นเท็จ

$1^2>0$ ซึ่งเป็นจริง

ดังนั้น $\forall x\left[x^2 > 0\right]$ เป็นเท็จ ------- (2)

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า $\forall x\left[x < 0\right] \rightarrow \forall x\left[x^2 > 0\right]$ เป็นจริง

3) พิจารณาประโยคเปิด $(x<0) \wedge (x-1=0)$

แทน x ด้วยสมาชิกแต่ละตัวของ U

จะได้ $(-1<0) \wedge (-1-1=0)$ ซึ่งเป็นเท็จ

$(0<0) \wedge (0-1=0)$ ซึ่งเป็นเท็จ

$(1<0) \wedge (1-1=0)$ ซึ่งเป็นเท็จ

ดังนั้น $\exists x\left[(x<0) \wedge (x-1=0)\right]$ เป็นเท็จ

4) พิจารณาประโยคเปิด $x<0$

แทน x ด้วย -1 จะได้ $-1<0$ ซึ่งเป็นจริง

ดังนั้น $\exists x\left[x<0\right]$ เป็นจริง ------- (1)

พิจารณาประโยคเปิด $x-1=0$

แทน x ด้วย 1 จะได้ $1-1=0$ ซึ่งเป็นจริง

ดังนั้น $\exists x\left[x-1=0\right]$ เป็นจริง ------- (2)

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า $\exists x\left[x<0\right] \wedge \exists x\left[x-1=0\right]$ เป็นจริง ■

ตัวอย่างที่ 28

จงพิสูจน์ว่าเซตว่างเป็นสับเซตของเซตทุกเซต

วิธีทำ ให้ A เป็นเซตใด ๆ

$\varnothing \subset A$ หมายความว่า $\forall x\left[x \in \varnothing \rightarrow x \in A\right]$

พิจารณาประโยคเปิด $x \in \varnothing$ ไม่ว่าจะแทน x ด้วยสมาชิกตัวใดในเอกภพสัมพัทธ์

จะได้ประพจน์เป็นเท็จเสมอ เพราะว่า $\varnothing$ ไม่มีสมาชิก

ดังนั้น เมื่อแทน x ด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ในประโยคเปิด $x \in \varnothing \rightarrow x \in A$ จะได้ประพจน์ที่เป็นจริงเสมอ

นั่นคือ $\forall x\left[x \in \varnothing \rightarrow x \in A\right]$ เป็นจริง

ดังนั้น $\varnothing \subset A$ ■

แบบฝึกหัด 2.10

จงหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณต่อไปนี้

1. $\forall x[x^2 > 8]$ เมื่อ $U = \{-1, 0, 2\}$
2. $\exists x[x < 0]$ เมื่อ $U = \{0, 4, 7\}$
3. $\exists x[x^2 \geq 0]$ เมื่อ $U = \mathbb{Z}$
4. $\forall x[x+1=4]$ เมื่อ $U = \{1, 2, 3, 4\}$
5. $\exists x[5+x \neq 5]$ เมื่อ $U = \mathbb{Z}$
6. $\forall x[$ x เป็นจำนวนอตรรกยะ $]$ เมื่อ $U = \mathbb{R}$
7. $\forall x[$ ถ้า x เป็นจำนวนคี่ แล้ว x เป็นจำนวนเฉพาะ $]$ เมื่อ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
8. $\exists x[$ x เป็นจำนวนนับหรือเป็นจำนวนเฉพาะ $]$ เมื่อ $U = \{0, 2, 4, 6\}$
9. $\forall x[$ x เป็นจำนวนตรรกยะ $] \vee \exists x[$ x เป็นตัวประกอบของ 2 $]$ เมื่อ $U = \{0, 1, 2\}$
10. $\exists x[$ x^2 เป็นจำนวนคู่ $] \wedge \forall x[$ ถ้า x เป็นจำนวนนับ แล้ว $2x$ เป็นจำนวนคู่ $]$
    เมื่อ $U = \{0, 1, 2\}$

2.11 สมมูลและนิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

พิจารณาประโยคเปิด $P(x)\to Q(x)$ และ $\sim P(x)\vee Q(x)$ สังเกตว่าไม่ว่าจะแทน x ด้วยสมาชิกใด ๆ ในเอกภพสัมพัทธ์เดียวกัน จะได้ประพจน์ในรูป $p\to q$ และ $\sim p\vee q$ ซึ่งสมมูลกัน จึงกล่าวได้ว่า $P(x)\to Q(x)$ สมมูลกับ $\sim P(x)\vee Q(x)$ และจะใช้สมมูลของประโยคเปิดเทียบกับรูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน เช่น

1. $p\to q$ สมมูลกับ $\sim q\to\sim p$	$P(x)\to Q(x)$ สมมูลกับ $\sim Q(x)\to\sim P(x)$
2. $p\vee q$ สมมูลกับ $q\vee p$	$P(x)\vee Q(x)$ สมมูลกับ $Q(x)\vee P(x)$
3. $\sim(p\to q)$ สมมูลกับ $p\wedge\sim q$	$\sim(P(x)\to Q(x))$ สมมูลกับ $P(x)\wedge\sim Q(x)$
4. $\sim(p\wedge q)$ สมมูลกับ $\sim p\vee\sim q$	$\sim(P(x)\wedge Q(x))$ สมมูลกับ $\sim P(x)\vee\sim Q(x)$

จากสมมูลของประโยคเปิดดังกล่าว ถ้าเติมตัวบ่งปริมาณชนิดเดียวกันไว้ข้างหน้าจะได้ประพจน์ที่สมมูลกันด้วย เช่น

$$\forall x[P(x)\to Q(x)] \text{ สมมูลกับ } \forall x[\sim P(x)\vee Q(x)]$$

$$\exists x[P(x)\to Q(x)] \text{ สมมูลกับ } \exists x[\sim Q(x)\to\sim P(x)]$$

$$\exists x[\sim(P(x)\to Q(x))] \text{ สมมูลกับ } \exists x[P(x)\wedge\sim Q(x)]$$

เนื่องจากประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณเป็นประพจน์ ดังนั้น สามารถเทียบประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณที่สมมูลกัน กับรูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกันได้ เช่น

$$\forall x[P(x)]\to\exists x[Q(x)] \text{ สมมูลกับ } \sim\forall x[P(x)]\vee\exists x[Q(x)]$$

$$\exists x[P(x)]\to\exists x[Q(x)] \text{ สมมูลกับ } \sim\exists x[P(x)]\vee\exists x[Q(x)]$$

ทั้งสองประโยคที่กล่าวมาเทียบได้กับ $p\to q$ ซึ่งสมมูลกับ $\sim p\vee q$ นั่นเอง

$$\sim(\forall x[P(x)]\vee\exists x[Q(x)]) \text{ สมมูลกับ } \sim\forall x[P(x)]\wedge\sim\exists x[Q(x)]$$

ประโยคดังกล่าวเทียบได้กับ $\sim(p\vee q)$ ซึ่งสมมูลกับ $\sim p\wedge\sim q$

ตัวอย่างที่ 29

จงพิจารณาว่าประโยคในข้อต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่

1) $\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$ กับ $\forall x[Q(x) \wedge P(x)]$
2) $\exists x[P(x) \leftrightarrow Q(x)]$ กับ $\exists x[(\sim P(x) \vee Q(x)) \wedge (\sim Q(x) \vee P(x))]$
3) $\forall x[\sim(P(x) \rightarrow Q(x))]$ กับ $\forall x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$
4) $\exists x[P(x)] \wedge \forall x[Q(x)]$ กับ $\forall x[Q(x)] \wedge \exists x[P(x)]$
5) $\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]$ กับ $\sim \exists x[Q(x)] \rightarrow \sim \forall x[P(x)]$

วิธีทำ
1) สมมูลกัน เพราะ $P(x) \wedge Q(x)$ สมมูลกับ $Q(x) \wedge P(x)$
2) สมมูลกัน เพราะ $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ สมมูลกับ $[\sim P(x) \vee Q(x)] \wedge [\sim Q(x) \vee P(x)]$
3) สมมูลกัน เพราะ $\sim[P(x) \rightarrow Q(x)]$ สมมูลกับ $P(x) \wedge \sim Q(x)$
4) สมมูลกัน เพราะเป็นประพจน์ที่มีรูปแบบเป็น $p \wedge q$ กับ $q \wedge p$ ซึ่งสมมูลกัน
5) สมมูลกัน เพราะเป็นประพจน์ที่มีรูปแบบเป็น $p \rightarrow q$ กับ $\sim q \rightarrow \sim p$ ซึ่งสมมูลกัน

■

ประโยคที่สมมูลกันสามารถใช้แทนกันได้ ซึ่งการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์จะนำสมบัติดังกล่าวนี้ไปใช้ เช่น

1. จะพิสูจน์ว่า $A \cap B = B \cap A$

$A \cap B$ และ $B \cap A$ จะเท่ากันได้ก็ต่อเมื่อ $A \cap B$ และ $B \cap A$ มีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว
ถ้าให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ของ $A \cap B$
จากนิยามของ $A \cap B$ จะได้ $x \in A \wedge x \in B$
แต่ $x \in A \wedge x \in B$ สมมูลกับ $x \in B \wedge x \in A$
(เนื่องจาก $P(x) \wedge Q(x)$ สมมูลกับ $Q(x) \wedge P(x)$)
จะได้ว่า $x \in B \wedge x \in A$ ซึ่งจะได้ว่า x เป็นสมาชิกของ $B \cap A$
ดังนั้น $A \cap B \subset B \cap A$ ------- (1)
และในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ของ $B \cap A$
จะได้ว่า x เป็นสมาชิกของ $A \cap B$ ด้วย

ดังนั้น $B \cap A \subset A \cap B$ ------- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $A \cap B = B \cap A$

2. ในการพิสูจน์ว่า "สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a จะเป็นจำนวนคู่ด้วย" สามารถพิสูจน์ข้อความนี้โดยพิสูจน์ว่า "ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่" ซึ่งการพิสูจน์ข้อความนี้มีความหมายเช่นเดียวกับข้อความข้างต้น เนื่องจากประโยคในรูป

$\forall x[P(x) \to Q(x)]$ สมมูลกับ $\forall x[\sim Q(x) \to \sim P(x)]$

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เป็นการพิจารณาสมมูลของประโยคเปิดหรือประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณโดยวิธีเทียบกับสมมูลของประพจน์ ต่อไปจะพิจารณานิเสธของประโยคเปิดหรือประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณโดยวิธีเทียบกับนิเสธของประพจน์เช่นเดียวกัน ดังนี้

1. นิเสธของ $p \wedge q$ คือ $\sim p \vee \sim q$	นิเสธของ $P(x) \wedge Q(x)$ คือ $\sim P(x) \vee \sim Q(x)$ นิเสธของ $\exists x[P(x)] \wedge \exists x[Q(x)]$ คือ $\sim \exists x[P(x)] \vee \sim \exists x[Q(x)]$
2. นิเสธของ $p \to q$ คือ $p \wedge \sim q$	นิเสธของ $P(x) \to Q(x)$ คือ $P(x) \wedge \sim Q(x)$ นิเสธของ $\forall x[P(x)] \to \exists x[Q(x)]$ คือ $\forall x[P(x)] \wedge \sim \exists x[Q(x)]$

ข้อสังเกต ประโยคเปิดที่เป็นนิเสธกัน ถ้าเติมตัวบ่งปริมาณชนิดเดียวกันไว้ข้างหน้า ผลจะไม่ได้ประพจน์ที่เป็นนิเสธกัน เช่น นิเสธของ $P(x)$ คือ $\sim P(x)$ ถ้าเติมตัวบ่งปริมาณเป็น $\forall x[P(x)]$ กับ $\forall x[\sim P(x)]$ ทั้งสองประโยคนี้ไม่เป็นนิเสธกัน เพราะมีบางกรณีที่ $\forall x[P(x)]$ เป็นเท็จ และ $\forall x[\sim P(x)]$ เป็นเท็จ เช่น

$\forall x[x < 2]$ เมื่อ $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

และ $\forall x[x \geq 2]$ เมื่อ $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ มีค่าความจริงเป็นเท็จด้วย

ตัวอย่างที่ 30

จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นนิเสธกันหรือไม่

1) $\sim \forall x[P(x)] \vee \sim \forall x[Q(x)]$ กับ $\sim(\forall x[P(x)] \wedge \forall x[Q(x)])$
2) $P(x) \wedge \sim Q(x)$ กับ $P(x) \rightarrow Q(x)$
3) $\exists x[P(x) \leftrightarrow Q(x)]$ กับ $\sim \exists x[P(x) \leftrightarrow Q(x)]$

วิธีทำ 1) ไม่เป็นนิเสธกัน เพราะอยู่ในรูปแบบ $\sim p \vee \sim q$ กับ $\sim(p \wedge q)$ ซึ่งสมมูลกัน

2) เป็นนิเสธกัน เพราะอยู่ในรูปแบบ $p \wedge \sim q$ กับ $p \rightarrow q$ ซึ่งเป็นนิเสธกัน

3) เป็นนิเสธกัน เพราะอยู่ในรูป p กับ $\sim p$ ซึ่งเป็นนิเสธกัน ■

นอกจากการพิจารณาสมมูลและนิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณโดยวิธีเทียบกับรูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกันหรือนิเสธของประพจน์แล้ว ประโยคบางรูปแบบอาจจะต้องพิจารณาจากบทนิยามของสมมูลหรือนิเสธ ดังนี้

"ประพจน์สองประพจน์จะสมมูลกันก็ต่อเมื่อมีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี"

"ประพจน์สองประพจน์จะเป็นนิเสธกันก็ต่อเมื่อมีค่าความจริงตรงกันข้ามกันกรณีต่อกรณี"

ต่อไปนี้เป็นรูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน และเป็นนิเสธกันที่ใช้วิธีพิจารณาดังกล่าว

รูปแบบที่ 1

$\sim \forall x[P(x)]$ **สมมูลกับ** $\exists x[\sim P(x)]$

หรือ **นิเสธของ** $\forall x[P(x)]$ คือ $\exists x[\sim P(x)]$

พิสูจน์ **กรณีที่ 1** สมมติว่า $\sim \forall x[P(x)]$ เป็นจริง จะได้ $\forall x[P(x)]$ เป็นเท็จ

ดังนั้น มีสมาชิกบางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ที่นำไปแทน x ใน $P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่เป็นเท็จ

จะได้ว่า มีสมาชิกบางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ที่นำไปแทน x ใน $\sim P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริง

นั่นคือ $\exists x[\sim P(x)]$ เป็นจริง

กรณีที่ 2 สมมติว่า $\sim \forall x[P(x)]$ เป็นเท็จ จะได้ $\forall x[P(x)]$ เป็นจริง
ดังนั้น เมื่อนำสมาชิกแต่ละตัวในเอกภพสัมพัทธ์ไปแทน x ใน $P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริง
จะได้ว่า เมื่อนำสมาชิกแต่ละตัวในเอกภพสัมพัทธ์ไปแทน x ใน $\sim P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่เป็นเท็จ
นั่นคือ $\exists x[\sim P(x)]$ เป็นเท็จ

จากกรณีที่ 1 และ 2 สรุปได้ว่า $\sim \forall x[P(x)]$ สมมูลกับ $\exists x[\sim P(x)]$
หรือนิเสธของ $\forall x[P(x)]$ คือ $\exists x[\sim P(x)]$

ตัวอย่างที่ 31

จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้
1) $\forall x[x+3>5]$
2) จำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจำนวนคี่
3) จำนวนจริงทุกจำนวนไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

วิธีทำ 1) นิเสธของข้อความ “$\forall x[x+3>5]$” คือ “$\exists x[x+3\le 5]$”
2) นิเสธของข้อความ “จำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจำนวนคี่” คือ “มีจำนวนจริงบางจำนวนไม่ใช่จำนวนคี่”
3) นิเสธของข้อความ “จำนวนจริงทุกจำนวนไม่ใช่จำนวนตรรกยะ” คือ “จำนวนจริงบางจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ”

รูปแบบที่ 2

$\sim \exists x[P(x)]$ **สมมูลกับ** $\forall x[\sim P(x)]$
หรือ **นิเสธของ** $\exists x[P(x)]$ คือ $\forall x[\sim P(x)]$

พิสูจน์ **กรณีที่ 1** สมมติว่า $\sim \exists x[P(x)]$ เป็นจริง จะได้ $\exists x[P(x)]$ เป็นเท็จ
ดังนั้น เมื่อแทน x ใน $P(x)$ ด้วยสมาชิกแต่ละตัวในเอกภพสัมพัทธ์จะได้ประพจน์ที่เป็นเท็จทั้งหมด
นั่นคือ เมื่อแทน x ใน $\sim P(x)$ ด้วยสมาชิกแต่ละตัวในเอกภพสัมพัทธ์แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริงทั้งหมด
ดังนั้น $\forall x[\sim P(x)]$ เป็นจริง

กรณีที่ 2 สมมติว่า $\sim \exists x[P(x)]$ เป็นเท็จ จะได้ $\exists x[P(x)]$ เป็นจริง
ดังนั้น มีสมาชิกบางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ที่นำไปแทน x ใน $P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริง
จะได้ว่า มีสมาชิกบางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ที่นำไปแทน x ใน $\sim P(x)$ แล้วได้ประพจน์ที่เป็นเท็จ
ดังนั้น $\forall x[\sim P(x)]$ เป็นเท็จ

จากกรณีที่ 1 และ 2 สรุปได้ว่า $\sim \exists x[P(x)]$ สมมูลกับ $\forall x[\sim P(x)]$
หรือนิเสธของ $\exists x[P(x)]$ คือ $\forall x[\sim P(x)]$

ตัวอย่างที่ 32

จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

1) $\exists x[x^2 < 0]$
2) มีจำนวนจริงบางจำนวนเป็นจำนวนคู่
3) มีจำนวนจริง x บางจำนวนไม่เป็นจำนวนเต็ม

วิธีทำ
1) นิเสธของ $\exists x[x^2 < 0]$ คือ $\forall x[x^2 \geq 0]$
2) นิเสธของข้อความ "มีจำนวนจริงบางจำนวนเป็นจำนวนคู่" คือ "จำนวนจริงทุกจำนวนไม่เป็นจำนวนคู่"
3) นิเสธของข้อความ "มีจำนวนจริง x บางจำนวนไม่เป็นจำนวนเต็ม" คือ "จำนวนจริง x ทุกจำนวนเป็นจำนวนเต็ม" ■

ตัวอย่างที่ 33

จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

1) $\forall x[x>0] \vee \exists x[x^2<0]$

2) $\forall x[x \neq 0] \rightarrow \exists x[x \neq 0]$

วิธีทำ 1) นิเสธของ $\forall x[x>0] \vee \exists x[x^2<0]$ เขียนแทนด้วย $\sim(\forall x[x>0] \vee \exists x[x^2<0])$

ซึ่งสมมูลกับ $\sim\forall x[x>0] \wedge \sim\exists x[x^2<0]$

และสมมูลกับ $\exists x[x \leq 0] \wedge \forall x[x^2 \geq 0]$

ดังนั้น นิเสธของ $\forall x[x>0] \vee \exists x[x^2<0]$ คือ $\exists x[x \leq 0] \wedge \forall x[x^2 \geq 0]$

2) นิเสธของ $\forall x[x \neq 0] \rightarrow \exists x[x \neq 0]$ เขียนแทนด้วย $\sim(\forall x[x \neq 0] \rightarrow \exists x[x \neq 0])$

ซึ่งสมมูลกับ $\forall x[x \neq 0] \wedge \sim\exists x[x \neq 0]$

และสมมูลกับ $\forall x[x \neq 0] \wedge \forall x[x = 0]$

ดังนั้น นิเสธของ $\forall x[x \neq 0] \rightarrow \exists x[x \neq 0]$ คือ $\forall x[x \neq 0] \wedge \forall x[x = 0]$ ■

ตัวอย่างที่ 34

จงหานิเสธของ $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$

วิธีทำ $\sim\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ สมมูลกับ $\exists x[\sim(P(x) \rightarrow Q(x))]$

ซึ่งสมมูลกับ $\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$

ดังนั้น นิเสธของ $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ คือ $\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$ ■

ตัวอย่างที่ 35

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จงเขียนข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณที่แสดงว่า $A \not\subset B$

วิธีทำ เนื่องจาก $A \subset B$ หมายความว่า $\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

และ $A \not\subset B$ คือนิเสธของ $A \subset B$

ดังนั้น $A \not\subset B$ หมายถึง $\sim \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

จาก $\sim \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ สมมูลกับ $\exists x[x \in A \wedge x \notin B]$

ดังนั้น $\exists x[x \in A \wedge x \notin B]$ เป็นข้อความที่แสดงว่า $A \not\subset B$ ■

หมายเหตุ กล่าวได้ว่า A ไม่เป็นสับเซตของ B ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกบางตัวของ A ไม่เป็นสมาชิกของ B

ตัวอย่างที่ 36

จงหานิเสธของข้อความ

"มีจำนวนจริง x ซึ่งเป็นจำนวนตรรกยะแต่ไม่ใช่จำนวนเต็ม"

วิธีทำ ให้ $P(x)$ แทน "x เป็นจำนวนตรรกยะ"

และ $Q(x)$ แทน "x เป็นจำนวนเต็ม"

ข้อความที่กำหนดเขียนแทนด้วย $\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$

จาก $\sim \exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$ สมมูลกับ $\forall x[\sim(P(x) \wedge \sim Q(x))]$

ซึ่งสมมูลกับ $\forall x[\sim P(x) \vee Q(x)]$

ดังนั้น นิเสธของข้อความ "มีจำนวนจริง x ซึ่งเป็นจำนวนตรรกยะ แต่ไม่ใช่จำนวนเต็ม" คือ "จำนวนจริง x ทุกจำนวนต้องไม่เป็นจำนวนตรรกยะหรือต้องเป็นจำนวนเต็ม" ■

หมายเหตุ เนื่องจาก $\forall x[\sim P(x) \vee Q(x)]$ สมมูลกับ $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ ดังนั้น อาจกล่าวได้ว่า นิเสธของข้อความ "มีจำนวนจริง x ซึ่งเป็นจำนวนตรรกยะ แต่ไม่ใช่จำนวนเต็ม" คือ "จำนวนจริง x ทุกจำนวน ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว x เป็นจำนวนเต็ม" หรืออาจเขียนได้ว่า "จำนวนตรรกยะทุกจำนวนเป็นจำนวนเต็ม"

แบบฝึกหัด 2.11

1. จงตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกับข้อใด

1) $\forall x\left[x>0 \rightarrow x^2>0\right]$

(ก) $\forall x\left[x^2<0 \rightarrow x<0\right]$ (ข) $\forall x\left[x \leq 0 \vee x^2>0\right]$

2) $\exists x\left[x+2=5 \wedge x \in \mathbb{Z}\right]$

(ก) $\exists x\left[x \in \mathbb{Z} \wedge x+2=5\right]$ (ข) $\exists x\left[x+2 \neq 5 \vee x \notin \mathbb{Z}\right]$

3) $\forall x\left[x \geq 0\right]$

(ก) $\sim \exists x\left[x<0\right]$ (ข) $\exists x\left[x>0\right]$

4) $\sim \exists x\left[\sqrt{x}=4 \wedge x \neq 16\right]$

(ก) $\forall x\left[\sqrt{x} \neq 4 \rightarrow x=16\right]$ (ข) $\forall x\left[\sqrt{x}=4 \rightarrow x=16\right]$

5) $\forall x\left[x \in \mathbb{R}\right] \rightarrow \exists x\left[x \in \mathbb{Z}\right]$

(ก) $\forall x\left[x \in \mathbb{Z}\right] \rightarrow \exists x\left[x \in \mathbb{R}\right]$ (ข) $\forall x\left[x \notin \mathbb{Z}\right] \rightarrow \exists x\left[x \notin \mathbb{R}\right]$

6) $\sim\left(\exists x\left[x+2>5\right] \wedge \exists x\left[x^2 \leq 0\right]\right)$

(ก) $\forall x\left[x+2 \leq 5\right] \vee \forall x\left[x^2>0\right]$ (ข) $\sim \forall x\left[x+2>5\right] \wedge \forall x\left[x^2 \leq 0\right]$

7) มีจำนวนคี่บางจำนวนไม่ใช่จำนวนเฉพาะ

(ก) ไม่จริงที่ว่าจำนวนคี่ทุกจำนวนเป็นจำนวนเฉพาะ

(ข) จำนวนคี่ทุกจำนวนเป็นจำนวนเฉพาะ

8) ไม่จริงที่ว่ามีสับเซตของเซตอนันต์ที่เป็นเซตจำกัด

(ก) มีสับเซตของเซตอนันต์เป็นเซตจำกัด

(ข) สับเซตของเซตอนันต์เป็นเซตอนันต์

2. จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

1) $\exists x[x+2 \le 0]$
2) $\forall x[x \ne 0] \to \exists x[x>0]$
3) $\forall x[x^2<0 \to x<0]$
4) $\exists x[x>2 \vee \sim(x+1 \ge 1)]$
5) $\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$
6) จำนวนตรรกยะทุกจำนวนเป็นจำนวนจริง
7) จำนวนเต็มบางจำนวนเป็นจำนวนจริง
8) จำนวนจริงบางจำนวนน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และมีจำนวนจริงบางจำนวน เมื่อยกกำลังสองแล้วไม่เท่ากับศูนย์

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิจารณาประโยคหรือข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นประพจน์ จงหาค่าความจริงของประพจน์นั้น

   1) ฝนตกหรือเปล่า
   2) จังหวัดเชียงใหม่ไม่อยู่ในภาคใต้ของประเทศไทย
   3) ช้างเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยน้ำนม
   4) วันที่ 30 กุมภาพันธ์ 2530 เป็นวันจันทร์
   5) ช่วยด้วย
   6) $\pi = \frac{22}{7}$
   7) ห้ามเดินลัดสนาม
   8) อยากไปเที่ยวเหลือเกิน
   9) $35\% = 0.35$
   10) ดาวพุธเป็นดาวเคราะห์

2. จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้ และบอกค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นนิเสธ

   1) $-20 + 5 > -17$
   2) 37 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ
   3) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
   4) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

3. จงเขียนประโยคหรือข้อความที่เป็นประพจน์เชิงประกอบโดยใช้ตัวเชื่อม “ไม่” “และ” “หรือ” “ถ้า...แล้ว...” และ “ก็ต่อเมื่อ” มาอย่างละ 1 ประพจน์

4. กำหนดให้ p แทนข้อความ "2 เป็นจำนวนคู่"
q แทนข้อความ "โลกเป็นดาวเคราะห์"
และ r แทนข้อความ "$-5+8=-13$"
จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
1) $(p \wedge q) \vee r$
2) $(\sim q \vee r) \wedge p$
3) $r \leftrightarrow \sim p$
4) $\sim p \vee \sim r$
5) $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$

5. จงเขียนข้อความต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์โดยใช้ตัวเชื่อม และหาค่าความจริงของข้อความ
1) ถ้า 4 เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว 4 เป็นจำนวนคี่
2) $3 \geq 2$ และ $-2 \geq -3$
3) 100 กิโลกรัมเท่ากับ 1 ตัน หรือ 10 ขีดเท่ากับ 1 กิโลกรัม
4) $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 4\}$ เป็นเซตว่าง หรือ $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\}$ ไม่เป็นเซตว่าง
5) $A \cup A = A$ และ $A - \varnothing = U$
6) เต่าและจระเข้เป็นสัตว์เลื้อยคลาน
7) -1 เป็นจำนวนนับ และ $\frac{1}{3}$ เป็นจำนวนเต็ม
8) ผลคูณของ 4 กับ -4 น้อยกว่า -12 หรือ -12 ไม่เท่ากับ 4 ลบด้วย 16
9) ถ้าจังหวัดอุบลราชธานีไม่อยู่ในภาคใต้ของประเทศไทย แล้วจังหวัดอุดรธานีอยู่ในภาคเหนือของประเทศไทย
10) ถ้า 5 และ $\sqrt{5}$ เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว $\sqrt{25}$ ไม่เป็นจำนวนอตรรกยะ
11) ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา ก็ต่อเมื่อมุมฉากคือมุมที่มีขนาดเท่ากับ 180 องศา
12) 6 เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ 3 หรือ 9 เป็นจำนวนเฉพาะ

6. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์
   1) ถ้า $p \to q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \vee q)$
   2) ถ้า $(\sim p \wedge q)$ และ $\left[p \vee (\sim q) \vee (p \vee q)\right] \wedge \left[\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)\right]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และจริง ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของ p และ q
   3) ถ้า $\left[p \wedge (\sim q \to r)\right] \to (\sim s \vee r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ p, q, r และ s

7. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่ารูปแบบของประพจน์ในข้อต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่
   1) $p \to (\sim q \wedge r)$ กับ $(p \to \sim q) \vee (p \to r)$
   2) $(p \vee q) \wedge r$ กับ $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
   3) $\sim (p \to q) \to r$ กับ $\sim (p \wedge q \wedge r)$
   4) $\sim p \leftrightarrow q$ กับ $\sim \left[(p \to q) \wedge (q \to p)\right]$

8. จงเขียนข้อความที่สมมูลกับข้อความต่อไปนี้
   1) ถ้า 8 ไม่น้อยกว่า 7 แล้ว 8 เป็นจำนวนคู่
   2) $\frac{12}{5} \notin \mathbb{Z}$ ก็ต่อเมื่อ 5 ไม่เป็นตัวประกอบของ 12
   3) ไก่และเป็ดเป็นสัตว์ปีก หรือ นกและไก่เป็นสัตว์ปีก
   4) ถ้าพ่อและแม่ของแหนมมีเลือดหมู่ O แล้วแหนมมีเลือดหมู่ O

9. "รูปแบบของประพจน์ (ก) เป็นนิเสธของรูปแบบของประพจน์ (ข) เมื่อค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์ (ก) ตรงข้ามกับค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์ (ข) ทุกกรณี" จงตรวจสอบแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า รูปแบบของประพจน์ (ก) กับรูปแบบของประพจน์ (ข) เป็นนิเสธกันหรือไม่

1) (ก) $p \to q$ (ข) $q \to p$

2) (ก) $p \leftrightarrow q$ (ข) $\sim p \leftrightarrow \sim q$

3) (ก) $p \to (q \to r)$ (ข) $p \wedge q \wedge \sim r$

4) (ก) $(p \to q) \to r$ (ข) $(\sim p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)$

5) (ก) $p \to (q \vee r)$ (ข) $(q \vee r) \to \sim p$

6) (ก) $q \wedge (r \wedge \sim s)$ (ข) $q \to (r \to s)$

7) (ก) $(p \to q) \vee r$ (ข) $p \wedge \sim q \wedge \sim r$

8) (ก) $(p \vee q) \to r$ (ข) $\sim r \wedge (p \vee q)$

9) (ก) ถ้า 12 เป็นตัวประกอบของ 24 แล้ว 4 เป็นตัวประกอบของ 24

(ข) 4 ไม่เป็นตัวประกอบของ 24 แต่ 12 เป็นตัวประกอบของ 24

10) (ก) a และ b ไม่เป็นสระในภาษาอังกฤษ หรือ e เป็นสระในภาษาอังกฤษ

(ข) e เป็นสระในภาษาอังกฤษแต่ ถ้า a ไม่เป็นสระในภาษาอังกฤษ แล้ว b เป็นสระในภาษาอังกฤษ

10. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ จงตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่กำหนดให้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1. $[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to r]$
2. $\sim [(p \vee (\sim p \wedge q)) \to (\sim p \wedge \sim q)]$
3. $[\sim p \wedge (p \vee q)] \to q$
4. $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$
5. $[(p \to q) \wedge (p \to r)] \leftrightarrow [p \to (q \wedge r)]$
6. $[(p \to r) \wedge (q \to r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \to r]$
7. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$

11. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

1) **เหตุ** 1. $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$

2. $\sim (r \vee s)$

ผล $\sim q$

2) **เหตุ** 1. $\sim p \vee q$

2. $\sim q$

ผล $p \vee q$

3) **เหตุ** 1. $p \vee r$

2. $(p \rightarrow q) \vee (\sim q \rightarrow r)$

ผล $r \rightarrow p$

4) **เหตุ** 1. $p \rightarrow q$

2. $p \rightarrow r$

3. $p \wedge s$

ผล $r \rightarrow s$

5) **เหตุ** 1. $p \rightarrow q$

2. p

3. $q \rightarrow r$

4. $r \leftrightarrow \sim p$

ผล $q \vee r$

12. จงตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลในแต่ละข้อต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

1) **เหตุ** 1. ถ้าชะอมไปเล่นฟุตบอลแล้วไข่เจียวจะไปเล่นบาสเกตบอล

2. ถ้าไข่เจียวไม่ไปเล่นบาสเกตบอลแล้วแกงส้มจะไปเล่นปิงปอง

ผล ชะอมไปเล่นฟุตบอลและแกงส้มไปเล่นปิงปอง

2) **เหตุ** 1. ข้าวสวยทำงานหนักหรือข้าวหอมทำงานหนัก

2. ข้าวหอมไม่ทำงานหนัก

ผล ข้าวสวยทำงานหนักหรือข้าวปั้นไม่ทำงานหนัก

3) **เหตุ** 1. ชะเอมซื้อสินค้าโดยใช้บัตรเครดิตหรือซื้อสินค้าโดยใช้เงินสด
2. ชะเอมไม่ได้ซื้อสินค้าโดยใช้บัตรเครดิต

ผล ชะเอมซื้อสินค้าโดยใช้เงินสด

4) **เหตุ** 1. หนูดูหนัง
2. ถ้าแนนดูหนังแล้วหนูจะไม่ดูหนัง
3. ถ้าหนูไม่ดูหนังแล้วหนึ่งจะไม่ดูหนัง

ผล แนนดูหนังหรือหนึ่งดูหนัง

5) **เหตุ** 1. วิจิตไปกินข้าวนอกบ้านก็ต่อเมื่อวีรชัยอยู่บ้าน
2. ถ้าวีรชัยไม่อยู่บ้านแล้วนิธิจะไปออกกำลังกาย
3. พชรไปเดินเล่นและวิจิตไปกินข้าวนอกบ้าน

ผล ถ้าพชรไปเดินเล่นแล้วนิธิจะไปออกกำลังกาย

13. จงหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณต่อไปนี้

1) $\forall x[x>0]$ เมื่อ $U=\mathbb{N}$
2) $\forall x[x+x=x\cdot x]$ เมื่อ $U=\{0, 2\}$
3) $\exists x[x=x^2]$ เมื่อ $U=\{0, 1\}$
4) $\forall x[x<2 \leftrightarrow x^2 \geq 4]$ เมื่อ $U=\mathbb{R}$
5) $\exists y[y+2=y-2]$ เมื่อ $U=\mathbb{R}$
6) $\sim \forall x[x\in\mathbb{Q} \rightarrow x\in\mathbb{Z}]$ เมื่อ $U=\mathbb{R}$
7) $\exists x[x$ เป็นจำนวนคู่$]$ เมื่อ $U=\mathbb{Q}$
8) มีจำนวนตรรกยะ x ซึ่ง $|x|>0$
9) มีจำนวนอตรรกยะ x ซึ่ง $x^2=4$
10) สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว $x^2+1>4$
11) $\exists x[x^2-1<0] \wedge \sim \exists x[x\neq 0]$ เมื่อ $U=\mathbb{R}$
12) $\forall x[$ ถ้า x เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว x เป็นจำนวนคี่ $] \vee \exists x[x^2\neq 1]$

13) $\sim \forall x[x-1=7] \to \forall x[x^2=2x]$ เมื่อ $U=\mathbb{R}$

14) $\exists x[x \in \mathbb{Q}' \to x^2$ เป็นจำนวนคู่ $] \leftrightarrow \forall x[x \in \mathbb{N} \to x-1 \geq 0]$

15) มีจำนวนอตรรกยะบางจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วเท่ากับศูนย์หรือจำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ

14. จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

1) $\sim \forall x[\sim(x \neq 5)]$
2) $\exists x[x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 5]$
3) $\forall x[x^2-5<4 \to x-2 \neq 0]$
4) $\sim \exists x[x-7<5] \to \forall x[x \geq 2]$
5) $\forall x[x \in \mathbb{Z} \wedge x-2>8] \vee \exists x[x=5 \vee \sim(x \neq 6)]$
6) $\exists x[x-5<6 \to x>-2] \to \forall x[x \neq 2 \wedge x \geq 6]$
7) มีจำนวนตรรกยะบางจำนวนเป็นจำนวนคี่และจำนวนคี่ทุกจำนวนไม่เป็นจำนวนอตรรกยะ
8) จำนวนนับทุกจำนวนมากกว่าศูนย์ แต่จำนวนเต็มบางจำนวนยกกำลังสองไม่มากกว่าศูนย์

15. จงตรวจสอบว่าข้อความสองข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่

1) $\forall x[x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{Z}]$ กับ $\forall x[x \in \mathbb{Z} \vee x \notin \mathbb{R}]$
2) $\forall x[x>0 \to x^3>0]$ กับ $\forall x[x>0 \vee x^3>0]$
3) $\exists x[x^2>0]$ กับ $\sim \forall x[x^2 \leq 0]$
4) $\sim \forall x[x=9 \wedge \sqrt{x} \neq 3]$ กับ $\exists x[\sqrt{x}=3 \to x=9]$
5) $\exists x[x \in \mathbb{N}] \wedge \sim \exists x[x+3<7]$ กับ $\forall x[x+3<7] \wedge \exists x[x \in \mathbb{N}]$
6) $\forall x[x>0] \wedge \exists x[x^2-1<0]$ กับ $\sim(\forall x[x>0] \to \forall x[x^2-1 \geq 0])$
7) $\sim \exists x[x^2-7 \neq 0] \vee \forall x[x>-5]$ กับ $\exists x[x \leq -5] \vee \forall x[x^2-7=0]$
8) $\sim(\forall x[x \in \mathbb{Z}] \wedge \sim \forall x[x \neq 7])$ กับ $\exists x[x=7] \to \sim \forall x[x \in \mathbb{Z}]$

9) จำนวนคี่ทุกจำนวนมากกว่าศูนย์ กับ ไม่จริงที่ว่าจำนวนคี่บางจำนวนน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์

10) มีจำนวนตรรกยะ x ที่ $x^2 = 0$ หรือ $\sqrt{x} \neq 0$ กับ ไม่จริงที่ว่าจำนวนตรรกยะ x ทุกจำนวน $x^2 \neq 0$ หรือ $\sqrt{x} = 0$

16. บริษัทด้านคอมพิวเตอร์แห่งหนึ่งมีเงื่อนไขการเลื่อนตำแหน่งพนักงานเป็นพนักงานอาวุโส ดังนี้

- พนักงานต้องมีอายุไม่ต่ำกว่า 30 ปี
- พนักงานต้องจบปริญญาโทขึ้นไป
- พนักงานต้องทำงานกับบริษัทนี้มาอย่างน้อย 3 ปี หรือมีประสบการณ์การทำงานด้านคอมพิวเตอร์อย่างน้อย 5 ปี

จงหาว่าพนักงานต่อไปนี้ ใครจะมีสิทธิ์ได้เลื่อนตำแหน่ง

ชื่อ	อายุ (ปี)	วุฒิการศึกษา	ประวัติการทำงาน
ฟ้าใส	31	ปริญญาโท สาขาคณิตศาสตร์	ทำงานกับบริษัทนี้มา 2 ปี และเคยทำงานด้านคอมพิวเตอร์มา 5 ปี ก่อนเข้าทำงานกับบริษัทนี้
รุ่งนภา	29	ปริญญาโท สาขาคอมพิวเตอร์	ทำงานกับบริษัทนี้มา 6 ปี
ธนา	42	ปริญญาเอก สาขาชีววิทยา	ทำงานกับบริษัทนี้มา 2 ปี และเคยทำสวนผักปลอดสารพิษ 10 ปี

17. บริษัทแห่งหนึ่งต้องการมอบเงินรางวัลประจำปีให้แก่พนักงานในบริษัท โดยขึ้นกับเงื่อนไขต่อไปนี้

- ถ้าทำยอดขายใน 1 ปี ได้เกิน 3,000,000 บาท จะได้เงินรางวัล 1.5 เท่าของเงินเดือน
- ถ้าทำยอดขายใน 1 ปี ได้เกิน 5,000,000 บาท และไม่ลากิจ จะได้เงินรางวัล 2 เท่าของเงินเดือน
- ถ้าทำยอดขายใน 1 ปี ได้เกิน 10,000,000 บาท และไม่ลาพักผ่อน และไม่ลากิจ จะได้เงินรางวัล 4 เท่าของเงินเดือน

หมายเหตุ พนักงานคนหนึ่งสามารถรับได้เพียงรางวัลเดียวที่เป็นรางวัลที่ดีที่สุด

จงหาว่าพนักงานแต่ละคนต่อไปนี้ จะได้เงินรางวัลคนละเท่าใด

ชื่อ	เงินเดือน (บาท)	ยอดขาย (บาท)	ประวัติการลา (วัน)		
			ลาพักผ่อน	ลาป่วย	ลากิจ
สุริยา	30,000	6,000,000	3	-	2
เมฆา	100,000	1,500,000	4	5	3
กมล	70,000	10,000,000	-	10	-
ทิวา	200,000	15,000,000	-	4	-

18. บริษัทสินเชื่อแห่งหนึ่งให้กู้เงิน 100,000 บาท โดยมีเงื่อนไขดังนี้

- ผู้กู้จะต้องมีเงินเดือนไม่น้อยกว่า 30,000 บาท
- ถ้าผู้กู้มีคู่สมรส แล้วผู้กู้และคู่สมรสจะต้องมีเงินเดือนรวมกันไม่น้อยกว่า 70,000 บาท
- ผู้กู้จะต้องมีเงินเหลือหลังหักค่าใช้จ่ายในแต่ละเดือนมากกว่า 5,000 บาท

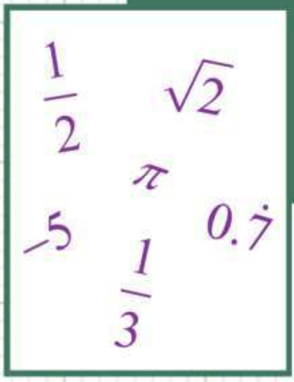
จงหาว่าบุคคลต่อไปนี้จะสามารถกู้เงินกับบริษัทนี้ได้หรือไม่

(ก) สัญญาได้รับเงินเดือนเดือนละ 36,000 บาท และภรรยาได้รับเงินเดือนเดือนละ 35,000 บาท สัญญามีค่าใช้จ่ายแต่ละเดือน 33,000 บาท และภรรยามีค่าใช้จ่ายแต่ละเดือน 34,000 บาท

(ข) กวินได้รับเงินเดือนเดือนละ 50,000 บาท แต่ภรรยาไม่มีรายได้ และเหลือเงินเก็บหลังหักค่าใช้จ่าย 9,000 บาท

(ค) ม่านแก้วเป็นหม้าย มีลูก 1 คน ได้เงินเดือนเดือนละ 70,000 บาท และมีค่าใช้จ่ายแต่ละเดือน 40,000 บาท

บทที่ 3 | จำนวนจริง



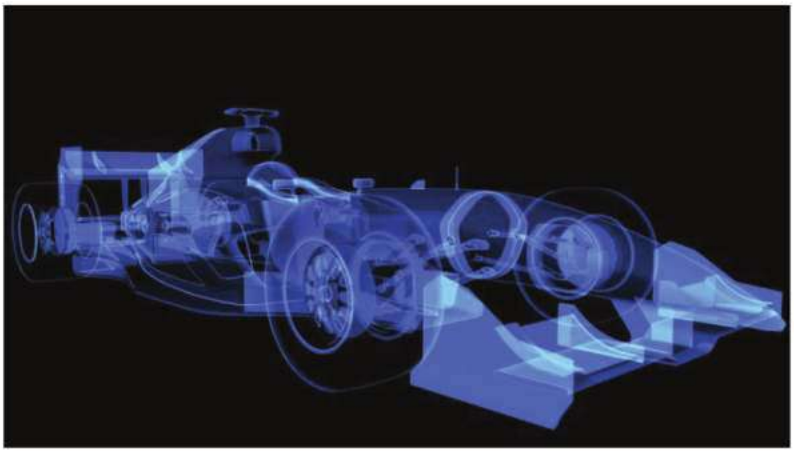
3.1 จำนวนจริง
3.2 ระบบจำนวนจริง
3.3 พหุนามตัวแปรเดียว
3.4 การแยกตัวประกอบของพหุนาม
3.5 สมการพหุนามตัวแปรเดียว
3.6 เศษส่วนของพหุนาม
3.7 สมการเศษส่วนของพหุนาม
3.8 การไม่เท่ากันของจำนวนจริง
3.9 อสมการพหุนามตัวแปรเดียว
3.10 ค่าสัมบูรณ์
3.11 สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ของพหุนามตัวแปรเดียว

จุดมุ่งหมาย

1. ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนจริงในการแก้ปัญหา
2. หาผลหารของพหุนามและเศษเหลือ
3. หาเศษเหลือโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ
4. แยกตัวประกอบของพหุนาม
5. แก้สมการและอสมการพหุนามตัวแปรเดียว
6. แก้สมการและอสมการเศษส่วนพหุนามตัวแปรเดียว
7. แก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ของพหุนามตัวแปรเดียว
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับพหุนามในการแก้ปัญหา

บทที่ 3

จำนวนจริง



ในปัจจุบันอุตสาหกรรมการผลิตรถยนต์ได้ใช้เทคโนโลยีการออกแบบโดยใช้คอมพิวเตอร์ (computer-aided design: CAD) เข้ามาช่วยในการออกแบบและผลิตรถยนต์ วิศวกรใช้ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ช่วยในการออกแบบ มีการนำเส้นโค้งพหุนาม (polynomial curve) มาใช้ในการปรับส่วนโค้งและส่วนเว้าของแต่ละส่วนประกอบของรูปจำลองรถยนต์ เพื่อให้ส่วนต่าง ๆ ประกอบเข้ากันได้พอดีและสวยงาม โดยที่วิศวกรจะทำการปรับเปลี่ยนสัมประสิทธิ์ของพหุนามเพื่อให้ได้เส้นโค้งพหุนามหลาย ๆ รูปแบบ จนกว่าจะตรงกับความต้องการ

นอกจากนี้ โดยอาศัยคอมพิวเตอร์กราฟิก (computer graphic: CG) รูปจำลองรถยนต์ที่แสดงทางจอคอมพิวเตอร์สามารถมองเห็นได้โดยรอบ ทำให้ผู้ออกแบบสามารถปรับเปลี่ยนรูปจำลองรถยนต์ในมุมมองต่าง ๆ เพื่อที่จะได้รูปจำลองรถยนต์ที่สวยงามทันสมัย ตรงกับความต้องการ ทั้งในเชิงเรขาคณิตและในเชิงการขับเคลื่อน

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับจำนวน สมการ อสมการ และพหุนาม ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- เซต

goo.gl/c2vQPN

3.1 จำนวนจริง

จากหลักฐานที่ปรากฏ เชื่อกันว่ามนุษย์มีความคิดในเรื่องจำนวนมาตั้งแต่สมัยโบราณ สังเกตได้จากการบันทึกจำนวนสัตว์เลี้ยงโดยใช้ก้อนหินหรือรอยบากบนต้นไม้ ซึ่งเป็นการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างสัตว์แต่ละตัวกับก้อนหินหรือรอยบาก เซตของจำนวนดังกล่าว เรียกว่า **เซตของจำนวนนับ** หรือ **เซตของจำนวนธรรมชาติ** ซึ่งคือ

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

เมื่อมีจำนวนนับขึ้นใช้แล้ว มนุษย์เริ่มใช้จำนวนในขอบข่ายที่กว้างขึ้น เช่น การรวมกัน การหักออก หรือการแบ่งสิ่งของ ก่อให้เกิดความคิดในด้านการบวก การลบ การคูณ และการหารของจำนวนขึ้น จึงสร้างจำนวนเต็มลบ จำนวนตรรกยะ และศูนย์ขึ้นใช้

เรียกเซต $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ว่า **เซตของจำนวนเต็ม**

เซตของจำนวนนับเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเต็ม นั่นคือ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่เขียนได้ในรูป $\frac{a}{b}$ โดย a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ เขียนแทนเซตของจำนวนตรรกยะด้วย

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{a}{b} \text{ เมื่อ } a, b \in \mathbb{Z} \text{ และ } b \neq 0 \right\}$$

สังเกตว่าจำนวนเต็มใด ๆ จะเขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้เสมอ เช่น $7 = \frac{7}{1},\ 0 = \frac{0}{1},\ -2 = \frac{-2}{1}$ ฉะนั้นจำนวนเต็มใด ๆ จึงเป็นจำนวนตรรกยะด้วย ดังนั้น เซตของจำนวนเต็มเป็นสับเซตของเซตของจำนวนตรรกยะ นั่นคือ $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

เศษส่วนของจำนวนเต็มสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทศนิยมซ้ำได้เสมอ เช่น

$$5 = 5.000... = 5.\dot{0}$$

$$\frac{3}{4} = 0.75000... = 0.75\dot{0}$$

$$\frac{4}{3} = 1.33333... = 1.\dot{3}$$

$$\frac{13}{6} = 2.16666... = 2.1\dot{6}$$

$$\frac{10}{99} = 0.101010... = 0.\dot{1}\dot{0}$$

ในทางกลับกัน จำนวนที่เขียนได้ในรูปทศนิยมซ้ำ สามารถเขียนเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มได้เสมอ เช่น

$$1.414 = 1.414000\ldots = \frac{1414}{1000}$$

$$-3.14 = -3.140000\ldots = \frac{-314}{100}$$

$$0.\dot{1}\dot{7} = 0.171717\ldots = \frac{17}{99}$$

$$0.\dot{1}7\dot{7} = 0.177177\ldots = \frac{177}{999}$$

$$0.2\dot{1}\dot{7} = 0.21717\ldots = \frac{215}{990}$$

$$1.5\dot{0}\dot{8} = 1.50808\ldots = \frac{1493}{990}$$

สรุปได้ว่า จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่เขียนได้ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม หรือเขียนเป็นทศนิยมซ้ำได้

ยังมีจำนวนอีกชนิดที่เขียนเป็นทศนิยมแบบไม่ซ้ำ ซึ่งจำนวนชนิดนี้ไม่สามารถเขียนเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ เรียกว่า **จำนวนอตรรกยะ** เช่น ในการศึกษาความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากของพีทาโกรัสและคณะ พบว่า เมื่อด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากยาวด้านละ 1 หน่วย แล้วความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ นั่นคือไม่มีจำนวนตรรกยะที่เป็นคำตอบของสมการ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

ให้ x แทนความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

หรือ $$x^2 = 2$$

ดังนั้น จึงมีการสร้างจำนวนชนิดใหม่ขึ้นเพื่อเป็นคำตอบของสมการดังกล่าว คือจำนวนบวกที่คูณกับตัวเองแล้วได้ 2 เรียกจำนวนดังกล่าวว่ารากที่สองที่เป็นจำนวนบวกของ 2 และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{2}$

เนื่องจาก $\sqrt{2}$ ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ แต่เขียนได้ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำและกำหนดค่าโดยประมาณได้ ดังนั้น $\sqrt{2}$ จึงเป็นจำนวนอตรรกยะ

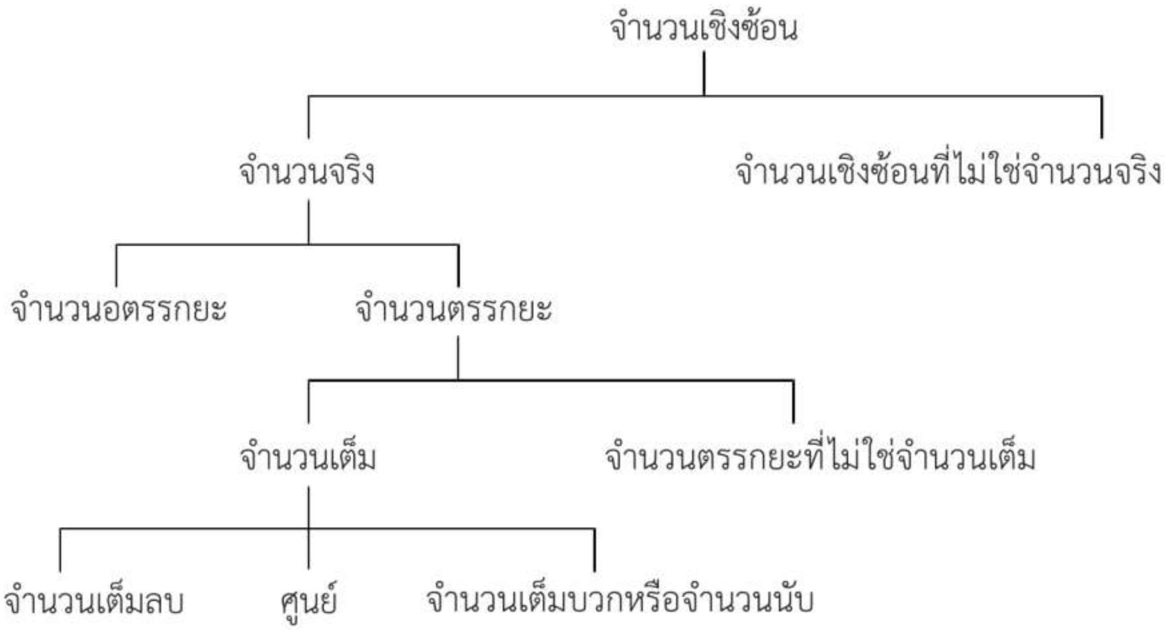
จำนวนต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของจำนวนอตรรกยะ

$\sqrt{2}$	=	1.4142135...	มีค่าประมาณ	1.414
$\sqrt{3}$	=	1.7320508...	มีค่าประมาณ	1.732
$\sqrt{5}$	=	2.2360679...	มีค่าประมาณ	2.236
$\sqrt{6}$	=	2.4494897...	มีค่าประมาณ	2.449
$\sqrt[3]{2}$	=	1.2599210...	มีค่าประมาณ	1.260
$\sqrt[3]{3}$	=	1.4422495...	มีค่าประมาณ	1.442
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	=	–0.8660254...	มีค่าประมาณ	– 0.866
π	=	3.14159265...	มีค่าประมาณ	3.1416
0.1010010001...			มีค่าประมาณ	0.101
0.353353335...			มีค่าประมาณ	0.353

เรียกยูเนียนของเซตของจำนวนตรรกยะและเซตของจำนวนอตรรกยะว่า **เซตของจำนวนจริง** $(\mathbb{R})$ เซตของจำนวนตรรกยะและเซตของจำนวนอตรรกยะต่างก็เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง อินเตอร์เซกชันของทั้งสองเซตนี้เป็นเซตว่าง ดังนั้น จำนวนจริงใด ๆ ต้องเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะอย่างใดอย่างหนึ่ง และไม่มีจำนวนจริงจำนวนใดที่เป็นทั้งจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ เซตของจำนวนอตรรกยะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{Q}'$

นอกจากนี้ ยังมีจำนวนอีกประเภทหนึ่งที่ได้จากการแก้สมการพหุนาม เช่น $x^2+1=0$ จำนวนเหล่านี้ไม่ใช่จำนวนจริง เซตของจำนวนชนิดใหม่นี้เรียกว่า **เซตของจำนวนเชิงซ้อน** $(\mathbb{C})$ ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษาต่อไป

แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่าง ๆ



เสริมสมอง : สัญลักษณ์แทนเซตของจำนวน

ใน ค.ศ. 1930 กลุ่มนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสที่ใช้นามแฝงว่า Nicolas Bourbaki ใช้สัญลักษณ์ $\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม และ $\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ เป็นครั้งแรก โดย $\mathbb{Z}$ มาจากคำว่า Zahlen ในภาษาเยอรมันที่แปลว่า “จำนวน” และ $\mathbb{Q}$ มาจากคำว่า quotient ที่แปลว่า “ผลหาร” สำหรับสัญลักษณ์ $\mathbb{R}$ ซึ่งแทนเซตของจำนวนจริง และสัญลักษณ์ $\mathbb{N}$ ซึ่งแทนเซตของจำนวนนับ ใช้ครั้งแรกโดย Richard Dedekind (ค.ศ. 1831 – 1916) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงพิจารณาจำนวนที่กำหนดให้ จำนวนใดบ้างที่เป็นจำนวนนับ จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะ

   0, $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{-22}{7}$, 3.1416, $\sqrt{4}+1$, $\sqrt{1-(-8)}$, $\sqrt{6}-1$,

   $\frac{7\pi}{22}$, $0.0\dot{9}$, $-\frac{12}{3}$, $\left(\sqrt{2}\right)^2$, -3.999, $\sqrt{(-1)^2}$

2. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ
   1) 1.010010001 เป็นจำนวนตรรกยะ
   2) $6.808808880\ldots$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ
   3) $0.797797797\ldots$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
   4) $1-\sqrt{3}$ ไม่เป็นจำนวนจริง
   5) $\sqrt{\frac{64}{9}}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
   6) ถ้า A สามารถเขียนได้ในรูปทศนิยมซ้ำ แล้ว A เป็นจำนวนตรรกยะ
   7) มีจำนวนจริง x ที่ $\sqrt{x+1}=-1$
   8) มีจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 9
   9) มีจำนวนตรรกยะที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 9

กิจกรรม : หาค่าประมาณของ π ด้วย GeoGebra

Willebrord Snell และ Christiaan Huygens ได้พัฒนาวิธีของ Archimedes ในการหาค่าประมาณของ π กล่าวคือ

เมื่อ u_n แทนความยาวรอบรูปของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมหนึ่งหน่วย

และ U_n แทนความยาวรอบรูปของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบนอกวงกลมหนึ่งหน่วย

Archimedes หาค่าประมาณของ π โดยคำนวณจาก $\frac{1}{2}\left(\frac{u_n+U_n}{2}\right)$

ส่วน Snell-Huygens หาค่าประมาณของ π โดยคำนวณจาก $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}U_n\right)$

หากใช้รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีจำนวนด้านเท่ากัน ค่าประมาณของ π ที่คำนวณได้จากวิธีของ Snell-Huygens จะใกล้เคียงกว่าวิธีของ Archimedes ดังแสดงได้ด้วยโปรแกรม GeoGebra

หมายเหตุ ค่าประมาณของ π ที่มีทศนิยม 20 ตำแหน่ง คือ 3.14159 26535 89793 23846

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. เปิดเว็บไซต์ goo.gl/6xnUw4
2. พิมพ์ 6 ลงในช่อง “จำนวนด้าน =” ที่อยู่ใน Graphics View แล้วสังเกตสิ่งที่เกิดขึ้นใน Graphics View และ Spreadsheet View
3. เปลี่ยนจำนวนด้านจาก 6 เป็น 12, 24, 48 และ 96 ตามลำดับ แล้วเปรียบเทียบค่าประมาณของ π ที่ได้จากวิธีของ Archimedes และ Snell-Huygens ใน Spreadsheet View

3.2 ระบบจำนวนจริง

ในหัวข้อนี้จะศึกษาโครงสร้างของระบบจำนวนจริง ซึ่งประกอบด้วยเซตของจำนวนจริง $(\mathbb{R})$ และการดำเนินการ ได้แก่ การบวกและการคูณ

จากสมบัติของการเท่ากันของจำนวนที่ได้ศึกษามาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น สามารถกล่าวในรูปของสัจพจน์การเท่ากันของระบบจำนวนจริงได้ดังนี้

1. กฎการสะท้อน (reflexive law)
   สำหรับจำนวนจริง a จะได้ $a=a$
2. กฎการสมมาตร (symmetric law)
   สำหรับจำนวนจริง a และ b ถ้า $a=b$ แล้ว $b=a$
3. กฎการถ่ายทอด (transitive law)
   สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ถ้า $a=b$ และ $b=c$ แล้ว $a=c$

ให้ $+$ และ $\cdot$ เป็นสัญลักษณ์แทนการบวกและการคูณ ตามลำดับ จะเขียนแทนผลบวกของจำนวนจริง a และ b ด้วย $a+b$ และเขียนแทนผลคูณของจำนวนจริง a และ b ด้วย $a \cdot b$ หรือ ab

ระบบจำนวนจริงสอดคล้องสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณ ซึ่งเรียกว่าสัจพจน์เชิงพีชคณิต ดังต่อไปนี้

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

สมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	1. $a+b \in \mathbb{R}$	6. $ab \in \mathbb{R}$
สมบัติการสลับที่	2. $a+b=b+a$	7. $ab=ba$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	3. $(a+b)+c=a+(b+c)$	8. $(ab)c=a(bc)$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	4. $a+0=a=0+a$ เรียก 0 ว่า เอกลักษณ์การบวก	9. $a \cdot 1=a=1 \cdot a$ เรียก 1 ว่า เอกลักษณ์การคูณ
สมบัติการมีตัวผกผัน	5. $a+(-a)=0=(-a)+a$ เรียก $-a$ ว่า ตัวผกผันการบวก หรืออินเวอร์สการบวกของ a	10. ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $a \cdot a^{-1}=1=a^{-1} \cdot a$ เรียก a^{-1} ว่า ตัวผกผันการคูณ หรืออินเวอร์สการคูณของ a
สมบัติการแจกแจง	11. $a(b+c)=ab+ac$ และ $(a+b)c=ac+bc$	

โดยปกติการบวกและการคูณจำนวนจริงเป็นการกระทำระหว่างจำนวนจริงสองจำนวน แต่จากสมบัติการสลับที่และสมบัติการเปลี่ยนหมู่ของทั้งการบวกและการคูณ ทำให้สามารถเขียนแสดงการบวกและการคูณของจำนวนจริงมากกว่าสองจำนวนได้โดยไม่ต้องใส่วงเล็บ และการหาผลบวก ผลคูณ สามารถจับคู่ที่เหมาะสมได้ ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1

จงหาผลบวก $1+2+3+4+5+6+7+8+9$

วิธีทำ โดยใช้สมบัติการสลับที่และสมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก

จะได้
$$\begin{aligned} 1+2+3+4+5+6+7+8+9 &= (1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5 \\ &= 10+10+10+10+5 \\ &= 45 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกคือ 45

ตัวอย่างที่ 2

จงหาผลคูณ $75 \times 15\frac{1}{3}$

วิธีทำ โดยการเปลี่ยนการแสดงจำนวนคละให้อยู่ในรูปการบวกของจำนวนเต็มและเศษส่วนแท้

จะได้ $75 \times 15\frac{1}{3} = 75 \times \left(15 + \frac{1}{3}\right)$

โดยใช้สมบัติการแจกแจง

จะได้
$$
\begin{aligned}
75 \times \left(15 + \frac{1}{3}\right) &= (75 \times 15) + \left(75 \times \frac{1}{3}\right) \\
&= 1,125 + 25 \\
&= 1,150
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลคูณคือ 1,150 ■

จากสัจพจน์เชิงพีชคณิตของระบบจำนวนจริงที่กล่าวมาข้างต้นเพียงพอจะพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 กฎการตัดออกสำหรับการบวก

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$
2. ถ้า $a + b = a + c$ แล้ว $b = c$

ทฤษฎีบท 2 กฎการตัดออกสำหรับการคูณ

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $ac = bc$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$
2. ถ้า $ab = ac$ และ $a \neq 0$ แล้ว $b = c$

ทฤษฎีบท 3

ให้ a เป็นจำนวนจริง จะได้ $a \cdot 0 = 0$

ทฤษฎีบท 4

ให้ a เป็นจำนวนจริง จะได้ $(-1)a = -a$

ทฤษฎีบท 5

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จะได้

$ab = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ หรือ $b = 0$

ทฤษฎีบท 6

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $a(-b) = -ab$
2. $(-a)b = -ab$
3. $(-a)(-b) = ab$

ที่ผ่านมา ในระบบจำนวนจริงกล่าวถึงการดำเนินการเฉพาะการบวกและการคูณ แต่จะสามารถนิยามการลบและการหารระหว่างจำนวนจริง โดยใช้ตัวผกผันการบวกและตัวผกผันการคูณ ตามลำดับ ได้ดังนี้

บทนิยาม 1

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง
a ลบด้วย b เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a-b$
โดยที่ $a-b = a+(-b)$

จากบทนิยาม $a-b$ คือ ผลบวกของ a กับตัวผกผันการบวกของ b นั่นเอง

เช่น $5-2 = 5+(-2) = 3$

$(-4)-(-3) = (-4)+3 = -1$

บทนิยาม 2

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $b \neq 0$
a หารด้วย b เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\frac{a}{b}$
โดยที่ $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

จากบทนิยาม $\frac{a}{b}$ คือ ผลคูณของ a กับตัวผกผันการคูณของ b

เนื่องจาก $\frac{1}{b} = 1 \cdot b^{-1} = b^{-1}$

จาก $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

จะได้ $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

จากบทนิยามการลบและการหาร สัจพจน์เชิงพีชคณิต และทฤษฎีบทที่กล่าวมาแล้วข้างต้น สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $a(b-c) = ab - ac$
2. $(a-b)c = ac - bc$

ทฤษฎีบท 8

ให้ a เป็นจำนวนจริง ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $a^{-1} \neq 0$

ทฤษฎีบท 9

ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c} = \dfrac{a}{bc}$ เมื่อ $b \neq 0$ และ $c \neq 0$

2. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$ เมื่อ $b \neq 0$ และ $c \neq 0$

3. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$ เมื่อ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$

4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ac}{bd}$ เมื่อ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$

5. $\left(\dfrac{b}{c}\right)^{-1} = \dfrac{c}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ และ $c \neq 0$

6. $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\left(\dfrac{c}{d}\right)} = \dfrac{ad}{bc}$ เมื่อ $b \neq 0, c \neq 0$ และ $d \neq 0$

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงบอกสมบัติของจำนวนจริงที่ทำให้สมการหรือข้อความต่อไปนี้เป็นจริง เมื่ออักษรที่ปรากฏแทนจำนวนจริงใด ๆ
   1) $\frac{1}{3}(2+7)=(2+7)\frac{1}{3}$
   2) $(-6)+0=-6$
   3) $1\cdot x = x$
   4) $7(-3)$ เป็นจำนวนจริง
   5) $\left[2+(c+d)\right]+3(c+d)=2+\left[(c+d)+3(c+d)\right]$
   6) $(x+y)(a+b)=(x+y)a+(x+y)b$
   7) $-5\left(\frac{1}{-5}\right)=1$
   8) $\left(5\times 9\frac{1}{2}\right)\times 2=5\left(9\frac{1}{2}\times 2\right)$
   9) $-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=0$
   10) $2+(m+1)=2+(1+m)$

2. จงหาตัวผกผันการบวก และตัวผกผันการคูณของจำนวนต่อไปนี้
   -4, $\sqrt{5}$, $\frac{2}{7}$, $-\frac{5}{\sqrt{11}}$, $1-\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{2}$, $\frac{-8}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

3. จงพิจารณาว่าเซตที่กำหนดให้มีสมบัติใดต่อไปนี้บ้าง
   สมบัติปิดของการบวก สมบัติปิดของการลบ สมบัติปิดของการคูณ สมบัติปิดของการหาร (เมื่อตัวหารไม่เป็นศูนย์)
   1) เซตของจำนวนนับ
   2) เซตของจำนวนเต็ม
   3) เซตของจำนวนคี่ลบ
   4) เซตของจำนวนคู่
   5) เซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 ลงตัว
   6) เซตของจำนวนตรรกยะ
   7) $\{..., -5, 0, 5, 10\}$
   8) $\{-1, -2, -3, ...\}$
   9) $\{-1, 0, 1\}$
   10) $\left\{\ldots, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots\right\}$

3.3 พหุนามตัวแปรเดียว

จากที่ได้ศึกษาในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น พหุนามคือนิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูปเอกนาม หรือเขียนอยู่ในรูปการบวกของเอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไป หรือกล่าวได้ว่า พหุนามคือนิพจน์ที่เขียนในรูป $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง มักนิยมใช้สัญลักษณ์ เช่น $p(x), q(x), r(x), a(x), b(x)$ แทนพหุนามที่มี x เป็นตัวแปร

ถ้า $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ เมื่อ $a_n \neq 0$ แล้วจะเรียกพหุนามนี้ว่า **พหุนามดีกรี** n เรียก n ว่า **ดีกรี (degree)** ของ $p(x)$ จะเขียนแทนดีกรีของพหุนาม $p(x)$ ด้วย $\deg(p(x))$ เรียก $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ ว่า **สัมประสิทธิ์ (coefficient)** ของ $p(x)$ และเรียก a_n ว่า **สัมประสิทธิ์นำ (leading coefficient)**

ตัวอย่างของพหุนาม

x^3-4x^2+3x+2	เป็นพหุนามดีกรี 3
x^5+5x^2-3x-1	เป็นพหุนามดีกรี 5
7	เป็นพหุนามดีกรี 0
0	เป็นพหุนามที่ไม่นิยามดีกรี

พหุนามตัวแปรเดียวสองพหุนามจะเท่ากัน เมื่อพหุนามทั้งสองนั้นมีดีกรีเท่ากัน และพจน์ที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรเท่ากันมีสัมประสิทธิ์เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 3

ให้ $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ และ $q(x)=x^3-x-5$ ถ้า $p(x)=q(x)$ จงหา a, b และ c

วิธีทำ จากพหุนาม $q(x)=x^3-x-5$ เขียนใหม่ได้เป็น $q(x)=x^3+0x^2-x-5$

จาก $p(x)=q(x)$ จะได้ $a=0, b=-1$ และ $c=-5$ ■

ตัวอย่างที่ 4

ให้ $p(x)=x^2-x+2$ และ $q(x)=x-1$ จงหา $p(x)+q(x)$, $p(x)-q(x)$ และ $p(x)q(x)$

วิธีทำ

$$p(x)+q(x)=(x^2-x+2)+(x-1)=x^2+1$$

$$p(x)-q(x)=(x^2-x+2)-(x-1)=x^2-2x+3$$

$$p(x)q(x)=(x^2-x+2)(x-1)=x^3-2x^2+3x-2$$

■

ตัวอย่างที่ 5

ให้ $p(x)=x^3+x^2-2x+3$ และ $q(x)=3x-2$ จงหา $p(x)+q(x)$, $p(x)-q(x)$ และ $p(x)q(x)$

วิธีทำ $p(x)+q(x)=\left(x^3+x^2-2x+3\right)+\left(3x-2\right)=x^3+x^2+x+1$

$p(x)-q(x)=\left(x^3+x^2-2x+3\right)-\left(3x-2\right)=x^3+x^2-5x+5$

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= \left(x^3+x^2-2x+3\right)\left(3x-2\right) \\ &= \left(x^3+x^2-2x+3\right)(3x)+\left(x^3+x^2-2x+3\right)(-2) \\ &= \left(3x^4+3x^3-6x^2+9x\right)+\left(-2x^3-2x^2+4x-6\right) \\ &= 3x^4+\left(3+(-2)\right)x^3+\left((-6)+(-2)\right)x^2+(9+4)x+(-6) \\ &= 3x^4+x^3-8x^2+13x-6 \end{aligned}$$

ขั้นตอนวิธีการหารสำหรับพหุนาม

ในการหารจำนวนเต็มด้วยจำนวนเต็ม เช่น การหาร 7 ด้วย 3 จะได้ผลหารคือ 2 และมีเศษเหลือคือ 1 ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ในรูป $7=3\times 2+1$

ในกรณีทั่วไปจะได้

ตัวตั้ง = ตัวหาร × ผลหาร + เศษเหลือ

การหารพหุนามด้วยพหุนามทำได้ในทำนองเดียวกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 10 ขั้นตอนวิธีการหารสำหรับพหุนาม (Division Algorithm for Polynomials)

ถ้า $a(x)$ และ $b(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $b(x)\neq 0$ แล้วจะมีพหุนาม $q(x)$ และ $r(x)$ เพียงชุดเดียวเท่านั้นซึ่ง

$$a(x)=b(x)q(x)+r(x)$$

เมื่อ $r(x)=0$ หรือ $\deg\left(r(x)\right)<\deg\left(b(x)\right)$

เรียก $q(x)$ ว่า **ผลหาร (quotient)** และเรียก $r(x)$ ว่า **เศษเหลือ (remainder)** จากการหารพหุนาม $a(x)$ ด้วยพหุนาม $b(x)$

ตัวอย่างที่ 6

ให้ $a(x)=x^4-3x^3+x^2+2x-5$ และ $b(x)=x^2$ จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหาร $a(x)$ ด้วย $b(x)$

วิธีทำ พิจารณา
$$\begin{aligned} x^4-3x^3+x^2+2x-5 &= \left(x^4-3x^3+x^2\right)+(2x-5) \\ &= \left(x^2\right)\left(x^2-3x+1\right)+(2x-5) \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลหารคือ x^2-3x+1 และเศษเหลือคือ $2x-5$ ■

ตัวอย่างที่ 7

ให้ $a(x)=x^3-5x^2+2x-10$ และ $b(x)=x-5$ จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหาร $a(x)$ ด้วย $b(x)$

วิธีทำ พิจารณา
$$\begin{aligned} x^3-5x^2+2x-10 &= \left(x^3-5x^2\right)+(2x-10) \\ &= x^2(x-5)+2(x-5) \\ &= (x-5)\left(x^2+2\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลหารคือ x^2+2 และเศษเหลือคือ 0 ■

การหารยาว

จากทฤษฎีบท 10 ถ้าให้ $a(x)=2x^4-x^3+2x^2+x-4$ และ $b(x)=x^2-2x-1$ จะได้ว่า ผลหาร $q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2 และเศษเหลือ $r(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 1 หรือ 0 หรือ $r(x)=0$ สมมติ $q(x)=mx^2+nx+c$ และ $r(x)=dx+e$ เมื่อ m, n, c, d และ e เป็นจำนวนจริง จากทฤษฎีบท 10 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}2x^4-x^3+2x^2+x-4 &= (x^2-2x-1)(mx^2+nx+c)+(dx+e)\\ &= mx^4+(n-2m)x^3+(c-2n-m)x^2+(-2c-n+d)x+(-c+e)\end{aligned}$$

ดังนั้น $m=2,\ n-2m=-1,\ c-2n-m=2,\ -2c-n+d=1$ และ $-c+e=-4$

นั่นคือ $m=2,\ n=3,\ c=10,\ d=24$ และ $e=6$

สรุปได้ว่า $2x^4-x^3+2x^2+x-4=(x^2-2x-1)(2x^2+3x+10)+(24x+6)$

จากการสมมติผลหารและเศษเหลือ แล้วหาผลคูณระหว่างตัวหารกับผลหาร จากนั้นนำไปบวกกับเศษเหลือ จะเขียนแสดงวิธีหาผลหารโดยการตั้งหารแบบหารยาวได้ดังนี้

$$x^2-2x-1\overline{\big)\,2x^4-x^3+2x^2+x-4}$$

1) หาพจน์แรกของผลหาร จะได้ว่า พจน์แรกของผลหารคูณพจน์แรกของตัวหารต้องได้พจน์แรกของตัวตั้ง ทำให้ได้พจน์แรกของผลหารเป็น $2x^2$
2) หาผลคูณของพจน์แรกของผลหารคือ $2x^2$ กับตัวหาร จะได้ $2x^4-4x^3-2x^2$ แล้วนำไปลบออกจากตัวตั้ง ซึ่งแสดงรายละเอียดได้ดังนี้

$$\begin{array}{r@{}l} & \quad 2x^2 \\ x^2-2x-1\big) & \overline{2x^4-\ \ x^3+2x^2+x-4} \\ & \underline{2x^4-4x^3-2x^2} \\ & \qquad\quad 3x^3+4x^2+x-4 \end{array}$$

3) หาพจน์ที่สองของผลหารโดยวิธีเดียวกับข้อ 1) จะได้พจน์ที่สองของผลหาร คือ $3x$
4) หาผลคูณของพจน์ที่สองของผลหารกับตัวหาร นำไปลบออกจากตัวตั้ง ซึ่งแสดงต่อจากข้อ 2) ได้ดังนี้

$$
\begin{array}{r l}
 & 2x^2 + 3x \\
x^2 - 2x - 1 \big) & 2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 4 \\
 & \underline{2x^4 - 4x^3 - 2x^2} \\
 & \qquad 3x^3 + 4x^2 + x - 4 \\
 & \qquad \underline{3x^3 - 6x^2 - 3x} \\
 & \qquad\qquad 10x^2 + 4x - 4
\end{array}
$$

5) หาพจน์ที่สามของผลหารได้ 10 แล้วดำเนินการต่อในลักษณะเดียวกับข้อ 4) จะได้ ผลหารและเศษเหลือ ดังนี้

$$
\begin{array}{r l}
 & 2x^2 + 3x + 10 \\
x^2 - 2x - 1 \big) & 2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 4 \\
 & \underline{2x^4 - 4x^3 - 2x^2} \\
 & \qquad 3x^3 + 4x^2 + x - 4 \\
 & \qquad \underline{3x^3 - 6x^2 - 3x} \\
 & \qquad\qquad 10x^2 + 4x - 4 \\
 & \qquad\qquad \underline{10x^2 - 20x - 10} \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{\underline{24x + 6}}
\end{array}
$$

จะได้ $2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 4 = (x^2 - 2x - 1)(2x^2 + 3x + 10) + (24x + 6)$

ดังนั้น ผลหารคือ $2x^2 + 3x + 10$ และเศษเหลือคือ $24x + 6$

ตัวอย่างที่ 8

ให้ $a(x)=x^3-6x^2+11x-6$ และ $b(x)=x-2$ จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหาร $a(x)$ ด้วย $b(x)$

วิธีทำ ใช้การหารยาวดังนี้

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-4x+3 \\
\hline
x-2 & x^3-6x^2+11x-6 \\
 & \underline{x^3-2x^2} \\
 & \quad -4x^2+11x-6 \\
 & \quad \underline{-4x^2+8x} \\
 & \qquad\qquad 3x-6 \\
 & \qquad\qquad \underline{3x-6} \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{\underline{0}}
\end{array}
$$

จะได้ $x^3-6x^2+11x-6=(x-2)(x^2-4x+3)$

ดังนั้น ผลหารคือ x^2-4x+3 และเศษเหลือคือ 0 ■

ตัวอย่างที่ 9

ให้ $a(x)=x^5+8x^3-x^2+8x-8$ และ $b(x)=x^3+x-1$ จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหาร $a(x)$ ด้วย $b(x)$

วิธีทำ จาก $a(x)=x^5+8x^3-x^2+8x-8$ เขียนใหม่ได้เป็น

$a(x)=x^5+0x^4+8x^3-x^2+8x-8$

ใช้การหารยาวดังนี้

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+7 \\
\cline{2-2}
x^3+x-1 & x^5+0x^4+8x^3-x^2+8x-8 \\
 & \underline{x^5 \qquad\quad +x^3-x^2} \\
 & \qquad\qquad 7x^3 \qquad\quad +8x-8 \\
 & \qquad\qquad \underline{7x^3 \qquad\quad +7x-7} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\underline{x-1}}
\end{array}
$$

จะได้ $x^5+8x^3-x^2+8x-8=(x^3+x-1)(x^2+7)+(x-1)$

ดังนั้น ผลหารคือ x^2+7 และเศษเหลือคือ $x-1$ ■

แบบฝึกหัด 3.3

1. ให้ $p(x)=3x^4+2x^2-ax+3$ และ $q(x)=bx^4+cx^3+2x^2-5x+3$ ถ้า $p(x)=q(x)$ จงหา a, b และ c

2. ให้ $p(x)=x^2-1$ และ $q(x)=x^2-2x+3$ จงหา
   1) $p(x)+q(x)$
   2) $q(x)-p(x)$
   3) $p(x)q(x)$

3. ให้ $p(x)=3x^2+5x-1$ และ $q(x)=x^4-5x^2+7$ จงหา $p(x)q(x)$

4. ถ้า $x^2-12x-28=(x-a)(x-b)$ จงหา $a+b$ และ ab

5. ถ้า $x^2-2x+5=(x-a)^2+b^2$ เมื่อ $b>0$ จงหา a และ b

6. จงหาพหุนามที่เมื่อหารด้วย x^2+3x แล้วได้ผลหารคือ x^2-1 และเศษเหลือคือ $x-1$

7. จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหารพหุนาม $a(x)$ ด้วยพหุนาม $b(x)$ เมื่อกำหนดให้
   1) $a(x)=4x^4-3x^3+2x^2-5$ และ $b(x)=x^2$
   2) $a(x)=x^3-2$ และ $b(x)=x^2+2$
   3) $a(x)=x^5-x^4-x^3-x^2-x-2$ และ $b(x)=x+2$
   4) $a(x)=x^5+1$ และ $b(x)=x^2+1$
   5) $a(x)=x^6+x^3+1$ และ $b(x)=x^3-1$

3.4 การแยกตัวประกอบของพหุนาม

ในหัวข้อนี้จะแนะนำให้รู้จักทฤษฎีบทเศษเหลือ ทฤษฎีบทตัวประกอบ และทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่ใช้หาตัวประกอบของพหุนาม โดยเฉพาะหาตัวประกอบที่เป็นพหุนามดีกรี 1 หรือเรียกว่าพหุนามเชิงเส้น แต่ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบททั้งสามจะต้องมีข้อกำหนดต่อไปนี้

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n และ a เป็นจำนวนจริง กำหนดให้ $p(a)$ เป็นค่าที่ได้จากการแทน x ในพหุนาม $p(x)$ ด้วย a

เช่น ถ้า $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ แล้ว

$$p(1) = 1^3 - 4(1)^2 + 3(1) + 2 = 2$$

$$p(-2) = (-2)^3 - 4(-2)^2 + 3(-2) + 2 = -28$$

ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ทฤษฎีบท 11 ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem)

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนาม $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$ ถ้าหารพหุนาม $p(x)$ ด้วยพหุนาม $x - c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง แล้วเศษเหลือจะเท่ากับ $p(c)$

พิสูจน์ จากขั้นตอนวิธีการหาร เมื่อหาร $p(x)$ ด้วย $x - c$ จะมีผลหาร $q(x)$ และเศษเหลือ $r(x)$ ซึ่ง

$$p(x) = (x - c)q(x) + r(x) \qquad \text{-------}(1)$$

โดยที่ $r(x) = 0$ หรือ $\deg(r(x)) < \deg(x - c)$

แต่ $\deg(x - c) = 1$ ดังนั้น $r(x) = 0$ หรือ $\deg(r(x)) = 0$ นั่นคือ $r(x)$ เป็นค่าคงตัว

ให้ $r(x) = d$ เมื่อ d เป็นค่าคงตัว

เขียนสมการ (1) ใหม่ได้เป็น

$$p(x) = (x-c)q(x) + d \qquad \text{-------}(2)$$

แทน x ในสมการ (2) ด้วย c จะได้

$$p(c) = (c-c)q(c) + d = d$$

นั่นคือ เศษเหลือจะเท่ากับ $p(c)$

ทฤษฎีบทเศษเหลือทำให้สามารถหาเศษเหลือจากการหารพหุนามด้วยพหุนามดีกรี 1 ได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 10

จงหาเศษเหลือจากการหาร $9x^3 + 4x - 1$ ด้วย $x - \frac{1}{2}$

วิธีทำ ให้ $p(x) = 9x^3 + 4x - 1$

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ เมื่อหาร $p(x)$ ด้วย $x - \frac{1}{2}$ จะได้เศษเหลือคือ $p\left(\frac{1}{2}\right)$ โดยที่

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 9\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$= \frac{9}{8} + \frac{4}{2} - 1$$

$$= \frac{17}{8}$$

ดังนั้น เศษเหลือคือ $\frac{17}{8}$ ■

คำถาม

1. จงหาร $9x^3 + 4x - 1$ ด้วย $x - \frac{1}{2}$ โดยวิธีหารยาว แล้วพิจารณาว่าเศษเหลือที่ได้เท่ากับ $p\left(\frac{1}{2}\right)$ หรือไม่
2. จงหาร $9x^3 + 4x - 1$ ด้วย $2x - 1$ โดยวิธีหารยาว แล้วพิจารณาว่าเศษเหลือที่ได้เท่ากับ $p\left(\frac{1}{2}\right)$ หรือไม่

ตัวอย่างที่ 11

จงหาเศษเหลือจากการหาร $2x^4-7x^3+x^2+7x-3$ ด้วย $x+1$

วิธีทำ ให้ $p(x)=2x^4-7x^3+x^2+7x-3$

และตัวหารคือ $x+1$ หรือ $x-(-1)$

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ เมื่อหาร $p(x)$ ด้วย $x-(-1)$ จะได้เศษเหลือคือ $p(-1)$ โดยที่

$$\begin{aligned} p(-1) &= 2(-1)^4-7(-1)^3+(-1)^2+7(-1)-3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น เศษเหลือคือ 0 แสดงว่า $x+1$ หาร $2x^4-7x^3+x^2+7x-3$ ลงตัว ■

ทฤษฎีบทตัวประกอบ

ทฤษฎีบท 12 ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนาม $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$

พหุนาม $p(x)$ มี $x-c$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $p(c)=0$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ จะต้องแสดงว่า

1. ถ้า $x-c$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$ แล้ว $p(c)=0$
2. ถ้า $p(c)=0$ แล้ว $x-c$ จะเป็นตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$

พิสูจน์ 1. สมมติ $x-c$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

ดังนั้น $x-c$ หาร $p(x)$ ลงตัว

นั่นคือ $x-c$ หาร $p(x)$ แล้วได้เศษเหลือเท่ากับ 0

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ เมื่อหารพหุนาม $p(x)$ ด้วยพหุนาม $x-c$ จะได้เศษเหลือเท่ากับ $p(c)$

ดังนั้น $p(c)=0$

2. สมมติ $p(c)=0$

    ให้ $p(x)=(x-c)q(x)+d$

    จากทฤษฎีบทเศษเหลือ $d=p(c)$

    ดังนั้น $d=0$

    จะได้ $p(x)=(x-c)q(x)$

    ดังนั้น $x-c$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

จาก 1 และ 2 สรุปได้ว่า พหุนาม $p(x)$ มี $x-c$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $p(c)=0$

ตัวอย่างที่ 12

จงแสดงว่า $x-2$ เป็นตัวประกอบของ x^3-5x^2+2x+8

วิธีทำ ให้ $p(x)=x^3-5x^2+2x+8$

จะได้ $p(2) = (2)^3-5(2)^2+2(2)+8$

$= 8-20+4+8$

$= 0$

ดังนั้น $x-2$ เป็นตัวประกอบของ x^3-5x^2+2x+8 ■

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่า $x-2$ หาร x^3-5x^2+2x+8 ลงตัว และเมื่อหาร x^3-5x^2+2x+8 ด้วย $x-2$ จะได้ผลหารเป็น x^2-3x-4 ดังนั้น

$$x^3-5x^2+2x+8=(x-2)(x^2-3x-4)=(x-2)(x+1)(x-4)$$

ทฤษฎีบทเศษเหลือและทฤษฎีบทตัวประกอบใช้ได้ในกรณีที่สัมประสิทธิ์ของพหุนามเป็นจำนวนจริงใด ๆ แต่ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นการแยกตัวประกอบของพหุนามที่สัมประสิทธิ์ของพหุนามเป็น**จำนวนเต็ม**เท่านั้น โดยแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่สัมประสิทธิ์นำเป็น 1 และกรณีที่สัมประสิทธิ์นำไม่เป็น 1

กรณีที่สัมประสิทธิ์นำเป็น 1 เมื่อพิจารณา $x-2,\ x+1,\ x-4$ ซึ่งเป็นตัวประกอบของ x^3-5x^2+2x+8 จะเห็นว่า $2,\ -1$ และ 4 เป็นตัวประกอบของ 8 ซึ่ง 8 เป็นพจน์ค่าคงตัวของพหุนาม x^3-5x^2+2x+8

ในกรณีทั่วไป ถ้า $x-c$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ โดยที่ c และสัมประสิทธิ์ของพหุนามนี้เป็นจำนวนเต็ม แล้ว c จะเป็นตัวประกอบของ a_0 ดังนั้น ในการหาจำนวนเต็ม c ดังกล่าว จึงพิจารณาจากตัวประกอบที่เป็นจำนวนเต็มของ a_0

การแยกตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$ ในกรณีนี้สามารถใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือได้ดังนี้

1. หาตัวประกอบ c ของ a_0 ที่ทำให้ $p(c)=0$ ซึ่งแสดงว่า $x-c$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$
2. นำ $x-c$ ไปหาร $p(x)$ ผลหารจะเป็นพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่าดีกรีของ $p(x)$ อยู่ 1
3. ถ้าผลหารในข้อ 2 มีดีกรีสูงกว่า 2 และสามารถแยกตัวประกอบต่อไปได้อีก ให้แยกตัวประกอบของผลหารนั้นตามขั้นตอนในข้อ 1 และ 2 แต่ถ้าผลหารมีดีกรี 2 จะใช้วิธีแยกตัวประกอบที่เคยศึกษามาหรือใช้วิธีในข้อ 1 และ 2 ก็ได้

ตัวอย่างที่ 13

จงแยกตัวประกอบของ x^3+2x^2-5x-6

วิธีทำ ให้ $p(x)=x^3+2x^2-5x-6$

เนื่องจากจำนวนเต็มที่หาร -6 ลงตัว คือ $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

พิจารณา $p(1)$

$$p(1)=(1)^3+2(1)^2-5(1)-6=-8$$

จะเห็นว่า $p(1)\neq 0$ ดังนั้น $x-1$ ไม่เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

พิจารณา $p(-1)$

$$\begin{aligned} p(-1) &= (-1)^3+2(-1)^2-5(-1)-6 \\ &= -1+2+5-6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x+1$ เป็นตัวประกอบของ x^3+2x^2-5x-6

นำ $x+1$ ไปหาร x^3+2x^2-5x-6 ได้ผลหารเป็น x^2+x-6

ดังนั้น $$\begin{aligned} x^3+2x^2-5x-6 &= (x+1)(x^2+x-6) \\ &= (x+1)(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 14

จงแยกตัวประกอบของ $x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$

วิธีทำ ให้ $p(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$

เนื่องจากจำนวนเต็มที่หาร -24 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$

เมื่อพิจารณา $p(1), p(-1), p(2)$ พบว่า ไม่เท่ากับศูนย์

แต่
$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^4 - (-2)^3 - 2(-2)^2 - 4(-2) - 24 \\ &= 16 + 8 - 8 + 8 - 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x + 2$ เป็นตัวประกอบของ $x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$

นำ $x + 2$ ไปหาร $x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$ ได้ผลหารเป็น $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24 &= (x+2)(x^3 - 3x^2 + 4x - 12) \\ &= (x+2)\left(x^2(x-3) + 4(x-3)\right) \\ &= (x+2)(x-3)(x^2+4) \end{aligned}$$

■

กรณีที่สัมประสิทธิ์นำไม่เป็น 1 การแยกตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$ จะหาตัวประกอบที่เป็นพหุนามดีกรี 1 ที่อยู่ในรูป $x - \frac{k}{m}$ เมื่อ m และ k เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $m \neq 0$ โดยทฤษฎีบทตัวประกอบจะได้

"พหุนาม $p(x)$ มี $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $p\left(\frac{k}{m}\right) = 0$"

การพิจารณาหา m และ k ที่เป็นจำนวนเต็มของพหุนาม $x-\frac{k}{m}$ ดังกล่าว จะใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 13 ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนาม $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a_n \neq 0$

ถ้า $x-\frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$ โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็ม

ซึ่ง $m \neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1 แล้ว m หาร a_n ลงตัว

และ k หาร a_0 ลงตัว

ดังนั้น การแยกตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$ ในกรณีนี้ทำได้ดังนี้

1. หา $\frac{k}{m}$ ซึ่ง ห.ร.ม. ของ m และ k คือ 1 โดยพิจารณา m และ k จากตัวประกอบของ a_n และ a_0 ตามลำดับ
2. ทดสอบว่า $p\left(\frac{k}{m}\right)$ เป็น 0 หรือไม่ ถ้า $p\left(\frac{k}{m}\right)$ เป็น 0 จะได้ $x-\frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$ ในกรณีที่ไม่มี $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $p\left(\frac{k}{m}\right)$ เป็น 0 แสดงว่า พหุนาม $p(x)$ ไม่มีตัวประกอบที่เป็นพหุนามดีกรี 1 ที่อยู่ในรูป $x-\frac{k}{m}$
3. นำ $x-\frac{k}{m}$ ไปหาร $p(x)$ ผลหารจะเป็นพหุนามดีกรีต่ำกว่าดีกรีของ $p(x)$ อยู่ 1
4. ถ้าผลหารในข้อ 3 ยังมีดีกรีสูงกว่า 2 และสามารถแยกตัวประกอบต่อไปได้อีก ให้แยกตัวประกอบของผลหารนั้นตามขั้นตอนในข้อ 1, 2 และ 3 แต่ถ้าผลหารมีดีกรี 2 จะใช้วิธีแยกตัวประกอบตามที่เคยศึกษามา หรือใช้วิธีในข้อ 1, 2 และ 3 ก็ได้

ตัวอย่างที่ 15

จงแยกตัวประกอบของ $12x^3+16x^2-5x-3$

วิธีทำ ให้ $p(x)=12x^3+16x^2-5x-3$

เนื่องจากจำนวนเต็มที่หาร -3 ลงตัว คือ $\pm1, \pm3$

และจำนวนเต็มที่หาร 12 ลงตัว คือ $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

ดังนั้น จำนวนตรรกยะ $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $p\left(\frac{k}{m}\right)=0$ จะอยู่ในกลุ่มของจำนวนต่อไปนี้ คือ

$\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{12}$ (จำนวนเหล่านี้ตัวเศษได้มาจากตัวประกอบของ -3 และตัวส่วนได้มาจากตัวประกอบของ 12 โดย ห.ร.ม. ของตัวเศษและตัวส่วนคือ 1)

พิจารณา $p\left(\frac{1}{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
p\left(\frac{1}{2}\right) &= 12\left(\frac{1}{2}\right)^3+16\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\left(\frac{1}{2}\right)-3 \\
&= \frac{12}{8}+\frac{16}{4}-\frac{5}{2}-3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $x-\frac{1}{2}$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

นำ $x-\frac{1}{2}$ ไปหาร $p(x)$ ได้ผลหารเป็น $12x^2+22x+6$

ดังนั้น
$$
\begin{aligned}
12x^3+16x^2-5x-3 &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(12x^2+22x+6\right) \\
&= \left(x-\frac{1}{2}\right)(2)\left(6x^2+11x+3\right) \\
&= (2x-1)\left(6x^2+11x+3\right) \\
&= (2x-1)(3x+1)(2x+3)
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด 3.4

1. กำหนด $p(x)$ และ c ดังต่อไปนี้ จงหาเศษเหลือเมื่อหาร $p(x)$ ด้วย $x-c$
   1) $p(x)=x^4-3x+5,\ c=2$
   2) $p(x)=2x^3+7x^2-5x-4,\ c=-3$
   3) $p(x)=6x^3+13x^2-4,\ c=-2$
   4) $p(x)=x^4-3x^3+4x^2-x+6,\ c=1$
   5) $p(x)=2x^4-5x^3-x^2+3x+1,\ c=-\frac{1}{2}$

2. จงแสดงว่า $x-1$ เป็นตัวประกอบของ x^3-2x^2-5x+6

3. จงแสดงว่า $x+1$ เป็นตัวประกอบของ x^3+x^2+x+1

4. จงหาค่า m จากเงื่อนไขที่กำหนดให้
   1) $x-5$ หาร x^3-2x^2+8x-m ลงตัว
   2) $x+\frac{2}{3}$ หาร $3x^4-2x^3+mx-1$ เหลือเศษ -1
   3) $x+m$ หาร x^2-5x-2 เหลือเศษ -8

5. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้
   1) x^3-x^2-4x+4
   2) $x^3+x^2-8x-12$
   3) $x^4-2x^3-x^2-4x-6$
   4) x^3-1
   5) x^4-1
   6) x^4-5x^2+4
   7) $x^4-2x^3+x^2-4x+4$
   8) $x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

6. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้
   1) $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$
   2) $6x^3 + x^2 - 11x - 6$
   3) $8x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
   4) $3x^4 - 8x^3 + x^2 + 8x - 4$

3.5 สมการพหุนามตัวแปรเดียว

สมการพหุนามตัวแปรเดียว คือ สมการที่เขียนได้ในรูป

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริงที่เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนาม จะกล่าวว่า จำนวนจริง c เป็นคำตอบของสมการพหุนาม ก็ต่อเมื่อ แทน x ในสมการ ด้วย c แล้วได้สมการที่เป็นจริง ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาเซตคำตอบของสมการโดยใช้ขั้นตอนวิธีการหาร ทฤษฎีบทตัวประกอบ และทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะที่ได้ศึกษาไปแล้ว

ทั้งนี้ ในการหาเซตคำตอบของสมการ ถ้าจัดสมการให้จำนวนทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับเป็นศูนย์ และให้ทางซ้ายมืออยู่ในรูปการคูณกันของพหุนามแล้ว จะสามารถหาเซตคำตอบของสมการได้โดยการหาค่าของตัวแปรที่ทำให้พหุนามแต่ละพหุนามที่คูณกันมีค่าเป็นศูนย์ ตัวอย่างเช่น สมการ $(x-2)(x-3)=0$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $x-2=0$ หรือ $x-3=0$ โดยทฤษฎีบท 5 นั่นคือ $x=2$ หรือ $x=3$ ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{2, 3\}$

ตัวอย่างที่ 16

จงหาเซตคำตอบของสมการ $3x^3+2x^2-12x-8=0$

วิธีทำ แยกตัวประกอบของ $3x^3+2x^2-12x-8$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 3x^3+2x^2-12x-8 &= (3x^3+2x^2)-(12x+8) \\ &= x^2(3x+2)-4(3x+2) \\ &= (3x+2)(x^2-4) \\ &= (3x+2)(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

จะได้ $(3x+2)(x-2)(x+2)=0$

ดังนั้น $3x+2=0$ หรือ $x-2=0$ หรือ $x+2=0$

จะได้ $x=-\frac{2}{3}$ หรือ $x=2$ หรือ $x=-2$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{-2, -\frac{2}{3}, 2\right\}$ ■

ตัวอย่างที่ 17

จงหาเซตคำตอบของสมการ $6x^3-11x^2+6x=1$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น $6x^3-11x^2+6x-1=0$

ให้ $p(x) = 6x^3-11x^2+6x-1$

จะได้ $p(1) = 6-11+6-1 = 0$

ดังนั้น $x-1$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

และเมื่อหาร $p(x)$ ด้วย $x-1$ จะได้ $6x^2-5x+1$ เป็นผลหาร

นั่นคือ

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(6x^2-5x+1) \\ &= (x-1)(2x-1)(3x-1) \end{aligned}$$

จะได้ $(x-1)(2x-1)(3x-1)=0$

ดังนั้น $x-1=0$ หรือ $2x-1=0$ หรือ $3x-1=0$

จะได้ $x=1$ หรือ $x=\frac{1}{2}$ หรือ $x=\frac{1}{3}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ ■

การหาเซตคำตอบของสมการพหุนามตัวแปรเดียว บางครั้งอาจต้องใช้ความรู้เรื่องสมการกำลังสองที่นักเรียนได้ศึกษาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ดังต่อไปนี้

สมการกำลังสอง (quadratic equation) คือ สมการที่เขียนได้ในรูป $ax^2+bx+c=0$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$

ถ้า $b^2-4ac \geq 0$ แล้วจะมีจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของสมการกำลังสองนี้ โดยคำตอบของสมการคือ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ถ้า $b^2-4ac < 0$ แล้วจะไม่มีจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของสมการกำลังสองนี้

ตัวอย่างที่ 18

จงหาเซตคำตอบของสมการ $2x^2-3x-1=0$

วิธีทำ เนื่องจาก $(-3)^2-4(2)(-1)=17$ ซึ่ง $17 \geq 0$ จะได้ คำตอบของสมการนี้ คือ $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{\frac{3+\sqrt{17}}{4}, \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right\}$ ■

ตัวอย่างที่ 19

จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$

จะได้ว่า $(x-1)(x^2 - x - 1) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x - 1 = 0$ หรือ $x^2 - x - 1 = 0$

นั่นคือ $x = 1$ หรือ $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ ■

ตัวอย่างที่ 20

จงหาเซตคำตอบของสมการ $2x^3 - x^2 + 6x - 3 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $2x^3 - x^2 + 6x - 3 = x^2(2x-1) + 3(2x-1) = (2x-1)(x^2+3)$

จะได้ $(2x-1)(x^2+3) = 0$

นั่นคือ $2x - 1 = 0$ หรือ $x^2 + 3 = 0$

แต่เนื่องจาก $x^2 + 3 > 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ดังนั้น $2x - 1 = 0$ นั่นคือ $x = \frac{1}{2}$

สรุปได้ว่า เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ■

ตัวอย่างที่ 21

ถ้าผลคูณของจำนวนเต็ม 3 จำนวนที่เรียงติดกันเท่ากับ 336 จงหาจำนวนที่มากที่สุดในสามจำนวนนี้

วิธีทำ ให้จำนวนเต็มสามจำนวนที่เรียงติดกันคือ $x-1, x, x+1$

ดังนั้น $(x-1)(x)(x+1)=336$ จึงได้

$$x^3-x-336 = 0$$

$$(x-7)(x^2+7x+48) = 0$$

ดังนั้น $x-7=0$ หรือ $x^2+7x+48=0$

ถ้า $x-7=0$ จะได้ $x=7$

ถ้า $x^2+7x+48=0$ และเนื่องจาก $7^2-4(1)(48)=-143$ ซึ่ง $-143<0$ จะได้ว่าไม่มีจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของสมการนี้

ดังนั้น $x=7$

สรุปได้ว่า จำนวนที่มากที่สุดในสามจำนวนดังกล่าว คือ $7+1=8$ ■

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้
   1) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
   2) $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$
   3) $1 - 3x^2 + 2x^3 = 0$
   4) $3x^3 - 2x^2 - 7x = 2$
   5) $6 - 13x + 4x^3 = 0$
   6) $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$
   7) $5x - 6 = 2x^3 - 3x^2$
   8) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$
   9) $4x^3 + 13x^2 + 4x - 12 = 0$
   10) $2x^4 - 13x^3 + 28x^2 = 23x - 6$
   11) $4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2 = 0$
   12) $3x^4 - 8x^3 + x^2 + 8x = 4$
   13) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$

2. ถ้าผลคูณของจำนวนคี่ 3 จำนวนที่เรียงติดกันเท่ากับ 1,287 จงหาจำนวนที่น้อยที่สุดในสามจำนวนนี้

3. สมมติว่าโยนลูกบอลขึ้นไปในอากาศจากดาดฟ้าตึกซึ่งสูง 12 เมตร สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลา (วินาที) กับความสูงของลูกบอลจากพื้นดิน (เมตร) คือ $s(t) = 12 + 28t - 5t^2$ เมื่อ $s(t)$ แทนความสูงของลูกบอลจากพื้นดินในวินาทีที่ t
   จงหาว่าลูกบอลจะลอยอยู่ในอากาศนานกี่วินาทีก่อนตกกระทบพื้นดินเป็นครั้งแรก

3.6 เศษส่วนของพหุนาม

ให้ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $q(x) \neq 0$ จะเรียก $\frac{p(x)}{q(x)}$ ว่า **เศษส่วนของพหุนาม** ที่มี $p(x)$ เป็น**ตัวเศษ** และ $q(x)$ เป็น**ตัวส่วน** เช่น

$$\frac{1}{x} \text{ เมื่อ } x \neq 0$$

$$\frac{x-2}{x^2-2} \text{ เมื่อ } x^2-2 \neq 0$$

$$\frac{x^3+1}{2x-5} \text{ เมื่อ } 2x-5 \neq 0$$

เศษส่วนของพหุนามที่จะกล่าวต่อไปนี้ ให้ถือว่าพหุนามที่เป็นตัวส่วนไม่เท่ากับ 0 ถึงแม้ว่าจะไม่ได้ระบุไว้

พิจารณาเศษส่วนของพหุนาม $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$ ซึ่งเขียนในรูปเศษส่วนของพหุนามอีกแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} &= \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{x+3}{x+1} \text{ เมื่อ } x \neq 2 \end{aligned}$$

เรียก $\frac{x+3}{x+1}$ ว่า **เศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ** ของ $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

ตัวอย่างที่ 22

จงเขียนเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ

1) $\dfrac{x-1}{x^2-1}$

2) $\dfrac{4x+8}{3x^2+6x}$

วิธีทำ 1) $\dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}$

$= \dfrac{1}{x+1}$ เมื่อ $x \neq 1$

2) $\dfrac{4x+8}{3x^2+6x} = \dfrac{4(x+2)}{3x(x+2)}$

$= \dfrac{4}{3x}$ เมื่อ $x \neq -2$ ■

การคูณและการหารเศษส่วนของพหุนาม

การคูณและการหารเศษส่วนของพหุนามมีหลักเกณฑ์เช่นเดียวกับการคูณและการหารเศษส่วนของจำนวนเต็ม ดังนี้

1) เมื่อ $p(x), q(x), r(x)$ และ $s(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $q(x) \neq 0$ และ $s(x) \neq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)}$$

2) เมื่อ $p(x), q(x), r(x)$ และ $s(x)$ เป็นพหุนามโดยที่ $q(x) \neq 0, r(x) \neq 0$ และ $s(x) \neq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{s(x)}{r(x)}$$

ตัวอย่างที่ 23

จงหาผลลัพธ์ในรูปผลสำเร็จ

1) $\dfrac{2x^2+4x}{x-3}\cdot\dfrac{x}{x+2}$

2) $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}\cdot\dfrac{x+2}{x-2}$

3) $\dfrac{1}{x^2+4x}\div\dfrac{1}{x}$

4) $\dfrac{x}{x+1}\div\dfrac{x+2}{x^2-1}$

วิธีทำ

1) $$\dfrac{2x^2+4x}{x-3}\cdot\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{2x(x+2)\cdot x}{(x-3)(x+2)}$$
$$= \dfrac{2x^2}{x-3} \text{ เมื่อ } x\neq -2$$

2) $$\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}\cdot\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x+5)\cdot(x+2)}{(x-2)(x+2)\cdot(x-2)}$$
$$= \dfrac{x+5}{x-2} \text{ เมื่อ } x\neq -2$$

3) $$\dfrac{1}{x^2+4x}\div\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x(x+4)}\cdot\dfrac{x}{1}$$
$$= \dfrac{1}{x+4} \text{ เมื่อ } x\neq 0$$

4) $$\dfrac{x}{x+1}\div\dfrac{x+2}{x^2-1} = \dfrac{x}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x+2}$$
$$= \dfrac{x}{x+1}\cdot\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+2}$$
$$= \dfrac{x(x-1)}{x+2} \text{ เมื่อ } x\neq -1$$

การบวกและการลบเศษส่วนของพหุนาม

การบวกและการลบเศษส่วนของพหุนามมีหลักเกณฑ์เช่นเดียวกับการบวกและการลบเศษส่วนของจำนวนเต็ม ดังนี้

1) เมื่อ $p(x), q(x)$ และ $r(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $q(x) \neq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{q(x)} = \frac{p(x)+r(x)}{q(x)}$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{r(x)}{q(x)} = \frac{p(x)-r(x)}{q(x)}$$

2) ถ้าเศษส่วนของพหุนามที่นำมาบวกหรือลบกันมีตัวส่วนไม่เท่ากันจะต้องทำตัวส่วนให้เท่ากันแล้วจึงใช้วิธีในข้อ 1)

ตัวอย่างที่ 24

จงหาผลลัพธ์ในรูปผลสำเร็จ

1) $\dfrac{2x+4}{x+3} + \dfrac{x-3}{x+3}$

2) $\dfrac{1}{x+4} - \dfrac{2-x}{x+4}$

3) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}$

4) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$

วิธีทำ 1) $\dfrac{2x+4}{x+3} + \dfrac{x-3}{x+3} = \dfrac{(2x+4)+(x-3)}{x+3}$

$$= \frac{3x+1}{x+3}$$

2) $\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{2-x}{x+4} = \dfrac{1-(2-x)}{x+4}$

$= \dfrac{x-1}{x+4}$

3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+1}{x(x+1)}+\dfrac{x}{x(x+1)}$

$= \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$

4) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

$= \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

$= \dfrac{x^2-x-2}{(x+1)(x-1)}$

$= \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$

$= \dfrac{x-2}{x-1}$ เมื่อ $x \neq -1$ ■

แบบฝึกหัด 3.6

1. จงเขียนเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ

   1) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

   2) $\dfrac{4x^2-9}{2x^2+x-3}$

   3) $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-4x^3+4x^2-1}$

2. จงหาผลลัพธ์ในรูปผลสำเร็จ

   1) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-x-2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$

   2) $\dfrac{x^3-1}{x^2-x+1}\cdot\dfrac{x^3+1}{x^2+x+1}$

   3) $\dfrac{x^2+3x-10}{x+2}\div\dfrac{x+5}{x+2}$

   4) $\dfrac{2x-8}{x^2}\div\dfrac{x^2-16}{x^3+x^2}$

3. จงหาผลลัพธ์ในรูปผลสำเร็จ

   1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$

   2) $\dfrac{x}{x^2+x-6}+\dfrac{x-1}{x^2+5x+6}$

   3) $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$

   4) $\dfrac{x^2-5}{x^2-5x+6}-\dfrac{4}{x^2-4}$

3.7 สมการเศษส่วนของพหุนาม

สมการเศษส่วนของพหุนาม คือ สมการที่สามารถจัดให้อยู่ในรูป $\frac{p(x)}{q(x)}=0$ เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $q(x)\neq 0$ จะกล่าวว่า จำนวนจริง c เป็นคำตอบของสมการนี้ ก็ต่อเมื่อ แทน x ในสมการด้วย c แล้วได้สมการเป็นจริง กล่าวคือ $\frac{p(c)}{q(c)}=0$

สังเกตว่า $\frac{p(x)}{q(x)}=0$ ก็ต่อเมื่อ $p(x)=0$ และ $q(x)\neq 0$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $\frac{p(x)}{q(x)}=0$ คือ เซตของจำนวนจริง x ซึ่ง $p(x)=0$ และ $q(x)\neq 0$

ตัวอย่างที่ 25

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\frac{x(x+1)}{(x-1)(x-3)}=\frac{2}{(x-1)(x-3)}$

วิธีทำ จาก $\frac{x(x+1)}{(x-1)(x-3)}=\frac{2}{(x-1)(x-3)}$

จะได้

$$\begin{aligned}\frac{x(x+1)}{(x-1)(x-3)}-\frac{2}{(x-1)(x-3)} &= 0\\ \frac{x^2+x-2}{(x-1)(x-3)} &= 0\\ \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)} &= 0\end{aligned}$$

จะได้ $(x-1)(x+2)=0$ และ $(x-1)(x-3)\neq 0$

นั่นคือ $x=1$ หรือ $x=-2$ โดยที่ $x\neq 1$ และ $x\neq 3$

ดังนั้น $x=-2$

จะได้ เซตคำตอบของสมการคือ $\{-2\}$

ตัวอย่างที่ 26

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=1$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-1 &= 0\\ \frac{(x+1)+x-x(x+1)}{x(x+1)} &= 0\\ \frac{1+x-x^2}{x(x+1)} &= 0\end{aligned}$$

จะได้ $1+x-x^2=0$ และ $x(x+1)\neq 0$

นั่นคือ $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ หรือ $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ โดยที่ $x\neq 0$ และ $x\neq -1$

ดังนั้น $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ หรือ $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

จะได้ เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ ■

ตัวอย่างที่ 27

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x+4)-(x+3)}{(x+3)(x+4)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+3)(x+4)} = 0$$

$$\frac{(x+3)(x+4)-(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} = 0$$

$$\frac{4x+10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} = 0$$

จะได้ $4x+10=0$ และ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)\neq 0$

นั่นคือ $x=-\frac{5}{2}$ โดยที่ $x\neq -1$ และ $x\neq -2$ และ $x\neq -3$ และ $x\neq -4$

ดังนั้น $x=-\frac{5}{2}$

จะได้ เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$ ■

ตัวอย่างที่ 28

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(x+1)(x-1)}+\frac{2}{x+1} &= \frac{1}{2} \\
\frac{4+2x-2}{(x+1)(x-1)} &= \frac{1}{2} \\
\frac{2x+2}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{2} &= 0 \\
\frac{2(2x+2)-(x+1)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} &= 0 \\
\frac{4x+4-x^2+1}{2(x+1)(x-1)} &= 0 \\
\frac{-x^2+4x+5}{2(x+1)(x-1)} &= 0 \\
\frac{x^2-4x-5}{2(x+1)(x-1)} &= 0 \\
\frac{(x-5)(x+1)}{2(x+1)(x-1)} &= 0
\end{aligned}$$

จะได้ $(x-5)(x+1)=0$ และ $2(x+1)(x-1)\neq 0$

นั่นคือ $x=5$ หรือ $x=-1$ โดยที่ $x\neq -1$ และ $x\neq 1$

ดังนั้น $x=5$

จะได้ เซตคำตอบของสมการคือ $\{5\}$

ตัวอย่างที่ 29

น้ำว้าทำงานอย่างหนึ่งเสร็จในเวลา 2 ชั่วโมง ถ้าลูกหว้าช่วยทำด้วย งานนั้นจะเสร็จในเวลา 1 ชั่วโมง 30 นาที ถ้าลูกหว้าทำงานชิ้นนี้คนเดียวจะเสร็จในเวลาเท่าใด

วิธีทำ ให้ลูกหว้าทำงานคนเดียวได้งาน 1 หน่วย เสร็จในเวลา x ชั่วโมง

ดังนั้น ในเวลา 1 ชั่วโมง ลูกหว้าทำงานคนเดียวได้งาน $\frac{1}{x}$ หน่วย

เนื่องจากในเวลา 2 ชั่วโมง น้ำว้าทำงานได้งาน 1 หน่วย

ดังนั้น ในเวลา 1 ชั่วโมง น้ำว้าทำงานได้งาน $\frac{1}{2}$ หน่วย

ในเวลา 1 ชั่วโมง น้ำว้าและลูกหว้าช่วยกันทำงาน จะได้งาน $\frac{1}{2}+\frac{1}{x}=\frac{x+2}{2x}$ หน่วย

ดังนั้น งาน 1 หน่วย น้ำว้าและลูกหว้าช่วยกันทำงานเสร็จในเวลา $\frac{2x}{x+2}$ ชั่วโมง

จากโจทย์ น้ำว้าและลูกหว้าช่วยกันทำงานเสร็จในเวลา $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ชั่วโมง

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x+2} &= \frac{3}{2} \\
\frac{2x}{x+2}-\frac{3}{2} &= 0 \\
\frac{4x-3(x+2)}{2(x+2)} &= 0 \\
\frac{x-6}{2(x+2)} &= 0
\end{aligned}$$

จะได้ $x-6=0$ และ $2(x+2)\neq 0$

นั่นคือ $x=6$ โดยที่ $x\neq -2$

ดังนั้น $x=6$

จะได้ เซตคำตอบของสมการคือ $\{6\}$

ดังนั้น ลูกหว้าทำงานชิ้นนี้คนเดียวเสร็จในเวลา 6 ชั่วโมง ■

แบบฝึกหัด 3.7

1. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

 1) $\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{2}{(x+1)(x+2)}$

 2) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x+1}{x} = 0$

 3) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x+6}{x^2+3}$

 4) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x-1} = 1$

 5) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

 6) $\dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{6}{5}$

 7) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{6}$

 8) $\dfrac{1}{x^2-x+1} - \dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{2}{3x}$

2. ในการบินระยะทาง 1,500 กิโลเมตร ครั้งหนึ่ง เครื่องบินพบกับสภาพอากาศแปรปรวนทำให้ต้องบินช้าลงกว่าปกติ พบว่าอัตราเร็วลดลง 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ทำให้ถึงที่หมายช้ากว่าปกติ 10 นาที จงหาอัตราเร็วของการบินปกติ

3.8 การไม่เท่ากันของจำนวนจริง

ในหัวข้อที่ 3.2 ได้กล่าวถึงสัจพจน์เชิงพีชคณิตของระบบจำนวนจริง และสมบัติบางประการเกี่ยวกับ "การเท่ากัน" สำหรับหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์เกี่ยวกับ "การไม่เท่ากัน" ของระบบจำนวนจริง ได้แก่ ความสัมพันธ์มากกว่า น้อยกว่า มากกว่าหรือเท่ากับ และน้อยกว่าหรือเท่ากับ

ในระบบจำนวนจริง $\mathbb{R}$ จะมีสับเซต $\mathbb{R}^+$ ซึ่งสอดคล้องสัจพจน์เชิงอันดับ 3 ข้อ ดังต่อไปนี้

1. สำหรับ $a \in \mathbb{R}^+$ และ $b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $a+b \in \mathbb{R}^+$ (สมบัติปิดการบวก)
2. สำหรับ $a \in \mathbb{R}^+$ และ $b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า $ab \in \mathbb{R}^+$ (สมบัติปิดการคูณ)
3. สำหรับจำนวนจริง a จะได้ว่า

   $a=0$ หรือ $a \in \mathbb{R}^+$ หรือ $-a \in \mathbb{R}^+$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง (สมบัติไตรวิภาค)

ถ้ากำหนดสัญลักษณ์ $a>0$ หมายถึง $a \in \mathbb{R}^+$ และ $a<0$ หมายถึง $-a \in \mathbb{R}^+$ สัจพจน์ข้างต้นทั้งสามข้อสามารถเขียนได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้

1. สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ และ $b \in \mathbb{R}$ ถ้า $a>0$ และ $b>0$ แล้ว $a+b>0$
2. สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ และ $b \in \mathbb{R}$ ถ้า $a>0$ และ $b>0$ แล้ว $ab>0$
3. สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $a=0$ หรือ $a>0$ หรือ $a<0$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง

บทนิยาม 3

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

$a>b$ หมายถึง $a-b>0$

$a<b$ หมายถึง $a-b<0$ (หรือ $b-a>0$)

$a \geq b$ หมายถึง $a>b$ หรือ $a=b$

$a \leq b$ หมายถึง $a<b$ หรือ $a=b$

จากสัจพจน์เชิงอันดับที่กล่าวมาข้างต้นจะสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ ซึ่งเป็นสมบัติที่สำคัญของการไม่เท่ากัน

ทฤษฎีบท 14

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

1. สมบัติการถ่ายทอด
   ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
2. สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
   ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
3. สมบัติของการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากันที่ไม่เป็นศูนย์
   กรณีที่ 1 ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
   กรณีที่ 2 ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$
4. สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก
   ถ้า $a + c > b + c$ แล้ว $a > b$
5. สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ
   กรณีที่ 1 ถ้า $ac > bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a > b$
   กรณีที่ 2 ถ้า $ac > bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a < b$

ทฤษฎีบท 15

ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง

ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $a + c > b + d$

บทนิยาม 4

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$a<b<c$ หมายถึง $a<b$ และ $b<c$

$a\le b\le c$ หมายถึง $a\le b$ และ $b\le c$

$a<b\le c$ หมายถึง $a<b$ และ $b\le c$

$a\le b<c$ หมายถึง $a\le b$ และ $b<c$

แบบฝึกหัด 3.8

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

1. จริงหรือไม่ ถ้า $a>b$ แล้ว $a^2>b^2$
2. จริงหรือไม่ ถ้า $a\ne 0, b\ne 0$ และ $a>b$ แล้ว $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$
3. จริงหรือไม่ ถ้า $a>b$ แล้ว $-a<-b$
4. จริงหรือไม่ ถ้า $a<0$ และ $b<0$ แล้ว $ab>0$
5. จริงหรือไม่ ถ้า $a>0$ และ $b<0$ แล้ว $ab<0$
6. จริงหรือไม่ ถ้า $a>0$ แล้ว $\frac{1}{a}>0$
7. กรณีใดบ้าง ถ้า $a>b$ แล้ว $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ เมื่อ $a\ne 0$ และ $b\ne 0$
8. กรณีใดบ้าง ถ้า $a>b$ แล้ว $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ เมื่อ $a\ne 0$ และ $b\ne 0$

3.9 อสมการพหุนามตัวแปรเดียว

ก่อนจะกล่าวถึงอสมการพหุนามตัวแปรเดียว จะนิยามสับเซตของเซตของจำนวนจริงซึ่งเรียกว่า **ช่วง (interval)** ดังนี้

บทนิยาม 5

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a<b$

ช่วงเปิด (a, b) หมายถึง เซต $\{x \mid a<x<b\}$

ช่วงปิด $[a, b]$ หมายถึง เซต $\{x \mid a \le x \le b\}$

ช่วงครึ่งเปิดหรือช่วงครึ่งปิด $(a, b]$ หมายถึง เซต $\{x \mid a<x \le b\}$

ช่วงครึ่งเปิดหรือช่วงครึ่งปิด $[a, b)$ หมายถึง เซต $\{x \mid a \le x<b\}$

ช่วงเปิดอนันต์ (a, ∞) หมายถึง เซต $\{x \mid x>a\}$

ช่วงเปิดอนันต์ $(-\infty, a)$ หมายถึง เซต $\{x \mid x<a\}$

ช่วงปิดอนันต์ $[a, \infty)$ หมายถึง เซต $\{x \mid x \ge a\}$

ช่วงปิดอนันต์ $(-\infty, a]$ หมายถึง เซต $\{x \mid x \le a\}$

หมายเหตุ อาจเขียนเซตของจำนวนจริงในรูปช่วงอนันต์ได้เป็น $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่างการเขียนกราฟของช่วงบนเส้นจำนวน

ช่วง $(2, 5)$

ช่วง $[2, 5]$

ช่วง $(2, 5]$

ช่วง $[2, 5)$

ช่วง $(2, \infty)$

ช่วง $[2, \infty)$

ช่วง $(-\infty, 5)$

ช่วง $(-\infty, 5]$

แบบฝึกหัด 3.9ก

1. จงเขียนช่วงต่อไปนี้ในรูปของเซตแบบบอกเงื่อนไข พร้อมทั้งแสดงกราฟของช่วงบนเส้นจำนวน

1) $[-3, 1)$	2) $(-2, \infty)$
3) $[4, 7]$	4) $(-3, 0)$
5) $(-\infty, -3)$	6) $[1, \infty)$
7) $(-1, 4]$	8) $(-\infty, 1]$
9) $(-10, -8)$	10) $[2.5, 4]$

2. ถ้า $A = (-1, 2)$ และ $B = [0, 4]$ จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปช่วง

1) $A \cup B$	2) $A \cap B$
3) $A - B$	4) $B - A$
5) A'	6) B'

3. ถ้า $A = \{x \mid 2 \le x \le 5\}$, $B = \{x \mid -1 < x < 3\}$ และ $C = \{x \mid 1 < x \le 4\}$ จงหาเซตต่อไปนี้

1) $B \cup C$	2) $A \cap C$
3) $A \cup B \cup C$	4) $A \cap B \cap C$
5) $A' \cap B$	6) $B' \cap C$
7) $(A \cup B) \cap C$	8) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

อสมการพหุนามตัวแปรเดียว

อสมการ (inequality) ใช้บ่งถึงประโยคทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวถึงการไม่เท่ากัน เช่น $2>1$ เป็นอสมการที่เป็นจริง $0<-1$ เป็นอสมการที่เป็นเท็จ ในกรณีที่อสมการเป็นประโยคเปิด เช่น $2x<8,\ x^2\geq 0,\ x^2+1<0$ เมื่อนำจำนวนจริงมาแทนตัวแปรในอสมการ จะได้อสมการที่เป็นจริงหรือเท็จ ดังนี้

เมื่อแทน x ใน $2x<8$ ด้วยจำนวนจริงที่น้อยกว่า 4 จะได้อสมการที่เป็นจริง
เมื่อแทน x ใน $x^2\geq 0$ ด้วยจำนวนจริงใด ๆ จะได้อสมการที่เป็นจริงเสมอ
เมื่อแทน x ใน $x^2+1<0$ ด้วยจำนวนจริงใด ๆ จะได้อสมการที่เป็นเท็จเสมอ

เซตคำตอบของอสมการ คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง ซึ่งเมื่อแทน x ในอสมการด้วยจำนวนจริงเหล่านั้น แล้วได้อสมการที่เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 30

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $3x+5<x-7$

วิธีทำ จาก $\quad 3x+5 < x-7$

จะได้

$$\begin{aligned} 3x &< x-12 \\ 2x &< -12 \\ x &< -6 \end{aligned}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \mid x<-6\}$ หรือ $(-\infty,-6)$ ■

ตัวอย่างที่ 31

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^2-5x+6>0$

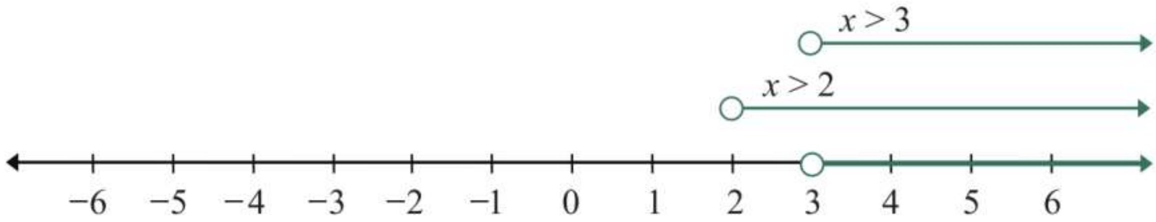
วิธีทำ เนื่องจาก $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

ดังนั้น $x^2-5x+6>0$ ก็ต่อเมื่อ $x-2$ และ $x-3$ เป็นจำนวนบวกทั้งคู่ หรือเป็นจำนวนลบทั้งคู่

กรณีที่ 1 $x-2>0$ และ $x-3>0$

นั่นคือ $x>2$ และ $x>3$

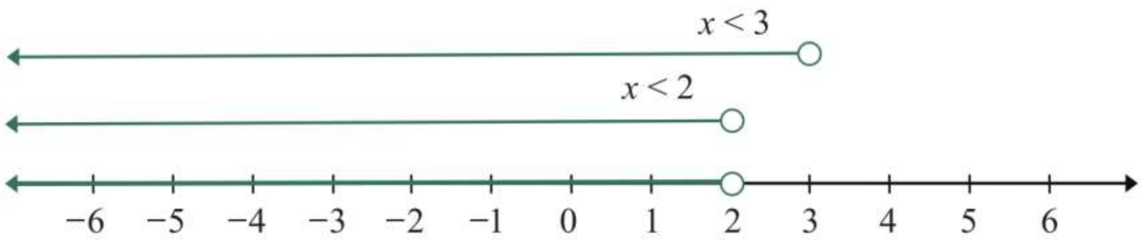
จำนวนจริงที่นำมาแทน x แล้ว ได้อสมการที่เป็นจริงทั้งคู่ คือ จำนวนจริงที่มากกว่า 3 ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



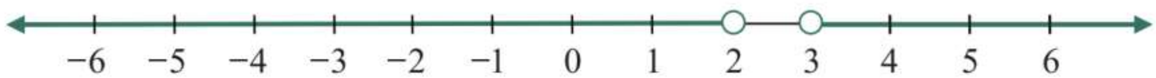
กรณีที่ 2 $x-2<0$ และ $x-3<0$

นั่นคือ $x<2$ และ $x<3$

จำนวนจริงที่นำมาแทน x แล้ว ได้อสมการที่เป็นจริงทั้งคู่ คือ จำนวนจริงที่น้อยกว่า 2 ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



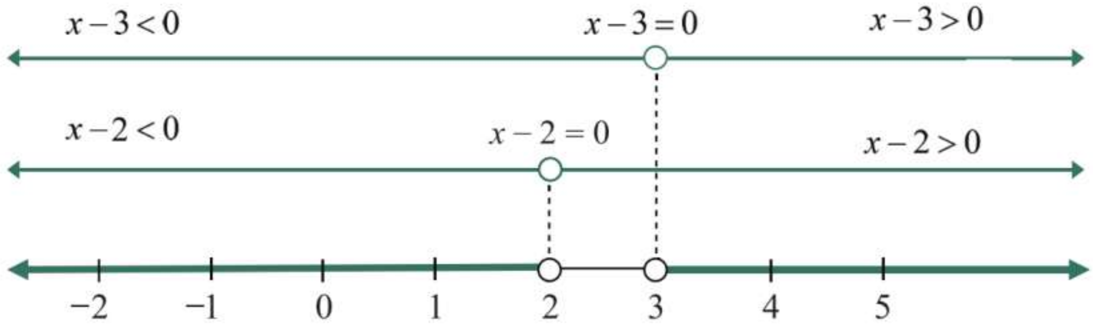
ดังนั้น จำนวนจริงที่เป็นคำตอบของอสมการ คือ จำนวนจริงทุกจำนวนที่น้อยกว่า 2 หรือจำนวนจริงทุกจำนวนที่มากกว่า 3 ซึ่งเขียนแสดงโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



จึงสรุปได้ว่า เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \mid x<2$ หรือ $x>3\}$ หรือ $(-\infty, 2)\cup(3, \infty)$

■

จากตัวอย่างข้างต้น การพิจารณาหาคำตอบของอสมการ $x^2-5x+6>0$ จะรวดเร็วขึ้น ถ้ารวบรัดขั้นตอนในการทำ กล่าวคือ แทนที่จะพิจารณาแยกเป็นกรณี อาจเริ่มโดยเขียนรูปแสดงค่าของ $x-2$ และ $x-3$ ว่าเป็นจำนวนบวกเมื่อใด เป็นจำนวนลบเมื่อใด แล้วดูว่าในช่วงใดที่ผลคูณของสองจำนวนดังกล่าวมีค่าตามต้องการ ดังนี้



จากรูป จะเห็นว่า เส้นจำนวนถูกแบ่งเป็น 3 ช่วงคือ $(-\infty, 2), (2, 3)$ และ $(3, \infty)$
จุดแบ่งคือ จุดที่ทำให้ $x-2$ และ $x-3$ เป็นศูนย์

จำนวนจริงในช่วง $(-\infty, 2)$ เป็นคำตอบของ $(x-2)(x-3)>0$ (จำนวนลบคูณจำนวนลบ)

จำนวนจริงในช่วง $(2, 3)$ เป็นคำตอบของ $(x-2)(x-3)<0$ (จำนวนบวกคูณจำนวนลบ)

จำนวนจริงในช่วง $(3, \infty)$ เป็นคำตอบของ $(x-2)(x-3)>0$ (จำนวนบวกคูณจำนวนบวก)

เซตคำตอบจึงเป็น $(-\infty, 2)\cup(3, \infty)$

ในกรณีที่อสมการใช้เครื่องหมาย $\geq$ หรือ $\leq$ ในการพิจารณาคำตอบ จะต้องพิจารณาจำนวนจริงที่จุดแบ่งด้วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

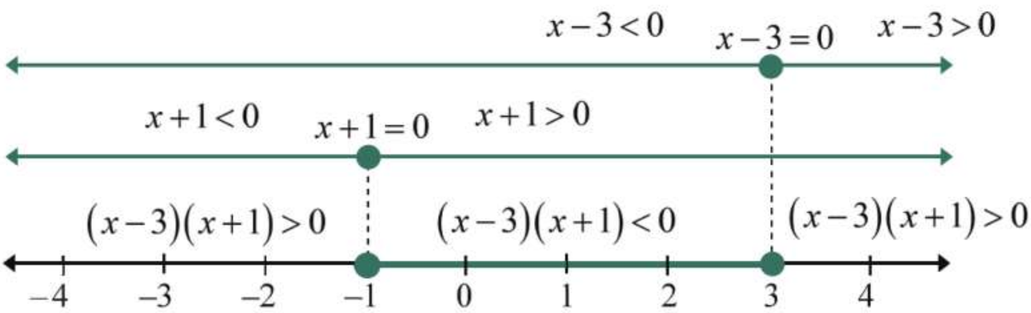
ตัวอย่างที่ 32

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^2-2x-3\le 0$

วิธีทำ จาก $x^2-2x-3 \le 0$

จะได้ $(x-3)(x+1) \le 0$

หาค่าของ $(x-3)(x+1)$ ว่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ในช่วงใด โดยพิจารณาจากค่าของ $x-3$ และ $x+1$ โดยใช้เส้นจำนวนดังนี้



จากรูป ผลคูณของ $x-3$ กับ $x+1$ จะเป็นจำนวนลบหรือศูนย์ เมื่อแทน x ด้วยจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ -1 แต่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 3 จึงสรุปได้ว่าเซตคำตอบของอสมการที่กำหนดให้ คือ $\{x \mid -1\le x\le 3\}$ หรือ $[-1, 3]$ ■

ตัวอย่างที่ 33

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

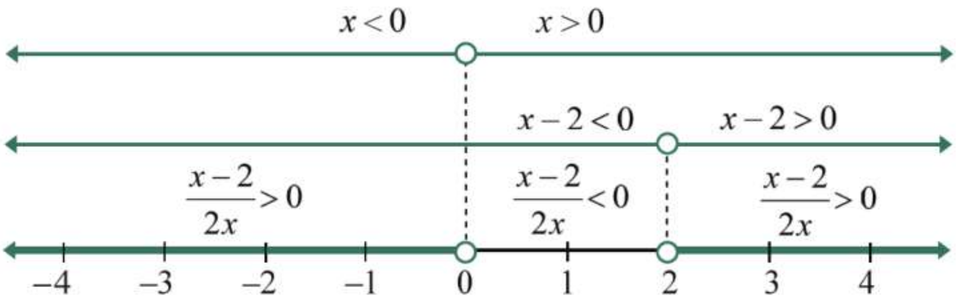
วิธีทำ จาก $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

จะได้ $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} < 0$

$$\frac{2-x}{2x} < 0$$

$$\frac{x-2}{2x} > 0$$

หาค่าของ $\frac{x-2}{2x} > 0$ ว่ามากกว่าศูนย์ในช่วงใด โดยพิจารณาจากค่าของ $x-2$ และ x โดยใช้เส้นจำนวนดังนี้



จากรูป ผลหารของ $x-2$ กับ x จะเป็นจำนวนบวก เมื่อแทน x ด้วยจำนวนจริงที่น้อยกว่า 0 หรือจำนวนจริงที่มากกว่า 2 จึงสรุปได้ว่าเซตคำตอบของอสมการ คือ $\{x \mid x<0 \text{ หรือ } x>2\}$ หรือ $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ ■

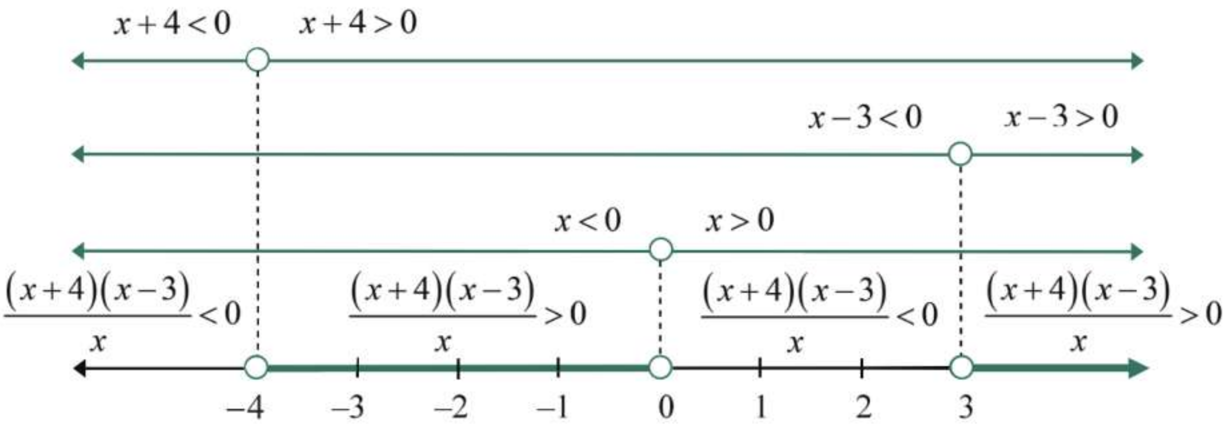
ตัวอย่างที่ 34

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\dfrac{x^2-12}{x} > -1$

วิธีทำ จาก $\dfrac{x^2-12}{x} > -1$

จะได้
$$\frac{x^2-12}{x}+1 > 0$$
$$\frac{x^2+x-12}{x} > 0$$
$$\frac{(x+4)(x-3)}{x} > 0$$

พิจารณาเส้นจำนวน



ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \mid -4 < x < 0$ หรือ $x > 3\}$ หรือ $(-4, 0) \cup (3, \infty)$ ■

ตัวอย่างที่ 35

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\frac{x}{x+8} \le \frac{1}{x-1}$

วิธีทำ จาก $\frac{x}{x+8} \le \frac{1}{x-1}$

จะได้

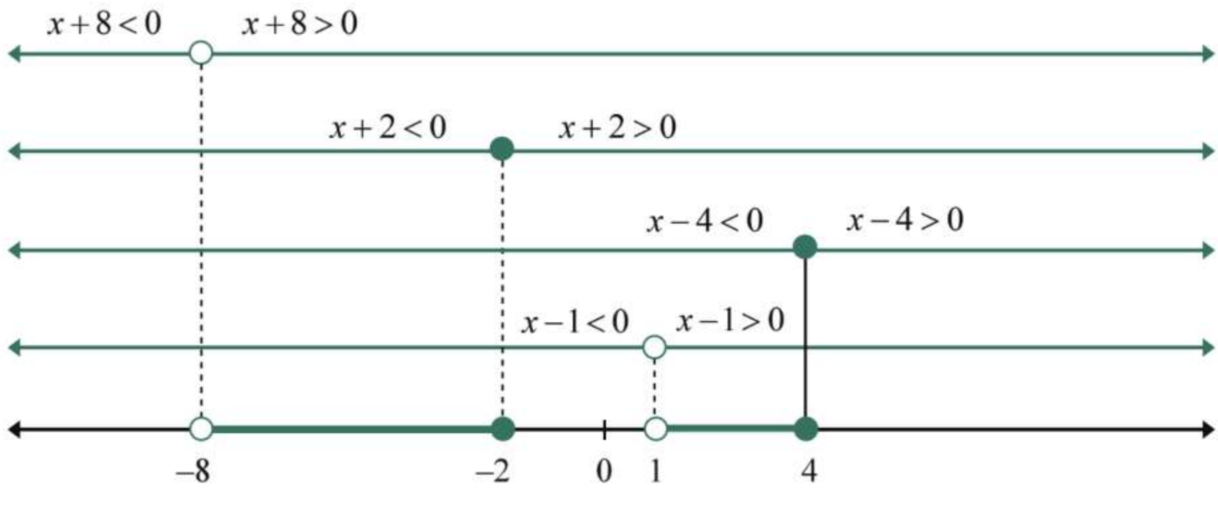
$$\frac{x}{x+8} - \frac{1}{x-1} \le 0$$

$$\frac{x(x-1)-(x+8)}{(x+8)(x-1)} \le 0$$

$$\frac{x^2-2x-8}{(x+8)(x-1)} \le 0$$

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+8)(x-1)} \le 0$$

พิจารณาเส้นจำนวน



ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \mid -8 < x \le -2$ หรือ $1 < x \le 4\}$ หรือ $(-8, -2] \cup (1, 4]$ ■

แบบฝึกหัด 3.9ข

จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $3x+1<2x-1$
2. $4y+7>2(y+1)$
3. $2(3y-1)>3(y-1)$
4. $4-(3-x)<3x-(3-2x)$
5. $x^2-x-6\le 0$
6. $2x^2+7x+3\ge 0$
7. $6x-x^2\ge 5$
8. $2x<3-x^2$
9. $x^2+2x<15$
10. $3x^2+2\ge 7x$
11. $x^3-3x^2\le 10x$
12. $x^3-x^2-x+1\ge 0$
13. $x^3-x>2x^2-2$
14. $x(x^2+4)<5x^2$
15. $\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-2}\le 0$
16. $\dfrac{2x-3}{(x+2)(x-5)}>0$
17. $\dfrac{x^2+12}{x}>7$
18. $\dfrac{x^2+6}{x}\le 5$
19. $\dfrac{6}{x-1}>1$
20. $\dfrac{2x-4}{x-1}<1$
21. $\dfrac{6}{x-4}\le x+1$
22. $\dfrac{8}{x+2}\ge x$
23. $\dfrac{5-x}{x^2-3x+2}<1$
24. $\dfrac{x+6}{x(x+1)}<6$
25. $\dfrac{1}{x+1}\ge\dfrac{1}{x+4}$
26. $\dfrac{1}{x+2}\ge\dfrac{1}{2x-3}$
27. $\dfrac{x}{x+2}\ge\dfrac{1}{x}$
28. $\dfrac{x+1}{2x-3}\ge\dfrac{1}{x-3}$
29. $\dfrac{(x^2+3x-10)(x^2+x-6)}{x^2+2x-15}\ge 0$
30. $(x-1)^3(x+2)^4>0$
31. $(x-1)^3(x+2)^4<0$
32. $(2x+1)^3(x+1)^5<0$

3.10 ค่าสัมบูรณ์

บทนิยาม 6

ให้ a เป็นจำนวนจริง **ค่าสัมบูรณ์ (absolute value)** ของจำนวนจริง a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|a|$ โดยที่

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

หมายเหตุ

1. จากบทนิยาม ในกรณีที่ $a<0$ จะได้ $-a>0$ แสดงว่า $|a|=-a$ ซึ่งเป็นจำนวนบวก ดังนั้น สำหรับจำนวนจริง a จะได้ว่า $|a|$ มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ โดย $|a|$ จะเท่ากับ 0 เมื่อ $a=0$
2. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a สามารถพิจารณาเป็นระยะจากจุดที่แทน 0 ถึงจุดที่แทน a บนเส้นจำนวน

ทฤษฎีบท 16

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $|x| = |-x|$
2. $|xy| = |x||y|$
3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ เมื่อ $y \neq 0$
4. $|x-y| = |y-x|$
5. $|x|^2 = x^2$
6. $|x+y| \leq |x|+|y|$

ตัวอย่างต่อไปนี้ แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้น โดยอาศัยบทนิยาม

ตัวอย่างที่ 36

ให้ x เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า $|x| = |-x|$

พิสูจน์ **กรณีที่ 1** เมื่อ $x > 0$ จากบทนิยาม จะได้ $|x| = x$

เมื่อ $x > 0$ จะได้ $-x < 0$ ดังนั้น $|-x| = -(-x) = x$

กรณีที่ 2 เมื่อ $x = 0$ จากบทนิยาม จะได้ $|x| = 0 = |-x|$

กรณีที่ 3 เมื่อ $x < 0$ จากบทนิยาม จะได้ $|x| = -x$

เมื่อ $x < 0$ จะได้ $-x > 0$ ดังนั้น $|-x| = -x$

จากทั้งสามกรณี จะได้ $|x| = |-x|$ เสมอ ■

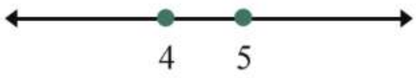
ตัวอย่างที่ 37

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า $|x-y| = |y-x|$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} |x-y| &= |-(x-y)| \\ &= |y-x| \end{aligned}$$
■

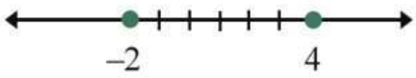
ข้อสังเกต สำหรับจำนวนจริง a และ b ค่าสัมบูรณ์ของ $a-b$ สามารถพิจารณาเป็นระยะจากจุดที่แทน a ถึงจุดที่แทน b บนเส้นจำนวน (นั่นคือ ความยาวของส่วนของเส้นตรงซึ่งจุดปลายทั้งสองคือ จุดที่แทน a และจุดที่แทน b) เช่น

ก.



จากรูป ระยะจากจุดที่แทน 4 ถึงจุดที่แทน 5 เป็น 1 หน่วย หาได้จากผลต่างระหว่าง 4 กับ 5 ซึ่งเขียนได้เป็น $|5-4|$ หรือ $|4-5|$

ข.



จากรูป ระยะจากจุดที่แทน -2 ถึงจุดที่แทน 4 เป็น 6 หน่วย หาได้จากผลต่างระหว่าง -2 กับ 4 ซึ่งเขียนได้เป็น $\left|4-(-2)\right|$ หรือ $\left|(-2)-4\right|$

แบบฝึกหัด 3.10

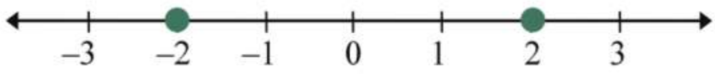
1. จงหาค่าของ
   1) $\left|-12+8\right|$
   2) $-\left|25\right|+\left|-25\right|$
   3) $\left|-5(10)\right|$
   4) $-\left|6\right|^2$
   5) $\left|-\dfrac{28}{6}\right|$
   6) $\left\|-2.5\right|-\left|3\right\|$

2. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จงพิจารณาข้อต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้ยกตัวอย่างค้าน
   1) $\left|a+(-b)\right|=\left|a\right|+\left|-b\right|$
   2) $\left|-a\right|^2=-\left(a^2\right)$
   3) $\left|-\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{\left|-a\right|}{\left|b\right|}$ เมื่อ $b\neq 0$
   4) $\left|(-a)(b)\right|=\left|-a\right|\left|b\right|$
   5) $\left|-a-b\right|\leq\left|-a\right|-\left|b\right|$
   6) ถ้า $a<0$ แล้ว $\left|a\right|<a$

3. จงหาเงื่อนไขของจำนวนจริง x และ y ที่ทำให้
   1) $\left|x+y\right|<\left|x\right|+\left|y\right|$
   2) $\left|x+y\right|=\left|x\right|+\left|y\right|$

3.11 สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ของพหุนามตัวแปรเดียว

เมื่อพิจารณาบนเส้นจำนวน $|x| = a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 เป็นระยะทาง a หน่วย เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก เช่น จาก $|x| = 2$ จุดที่แทน x คือ จุดที่อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 เป็นระยะทาง 2 หน่วย ซึ่งมีสองจุด ได้แก่ จุดที่แทน 2 และ -2 แสดงบนเส้นจำนวน ได้ดังนี้



ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $|x| = 2$ คือ $\{-2, 2\}$
สรุปในกรณีทั่วไปได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 17

ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก

เซตของคำตอบของสมการ $|x| = a$ คือ $\{-a, a\}$

ตัวอย่างที่ 38

จงหาเซตคำตอบของสมการ $|2x+1|=5$

วิธีทำ **วิธีที่ 1** จาก $|2x+1|=5$

กรณีที่ 1 $2x+1 \geq 0$ นั่นคือ $x \geq -\frac{1}{2}$

จะได้
$$\begin{aligned} 2x+1 &= 5 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \text{ ซึ่ง } 2 \geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ 2 เป็นคำตอบของสมการ

กรณีที่ 2 $2x+1<0$ นั่นคือ $x<-\frac{1}{2}$

จะได้ $-(2x+1) = 5$

$-2x = 6$

$x = -3$ ซึ่ง $-3<-\frac{1}{2}$

นั่นคือ -3 เป็นคำตอบของสมการ

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{-3, 2\}$

วิธีที่ 2 จาก $|2x+1|=5$

จากทฤษฎีบท 17 จะได้ว่า $2x+1=5$ หรือ $2x+1=-5$

นั่นคือ $x=2$ หรือ $x=-3$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{-3, 2\}$ ■

ตัวอย่างที่ 39

จงหาเซตคำตอบของสมการ $|2x-1|=x+5$

วิธีทำ **วิธีที่ 1** จาก $|2x-1|=x+5$

กรณีที่ 1 $2x-1\geq 0$ นั่นคือ $x\geq\frac{1}{2}$

จะได้ $2x-1 = x+5$

$x = 6$ ซึ่ง $6\geq\frac{1}{2}$

นั่นคือ 6 เป็นคำตอบของสมการ

กรณีที่ 2 $2x-1<0$ นั่นคือ $x<\frac{1}{2}$

จะได้
$$\begin{aligned} -(2x-1) &= x+5 \\ -3x &= 4 \\ x &= -\frac{4}{3} \text{ ซึ่ง } -\frac{4}{3}<\frac{1}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ $-\frac{4}{3}$ เป็นคำตอบของสมการ

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{-\frac{4}{3}, 6\right\}$

วิธีที่ 2 จาก $|2x-1|=x+5$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้
$$\begin{aligned} |2x-1|^2 &= (x+5)^2 \\ (2x-1)^2 &= (x+5)^2 \\ (2x-1)^2-(x+5)^2 &= 0 \\ (2x-1+x+5)(2x-1-x-5) &= 0 \\ (3x+4)(x-6) &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ $x=-\frac{4}{3}$ หรือ $x=6$

ตรวจคำตอบ แทน x ในสมการ $|2x-1|=x+5$ ด้วย $-\frac{4}{3}$ จะได้

$$\left|2\left(-\frac{4}{3}\right)-1\right| = -\frac{4}{3}+5$$

$$\frac{11}{3}=\frac{11}{3} \text{ เป็นจริง}$$

แทน x ในสมการ $|2x-1|=x+5$ ด้วย 6 จะได้

$$|2(6)-1| = 6+5$$

$$11=11 \text{ เป็นจริง}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\left\{-\frac{4}{3}, 6\right\}$

ตัวอย่างที่ 40

จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x-1| = 2x-3$

วิธีทำ **วิธีที่ 1** จาก $|x-1| = 2x-3$

กรณีที่ 1 $x-1 \geq 0$ นั่นคือ $x \geq 1$

จะได้ $x-1 = 2x-3$

$2 = x$ ซึ่ง $2 \geq 1$

นั่นคือ 2 เป็นคำตอบของสมการ

กรณีที่ 2 $x-1 < 0$ นั่นคือ $x < 1$

จะได้ $-(x-1) = 2x-3$

$-3x = -4$

$x = \frac{4}{3}$ ซึ่งขัดแย้งกับ $x < 1$

นั่นคือ $\frac{4}{3}$ ไม่ใช่คำตอบของสมการ

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{2\}$

วิธีที่ 2 จาก $|x-1| = 2x-3$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $|x-1|^2 = (2x-3)^2$

$$(2x-3)^2 - (x-1)^2 = 0$$

$$(2x-3+x-1)(2x-3-x+1) = 0$$

$$(3x-4)(x-2) = 0$$

จะได้ $x = \frac{4}{3}$ หรือ $x = 2$

ตรวจคำตอบ แทน x ใน $|x-1| = 2x-3$ ด้วย $\frac{4}{3}$ จะได้

$$\left|\frac{4}{3}-1\right| = 2\left(\frac{4}{3}\right)-3$$

$\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ เป็นเท็จ

แทน x ใน $|x-1| = 2x-3$ ด้วย 2 จะได้

$$|2-1| = 2(2)-3$$

$$1 = 1 \text{ เป็นจริง}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการคือ $\{2\}$ ■

แบบฝึกหัด 3.11ก

จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $|2x+1| = 3$
2. $|2x-5| = x+2$
3. $|3x-2| = x-1$
4. $|x| = x+2$
5. $|x| = 3-2x$
6. $|x^2-x-4| = 2$
7. $|x-1| = |2x+1|$
8. $2|x+3| = |x-2|$

การแก้อสมการในรูปค่าสัมบูรณ์

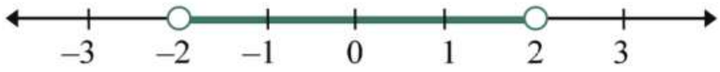
พิจารณาอสมการในรูป $|x|<a$ และ $|x|\le a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก โดยอาศัยบทนิยามของค่าสัมบูรณ์ และใช้เส้นจำนวนเป็นเครื่องช่วย จะได้ว่า

อสมการ $|x|<a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 น้อยกว่า a หน่วย นั่นคือ $|x|<a$ มีความหมายตรงกับอสมการ $-a<x$ และ $x<a$ ซึ่งเขียนรวมเป็น $-a<x<a$

อสมการ $|x|\le a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 น้อยกว่าหรือเท่ากับ a หน่วย นั่นคือ $|x|\le a$ มีความหมายตรงกับอสมการ $-a\le x$ และ $x\le a$ ซึ่งเขียนรวมเป็น $-a\le x\le a$

เช่น เมื่อ $a = 2$

จาก $|x| < 2$ จุดที่แทน x แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ซึ่งมีความหมายเหมือนกับ $-2 < x < 2$

ดังนั้น เซตคำตอบของ $|x| < 2$ คือ $\{x \mid -2 < x < 2\}$ หรือ $(-2, 2)$

จาก $|x| \le 2$ จุดที่แทน x แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

ซึ่งมีความหมายเหมือนกับ $-2 \le x \le 2$

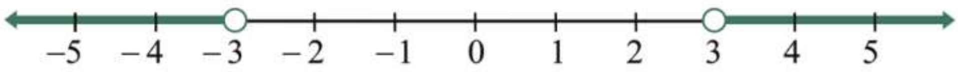
ดังนั้น เซตคำตอบของ $|x| \le 2$ คือ $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$ หรือ $[-2, 2]$

อสมการ $|x| > a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 มากกว่า a หน่วย นั่นคือ $|x| > a$ มีความหมายตรงกับอสมการ $x < -a$ หรือ $x > a$

อสมการ $|x| \ge a$ หมายถึง จุดที่แทน x อยู่ห่างจากจุดที่แทน 0 มากกว่าหรือเท่ากับ a หน่วย นั่นคือ $|x| \ge a$ มีความหมายตรงกับอสมการ $x \le -a$ หรือ $x \ge a$

เช่น เมื่อ $a = 3$

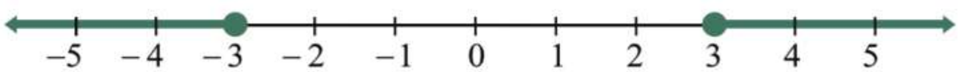
จาก $|x| > 3$ จุดที่แทน x แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ซึ่งมีความหมายเหมือนกับ $x < -3$ หรือ $x > 3$

ดังนั้น เซตคำตอบของ $|x| > 3$ คือ $\{x \mid x < -3$ หรือ $x > 3\}$ หรือ $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

จาก $|x| \ge 3$ จุดที่แทน x แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ซึ่งมีความหมายเหมือนกับ $x \le -3$ หรือ $x \ge 3$

ดังนั้น เซตคำตอบของ $|x| \ge 3$ คือ $\{x \mid x \le -3$ หรือ $x \ge 3\}$ หรือ $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

จากที่กล่าวมา สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 18

ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก

1. $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$
2. $|x| \le a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \le x \le a$
3. $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$
4. $|x| \ge a$ ก็ต่อเมื่อ $x \le -a$ หรือ $x \ge a$

ตัวอย่างที่ 41

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|2x+1| < 3$

วิธีทำ จากอสมการ $|2x+1| < 3$

จะได้

$$\begin{aligned} -3 &< 2x+1 < 3 \\ -3-1 &< 2x+1-1 < 3-1 \\ -4 &< 2x < 2 \\ -2 &< x < 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \mid -2 < x < 1\}$ หรือ $(-2, 1)$ ■

ตัวอย่างที่ 42

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left|\frac{x}{2} - 3\right| \ge 2$

วิธีทำ จากอสมการ $\left|\frac{x}{2} - 3\right| \ge 2$

จะได้ $\frac{x}{2} - 3 \le -2$ หรือ $\frac{x}{2} - 3 \ge 2$

$\frac{x}{2} \le 1$ หรือ $\frac{x}{2} \ge 5$

$x \leq 2$ หรือ $x \geq 10$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \mid x \leq 2$ หรือ $x \geq 10\}$ หรือ $(-\infty, 2] \cup [10, \infty)$

ตัวอย่างที่ 43

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|2x+1| < x+5$

วิธีทำ **วิธีที่ 1** จากอสมการ $|2x+1| < x+5$

เนื่องจาก $|2x+1| \geq 0$ ดังนั้น $x+5 > 0$ นั่นคือ $x > -5$

จากทฤษฎีบท 18 จะได้ $-(x+5) < 2x+1 < x+5$

ดังนั้น $-x-5 < 2x+1$ และ $2x+1 < x+5$

$-6 < 3x$ และ $x < 4$

$-2 < x$ และ $x < 4$

จะได้ $-2 < x < 4$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \mid -2 < x < 4\}$

วิธีที่ 2 จากบทนิยามของค่าสัมบูรณ์

กรณีที่ 1 $2x+1 \geq 0$ จะได้ $x \geq -\frac{1}{2}$

และ $2x+1 < x+5$

$x < 4$

ดังนั้น ค่า x ที่สอดคล้องคือ $-\frac{1}{2} \leq x < 4$

กรณีที่ 2 $2x+1 < 0$ จะได้ $x < -\frac{1}{2}$

และ $-(2x+1) < x+5$

$-6 < 3x$

$-2 < x$

ดังนั้น ค่า x ที่สอดคล้องคือ $-2 < x < -\frac{1}{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $\left[-\frac{1}{2}, 4\right) \cup \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ หรือ $(-2, 4)$

ตัวอย่างที่ 44

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left|\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right| \le 1$

วิธีทำ จากอสมการ $\left|\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right| \le 1$

จะได้
$$-1 \le \frac{1}{2}-\frac{x}{2} \le 1$$
$$-\frac{3}{2} \le -\frac{x}{2} \le \frac{1}{2}$$
$$-3 \le -x \le 1$$
$$-1 \le x \le 3$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \mid -1 \le x \le 3\}$ หรือ $[-1, 3]$ ■

ตัวอย่างที่ 45

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2|x-1| < |x+3|$

วิธีทำ เนื่องจาก $2|x-1| \ge 0$ และ $|x+3| \ge 0$ สำหรับจำนวนจริง x

จะได้
$$4|x-1|^2 < |x+3|^2$$
$$4x^2-8x+4 < x^2+6x+9$$
$$3x^2-14x-5 < 0$$
$$(3x+1)(x-5) < 0$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $\left(-\frac{1}{3}, 5\right)$ ■

ตัวอย่างที่ 46

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left|\frac{x-1}{x-2}\right| > 2$

วิธีทำ จากโจทย์ ทราบว่า $x \neq 2$

และจาก $\left|\frac{x-1}{x-2}\right| > 2$

จะได้ $|x-1| > 2|x-2|$ โดยที่ $x \neq 2$

$$|x-1|^2 > 4|x-2|^2$$

$$x^2-2x+1 > 4x^2-16x+16$$

$$3x^2-14x+15 < 0$$

$$(3x-5)(x-3) < 0$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $\left(\frac{5}{3}, 3\right)-\{2\}$ หรือ $\left(\frac{5}{3}, 2\right)\cup(2, 3)$ ■

ตัวอย่างที่ 47

ในแต่ละวัน ถ้าแม่ค้าขายสินค้าได้ x หน่วย แล้วจะมีรายได้ $5x-15$ บาทต่อวัน โดยเฉลี่ยแม่ค้ามีรายได้วันละ 1,000 บาท ถ้าต้องการให้รายได้แต่ละวันแตกต่างจากรายได้เฉลี่ยไม่เกิน 50 บาท แม่ค้าควรขายสินค้าให้ได้วันละกี่หน่วย

วิธีทำ แม่ค้าขายสินค้า x หน่วย มีรายได้วันละ $5x-15$ บาท

โดยมีรายได้เฉลี่ยวันละ 1,000 บาท

ต้องการให้รายได้แต่ละวันแตกต่างจากรายได้เฉลี่ยไม่เกิน 50 บาท

เขียนให้อยู่ในรูปอสมการค่าสัมบูรณ์ได้ว่า $|(5x-15)-1{,}000| \leq 50$

จะได้ $-50 \leq 5x-1{,}015 \leq 50$

$$965 \leq 5x \leq 1{,}065$$

$$193 \leq x \leq 213$$

ดังนั้น ถ้าต้องการให้มีรายได้แต่ละวันแตกต่างจากรายได้เฉลี่ยไม่เกิน 50 บาท แม่ค้าต้องขายสินค้าให้ได้ตั้งแต่ 193 ถึง 213 หน่วยต่อวัน ■

แบบฝึกหัด 3.11ข

1. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1) $|x-2|<1$
2) $|x+3|>5$
3) $|3x+5|\geq 4$
4) $|2x-1|\leq 11$
5) $2|x-2|>x$
6) $|3x+4|\leq x+2$
7) $|2x+1|<3x+2$
8) $|x+1|>x-3$
9) $|x|\geq|x-1|$
10) $2|x+2|<|x+3|$
11) $3|x-2|\leq|x+6|$
12) $2|2x-1|>3|x+1|$
13) $\left|\dfrac{x}{x+4}\right|>2$
14) $\left|x-\dfrac{4}{x}\right|\leq 3$
15) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|<1$
16) $\left|\dfrac{x}{x-2}\right|>2$

2. จากการศึกษาของนักดาราศาสตร์พบว่า อุณหภูมิบนพื้นผิวดาวอังคารเป็นไปตามอสมการ $|C+84|\leq 56$ เมื่อ C แทนอุณหภูมิบนพื้นผิวดาวอังคาร มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส จงหาช่วงของอุณหภูมิบนพื้นผิวของดาวอังคารที่เป็นไปได้จากอสมการนี้

3. ในการทดสอบว่าเหรียญเที่ยงตรงหรือไม่ ทำได้โดยทดลองโยนเหรียญ 100 ครั้ง แล้วบันทึกจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัว กำหนดให้ x เป็นจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัว โดยทฤษฎีทางสถิติกล่าวว่า ถ้าเหรียญที่นำมาทดลองโยนนั้นไม่เที่ยงตรง จะได้ $\left|\dfrac{x-50}{5}\right|\geq 1.645$ จงหา x ที่ทำให้เหรียญไม่เที่ยงตรง

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับจำนวนจริง a และ b หรือไม่ ถ้าเป็นเท็จให้ยกตัวอย่างค้านประกอบ
   1) ถ้า $a<1$ แล้ว $a^{-1}>1$
   2) ถ้า $a^2<b^2$ แล้ว $a<b$
   3) ถ้า $ab>1$ และ $a<1$ แล้ว $b>1$

2. ถ้า $x^2+4x+5=(x+a)^2+b^2$ เมื่อ $b>0$ จงหาค่าของ a และ b

3. จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหารพหุนาม $p(x)$ ด้วยพหุนาม $q(x)$ เมื่อกำหนดให้
   1) $p(x)=x^3-x^2+3x-4$ และ $q(x)=x-1$
   2) $p(x)=4x^3+2x^2-x+6$ และ $q(x)=2x+1$
   3) $p(x)=x^5+2x^3+5x+6$ และ $q(x)=x^2-2$
   4) $p(x)=x^4-3x-4$ และ $q(x)=2x^2+3$
   5) $p(x)=2x^7-2x^4+3$ และ $q(x)=x-1$
   6) $p(x)=x^9-3x^4+2$ และ $q(x)=x^4+2x$
   7) $p(x)=x^{10}-2x+1$ และ $q(x)=x^2-1$
   8) $p(x)=3-3x^{10}-x^2$ และ $q(x)=x^3+1$
   9) $p(x)=x^{10}-6x^7+2x^6-8x^3$ และ $q(x)=x^6+x^3-1$

4. จงหาเศษเหลือจากการหารพหุนาม $p(x)$ ด้วยพหุนาม $q(x)$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ
   1) $p(x)=x^3-3x+15$ และ $q(x)=x+3$
   2) $p(x)=x^{15}-3x^{12}+7$ และ $q(x)=x-1$
   3) $p(x)=x^6-x^4-125x^3+25x^2+75$ และ $q(x)=x-5$
   4) $p(x)=x^{100}+8x^{97}+x^2-x+5$ และ $q(x)=x+2$
   5) $p(x)=x^6+ax^5-2$ และ $q(x)=x+a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
   6) $p(x)=4x^3+x-2$ และ $q(x)=x-\frac{1}{2}$

5. ถ้าเศษเหลือจากการหารพหุนาม $p(x)$ ด้วย x^2-1 คือ $2x+13$ จงหา $p(1)$

6. ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามใด ๆ ถ้าเศษเหลือจากการหารพหุนาม $p(x)$ ด้วย x^2-5x+6 คือ $7x-8$ จงหา $p(2)-p(3)$

7. จงหาค่า m จากเงื่อนไขที่กำหนดให้
   1) $x-m$ หาร x^3-3 เหลือเศษ 5
   2) $a-b$ หาร $a^3-3a^2b+b^3+m$ ลงตัว

8. ถ้า $x-y$ เป็นตัวประกอบของ $x^3-3yx^2+y^3+a$ จงหาค่า a

9. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้
   1) $x^3+6x^2+11x+6$
   2) x^3-2x^2+4x-8
   3) $x^3+5x^2+2x-12$
   4) $x^4-x^3-4x^2-2x-12$
   5) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16$
   6) $4x^3+5x^2+5x+1$
   7) $2x^3-x^2+6x-3$
   8) $4x^4-4x^3-3x^2+2x+1$
   9) $2x^4+9x^3-12x^2-29x+30$
   10) $2x^4-3x^3-9x^2+9x-2$

10. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้
   1) $x^2-2x-4=0$
   2) $x^3-13x+12=0$
   3) $x^3+5x^2-2x-24=0$
   4) $x^3+2x^2=4x+8$
   5) $x^3-x^2-8x+12=0$
   6) $x^3-2x+1=0$

7) $x^3 = x^2 + x + 2$

8) $4x^3 - 4x^2 - 7x - 2 = 0$

9) $6x^3 + 6x = 11x^2 + 1$

10) $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$

11) $4x^4 + 8x^3 + x^2 = 3x + 1$

12) $7x^3 = 2x^4 + 4x + 1$

11. จงหาจำนวนจริง A, B และ C ที่ทำให้สมการในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1) $\dfrac{5x-7}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+1}$

2) $\dfrac{3x^3 + 2x - 4}{x^3 + 3x} = 3 + \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+3}$

3) $\dfrac{2x^2 - x + 5}{x^3 + 4x^2 - 5x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} - \dfrac{C}{x+5}$

4) $\dfrac{Ax+B}{x^2 - 5x + C} = \dfrac{6}{x-3} + \dfrac{7}{x-2}$

12. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1) $\dfrac{x(x-3)(x+2)}{x(x-3)(x-2)} = 0$

2) $\dfrac{x(x+3)}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{4}{(x+2)(x-1)}$

3) $\dfrac{x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = 0$

4) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = 1$

5) $\dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{3}{x+1}$

6) $\dfrac{1}{x^2-2x-8} + \dfrac{1}{x^2-5x+4} + \dfrac{1}{x^2+x-2} = 0$

7) $\frac{x}{x+4}+\frac{1}{x+2}+\frac{2x}{x^2+6x+8}=0$

8) $\frac{2x^2+5x-7}{2x^2+x-3}=\frac{1}{2x+3}$

9) $\frac{2x+1}{x^2-1}-\frac{2}{x-2}=\frac{5}{x^2+x}$

10) $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2}{x-2}$

13. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1) $2(x+1)<x+2$

2) $4x+7>2(x+1)$

3) $4-(3-x)<3x-(3-2x)$

4) $2x^2-x-6\geq 0$

5) $x^2\geq 2x-3$

6) $x(x+1)\leq 20$

7) $(x-1)(x-4)>(x-2)(x-3)$

8) $x^3+4>3x^2$

9) $(x-1)(x-2)(x-3)<(x-1)(x-2)$

10) $(x-2)(x-3)^2(x-4)\leq 0$

11) $(x-2)(x-3)^2(x-4)\geq 0$

12) $(x+1)(4-x)(x-6)^2\geq 0$

14. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1) $\frac{1}{x}>\frac{1}{x+1}$

2) $\frac{3}{x-1}\leq 1$

3) $\dfrac{2x-4}{x-1} \geq 2$

4) $\dfrac{x+1}{x+2} < 1$

5) $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{1}{x+4}$

6) $\dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{1}{2x-3}$

7) $x + \dfrac{4}{x} \leq 4$

8) $\dfrac{x^2-3}{x+1} < x+1$

9) $\dfrac{2x^2-6x+1}{x^2-2x-3} \leq 1$

10) $\dfrac{1-x}{(x-2)(x-5)} \leq 1$

11) $\dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$

12) $\dfrac{x}{x^2+2} \geq 3$

13) $\dfrac{11-5x}{x^2-x-2} \leq 1$

14) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x-4)} \leq 0$

15) $\dfrac{(x^2+3x-10)(x^2+x-6)}{x^2+2x-15} \leq 0$

15. โรงงานผลิตกล่องดินสอแห่งหนึ่งมีค่าใช้จ่ายในการผลิตกล่องดินสอกล่องละ 26 บาท และมีค่าใช้จ่ายอื่น ๆ อีกสัปดาห์ละ 30,000 บาท ถ้าโรงงานขายกล่องดินสอกล่องละ 30 บาท จงหาว่า ในหนึ่งสัปดาห์โรงงานจะต้องผลิตกล่องดินสออย่างน้อยที่สุดกี่กล่องจึงจะไม่ขาดทุน

16. รายได้ของบริษัทแห่งหนึ่งสอดคล้องกับสมการ $p(x) = 30x^2 - 35940x - 72000$
เมื่อ x แทนจำนวนสินค้าที่บริษัทผลิตและจำหน่าย (ชิ้น)
$p(x)$ แทนรายได้จากการขายสินค้า x ชิ้น (บาท)
จงหาว่า บริษัทจะต้องผลิตและจำหน่ายสินค้าอย่างน้อยที่สุดกี่ชิ้นจึงจะไม่ขาดทุน

17. ถ้าฐานของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งสั้นกว่าส่วนสูง 5 เซนติเมตร พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้จะมีค่าอยู่ระหว่าง 42 และ 52 ตารางเซนติเมตร ความยาวของฐานควรอยู่ในช่วงใด

18. จำนวนคี่สามจำนวนที่เรียงติดกันคูณกันแล้วไม่มากกว่า 315 จงหาผลคูณที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ของทั้งสามจำนวน

19. ช่างตัดเสื้อซื้อผ้ามาทั้งสิ้น 600 บาท ตัดเก็บไว้ 5 เมตร ที่เหลือขายไปในราคาสูงกว่าต้นทุนเมตรละ 10 บาท ได้กำไร 80 บาท ช่างตัดเสื้อซื้อผ้ามาราคาเมตรละเท่าใด

20. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1) $|x-2| = 2x$

2) $|2x-1| = x+4$

3) $|3x-1| = |x-5|$

4) $|x^2-3x+1| = x-2$

5) $|x^2+2x-1| = x+5$

6) $|x^2-3x-4| = |2x+2|$

7) $|x|+|x-3| = 2$

8) $4|x| = |x-2|+1$

⭐ 9) $|x-1|+|x-2| = 3$

⭐ 10) $|x|-|x-2| = x-1$

21. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1) $|2x-4| > x+1$

2) $|x-4| \le 2x+1$

3) $|2x-3| < 3x-7$

4) $|x^2-4| \le |x^2-2x|$

5) $|2x^2-5x-1| \le |x^2-x+4|$

6) $2\left|\dfrac{x-1}{x-5}\right| \le \left|\dfrac{x-5}{x-4}\right|$

7) $\dfrac{1}{|x|-2} \ge \dfrac{2}{|x|+1}$

8) $\dfrac{|x|+6}{x+2} + 1 < \dfrac{|x|}{x-3}$

☆ 9) $\left|\dfrac{x-3}{x}\right| \ge \dfrac{x+5}{x+2}$

22. สมชายเดินทางออกจากที่ทำงาน ซึ่งตั้งอยู่ที่หลักกิโลเมตรที่ 5 ของถนนสายหนึ่ง เพื่อไปซื้อของที่ร้านค้า ซึ่งตั้งอยู่บนถนนสายเดียวกัน จากนั้นจึงเดินทางกลับบ้านของตนเองซึ่งตั้งอยู่ที่หลักกิโลเมตรที่ 7 ของถนนสายดังกล่าว พบว่าได้เดินทางไปเป็นระยะทางทั้งสิ้น 4 กิโลเมตร จงหาตำแหน่งที่ตั้ง (ที่เป็นไปได้) ของร้านค้าดังกล่าว

บรรณานุกรม

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 เรื่องระบบจำนวนจริง.* กรุงเทพฯ: บริษัท พัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2559). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 10). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2559). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 10). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

Bello, I., Britton, J. R. & Kaul, A. (2010). *Topics in Contemporary Mathematics* (9^{th} ed). Canada: Brooks/Cole - Cengage Learning.

Choi, T. & Hong, D. S. (2016, March). Improving Approximations for π with GeoGebra. *Mathematics Teacher*, 109(7), 547-550.

Kandel S. (Writer) & Daniels, M. (Director). (1967). I, Mudd [Television series episode]. In Roddenberry, G. (Executive Producer), *Star Trek*. Los Angeles, CA: National Broadcasting Company.

Pollack, P. (2017, September 7). *Earliest Uses of Symbols of Number Theory*. Retrieved September 10, 2017, from http://jeff560.tripod.com/nth.html

Sigward, E., Brisoux, F., Brucker, C. & Monka, Y. (2010). *Odyssée Mathématiques 2de - Manuel de l'élève*. Paris, France: Hatier.

Venn, J. (1881). *Symbolic Logic*. London, UK: Macmillan and Company.

ที่มาของภาพ

หน้า 6	user:Alexandar.R./Wikimedia Commons/Public Domain
หน้า 25	Wikimedia Commons/Public Domain
หน้า 55	Marie-Lan Nguyen/Wikimedia Commons/Public Domain
หน้า 125	Ingimage

ภาคผนวก

ดัชนี

ประพจน์ย่อย	atomic statement	57
ประพจน์เชิงเดียว	simple statement	57
ประพจน์เชิงประกอบ	compound statement	57
จริง	true	57
เท็จ	false	57
ตารางค่าความจริง	truth table	57
และ	and	58
หรือ	or	59
ถ้า…แล้ว…	if…then…	61
ก็ต่อเมื่อ	if and only if	62
นิเสธ	negation	64
สัจนิรันดร์	tautology	78
สมเหตุสมผล	valid	82
ไม่สมเหตุสมผล	invalid	82
ตัวบ่งปริมาณ	quantifier	95
ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ	quantified statement	95

บทที่ 3

		หน้า
กฎการสะท้อน	reflexive law	132
กฎการสมมาตร	symmetric law	132
กฎการถ่ายทอด	transitive law	132
ดีกรี	degree	140
สัมประสิทธิ์	coefficient	140
สัมประสิทธิ์นำ	leading coefficient	140
ขั้นตอนวิธีการหารสำหรับพหุนาม	division algorithm for polynomials	142
ผลหาร	quotient	143
เศษเหลือ	remainder	143

บัญชีสัญลักษณ์

บทที่ 1

$\in, \notin$	เป็นสมาชิกของ, ไม่เป็นสมาชิกของ
$\{\ \}, \varnothing$	เซตว่าง
U	เอกภพสัมพัทธ์
$\mathbb{N}$	เซตของจำนวนนับ
$\mathbb{Z}$	เซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{Q}$	เซตของจำนวนตรรกยะ
$\mathbb{Q}'$	เซตของจำนวนอตรรกยะ
$\mathbb{R}$	เซตของจำนวนจริง
$A = B$	เซต A เท่ากับเซต B
$A \neq B$	เซต A ไม่เท่ากับเซต B
$A \subset B$	เซต A เป็นสับเซตของเซต B
$A \not\subset B$	เซต A ไม่เป็นสับเซตของเซต B
$P(A)$	เพาเวอร์เซตของเซต A
$A \cap B$	อินเตอร์เซกชันของเซต A และ B
$A \cup B$	ยูเนียนของเซต A และ B
A'	คอมพลีเมนต์ของเซต A

$A - B$	ผลต่างระหว่างเซต A และ B
$n(A)$	จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A

บทที่ 2

T	จริง
F	เท็จ
$p \wedge q$	p และ q
$p \vee q$	p หรือ q
$p \rightarrow q$	ถ้า p แล้ว q
$p \leftrightarrow q$	p ก็ต่อเมื่อ q
$\sim p$	นิเสธของ p
$\equiv$	สมมูล
$P(x)$	ประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร
$\forall x$	สำหรับ x ทุกตัว
$\exists x$	สำหรับ x บางตัว

บทที่ 3

$\mathbb{C}$	เซตของจำนวนเชิงซ้อน
$a + b$	ผลบวกของจำนวนจริง a และ b
$a \cdot b, ab$	ผลคูณของจำนวนจริง a และ b
$-a$	ตัวผกผันการบวกหรืออินเวอร์สการบวกของ a
a^{-1}	ตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณของ a
$a - b$	a ลบด้วย b
$\frac{a}{b}$	a หารด้วย b
$\deg(p(x))$	ดีกรีของพหุนาม $p(x)$
$\lvert a \rvert$	ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a

คณะผู้จัดทำ

คณะที่ปรึกษา

ดร.พรพรรณ ไวทยางกูร	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สัญญา มิตรเอม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.สุพัตรา ผาติวิสันติ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะผู้จัดทำหนังสือเรียน

นายประสาท สอ้านวงศ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สมพร สูตินันท์โอภาส	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจินตนา อารยะรังสฤษฏ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสุเทพ กิตติพิทักษ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปฐมาภรณ์ อวชัย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวอัมริสา จันทนะศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายพัฒนชัย รวิวรรณ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวภิญญูดา กลับแก้ว	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ศศิวรรณ เมลืองนนท์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.สุธารส นิลรอด	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายยูซุฟ เจะบ่าว	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่
ดร.สมพงษ์ ฉุยสุริฉาย	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่

คณะผู้พิจารณาหนังสือเรียน

รศ. ดร.อัจฉรา หาญชูวงศ์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
รศ. ดร.อิ่มจิตต์ เติมวุฒิพงษ์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณะบรรณาธิการ

รศ. ดร.วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
รศ. ดร.อมร วาสนาวิจิตร์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ผศ. ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ

ดร.อติชาต เกตตะพันธุ์	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ดร.นิธิ รุ่งธนาภิรมย์	นักวิชาการอิสระ
สาขาวิทยาศาสตร์มัธยมศึกษาตอนปลาย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ฝ่ายนวัตกรรมเพื่อการเรียนรู้	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปิยาภรณ์ ทองมาก	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ออกแบบปก

บริษัท พิงค์ บลู แบล็ค แอนด์ ออเร้จน์ จำกัด

ออกแบบรูปเล่ม

บริษัท เพอลังอิ พับลิชชิ่ง (ประเทศไทย) จำกัด

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ