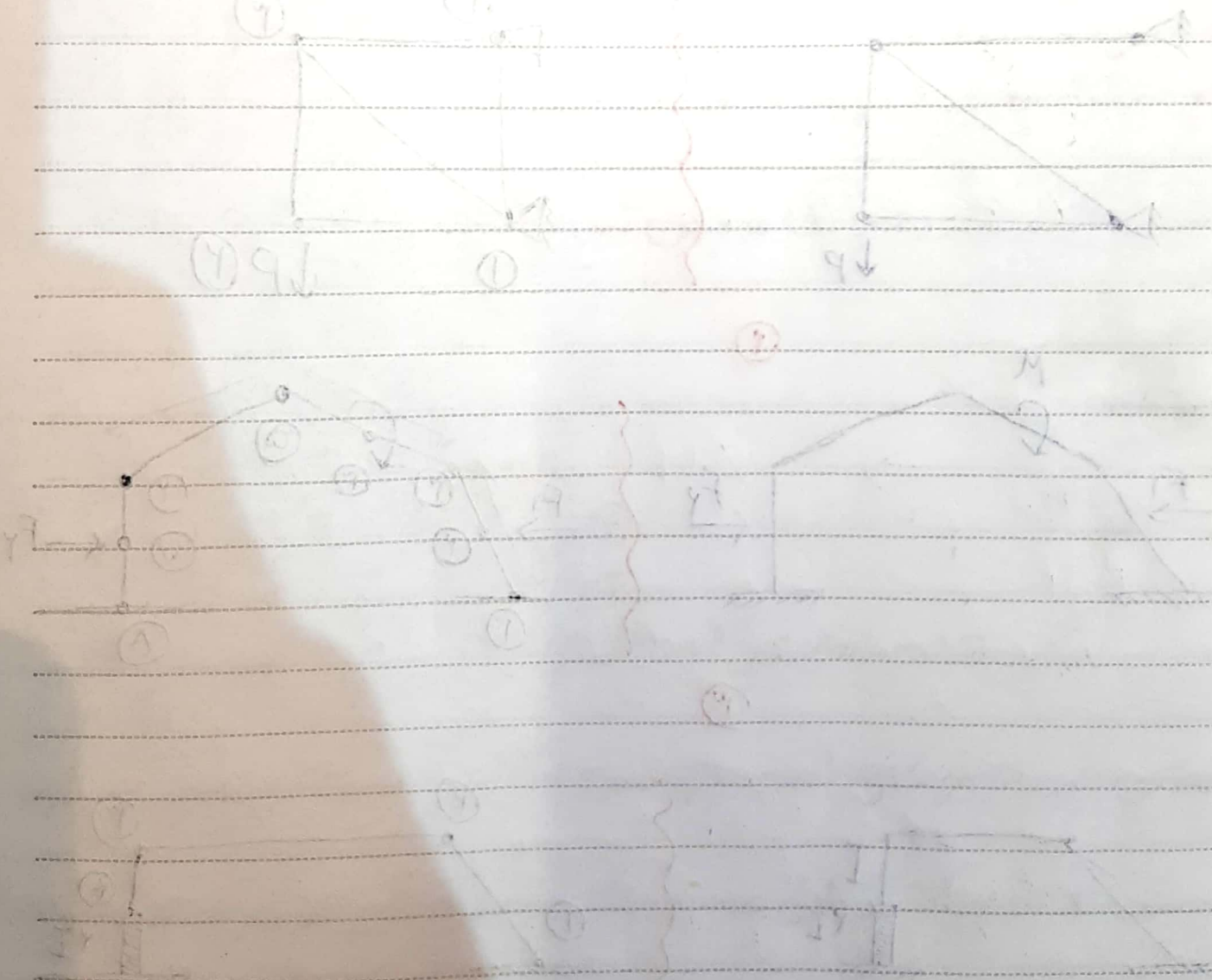
Subject: Date:

$M_{CD} = -0.499 \times 2.92 = -2.029$ t.m

$M_{DC} = -0.487 \times 2.92 = -2.673$ t.m

$\frac{6EI\Delta}{L^2} = 1 \longrightarrow \Delta'_{\text{مجازی}} = \frac{L^2}{6EI} = \frac{9}{6EI} = \frac{3}{2EI}$.

$\Delta_{\text{واقعی}} = X_0 \Delta'_{\text{مجازی}} = 2.92 \times \frac{3}{2EI} = \frac{4.38}{EI}$



MICRO

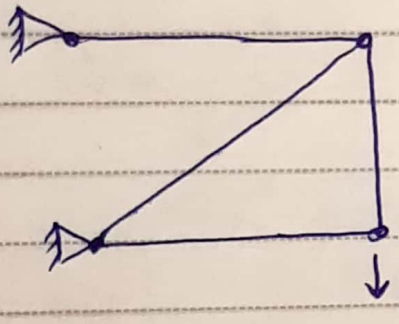
Scanned with CamScanner

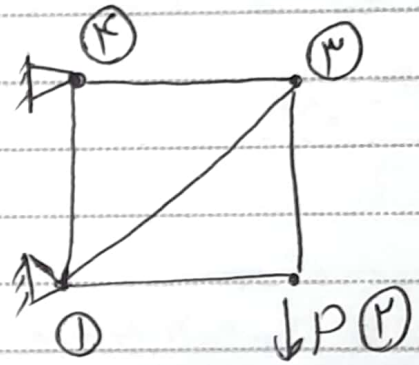
Subject:

## آشنایی با روش ماتریسی تحلیل سازه

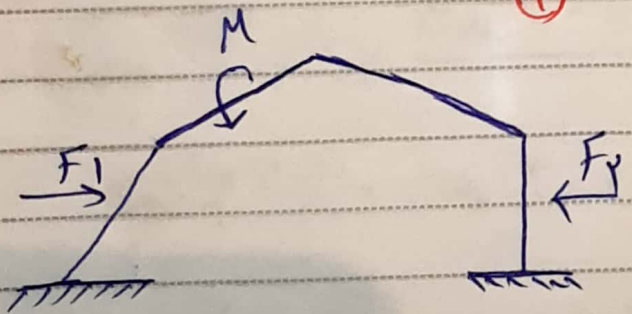
در روش ماتریسی تحلیل سازه، یک سازه حقیقی به صورت مجموعه‌ای از المان‌هایی که در نقاط مشخصی به یکدیگر مرتبط هستند در نظر گرفته می‌شود و در آن، محل انتخاب گره‌ها تنها بستگی به کل شکل سازه حقیقی و اریکه نقاطی از سازه که مطالعه و بررسی آن‌ها ضروری می‌باشد نیز مرتبط است:

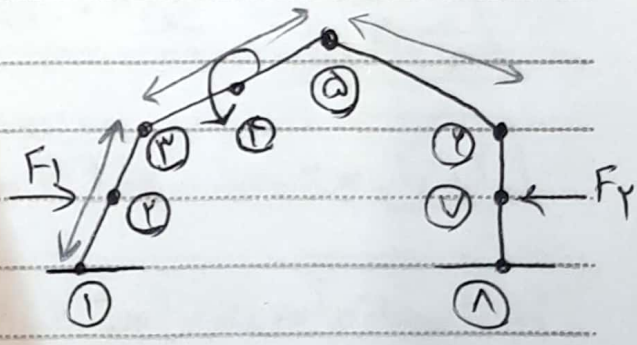
(۱)



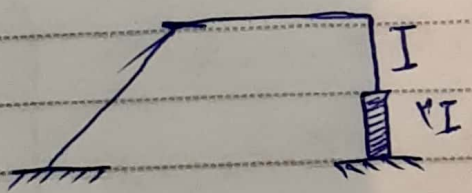



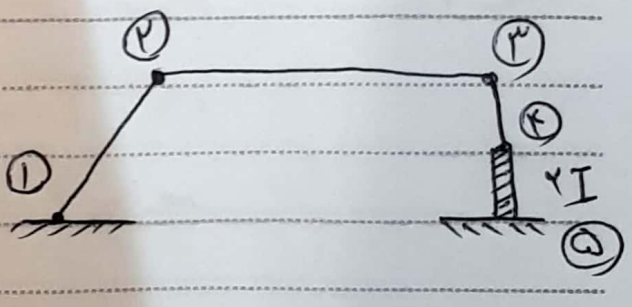

(۲)




(۳)




MICRO

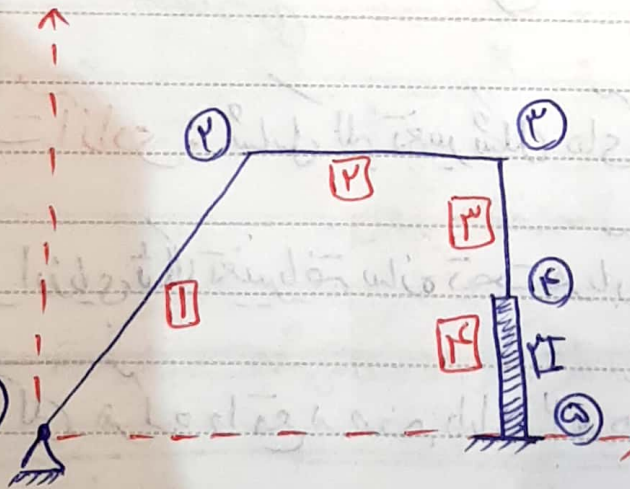
Scanned with CamScanner

Subject: Date:

## مفاهیم اولیه: مختصات کلی در XY بزرگ

دستگاه مختصات کلی XY: در روش تحلیل ماتریسی سازه، هندسه کل سازه و تغییر شکل های کلی (شامل تغییر مکان ها و دوران ها) نسبت به یک دستگاه مختصات کارتزین مرجع تعیین می شوند که آن را دستگاه مختصات کلی می نامیم و با XY نشان داده می شود.

در این دستگاه محور X در راستای افقی و به سمت راست و Y در راستای قائم و به سمت بالا می باشد و صدا آن در پایین ترین گره سمت چپ سازه قرار می گیرد.




رابطه بین نیرو - تغییر مکان اعضای سازه نسبت به یک دستگاه مختصاتی ایجاد می شود که محور x آن در امتداد طول عضو می باشد و محور y آن عمود بر امتداد عضو است که این دستگاه، عنوان دستگاه مختصات محلی در نظر گرفته می شود و برای عضو

MICRO

Scanned with CamScanner

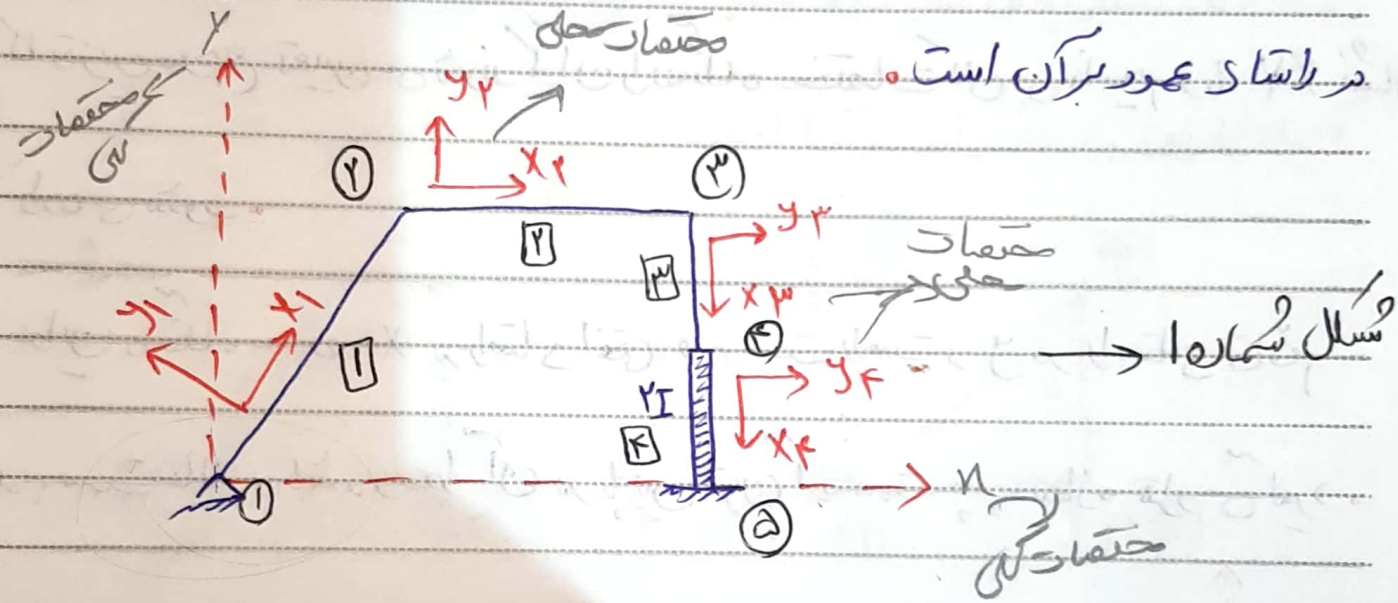
Subject:

Unit:

i ام از سازه $X_i Y_i$ نشان داده می‌شود.

جابجایی دیگر برای هر یک از اعضای سازه که دارای یک گره ابتدایی و یک گره انتهایی است؛

محور x در راستای عضو و در جهت گره ابتدایی به گره انتهایی می‌باشد و محور y در راستای عمود بر آن است.




درجات آزادی: شامل کلیه تغییر شکل هایی که می‌تواند تغییر مکان ها یا دوران است که برای ارزیابی شکل تغییر یافته سازه تحت هر بارگذاری در نظر گرفته لازم می‌باشد.

به طور کلی هر گره واقع در صفحه دارای ۳ درجه آزادی انتقالی محورهای x و y و یک درجه آزادی دورانی حول محور z است، که بسته به نوع قیدهای اعمال شده بر هر گره، برخی از این درجات آزادی حذف می‌شوند.

گره ۲ ← گره ۱

MICRO
Scanned with CamScanner

⇐ (صحتی تغییرمکان واحد در راستا صورد نظر است.)

Subject: Date:

۴ درجه آزادی

اول (۵ها) نوشته می‌شود.

گره ۱ ← $U_1$

گره ۲ ← $U_2, U_3, U_4$

گره ۳ ← $U_5, U_6, U_7$

گره ۴ ← $U_8, U_9, U_{10}$

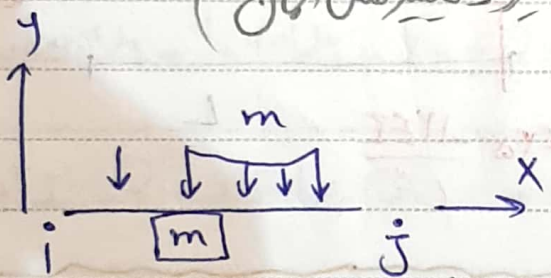
$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_9 \\ U_{10} \end{bmatrix}$

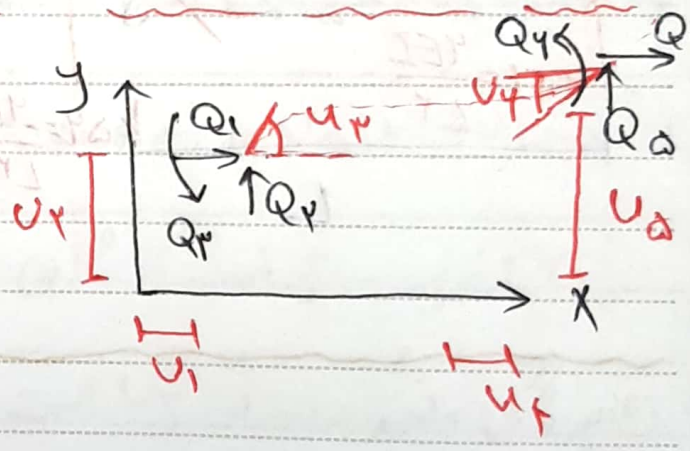
برشکل شماره ۱ صفحه قبل

گره ۵ ← فاقد درجه آزادی

(بردار درجات آزادی سازه)

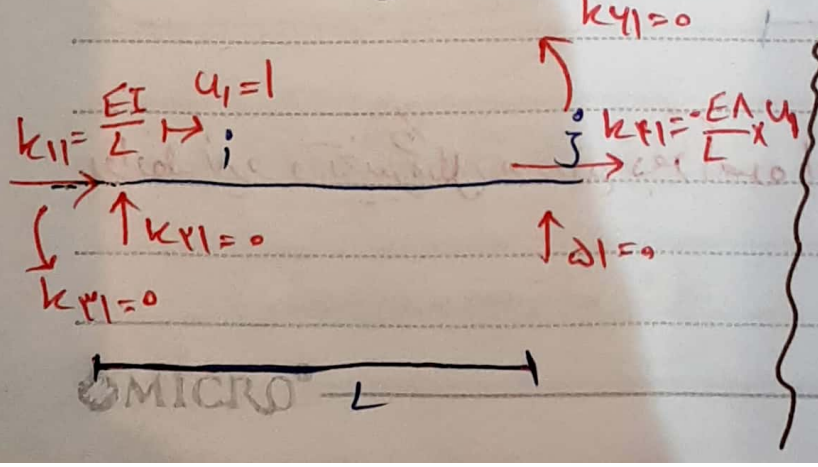
(نیرو ـ تغییرشکل المان)

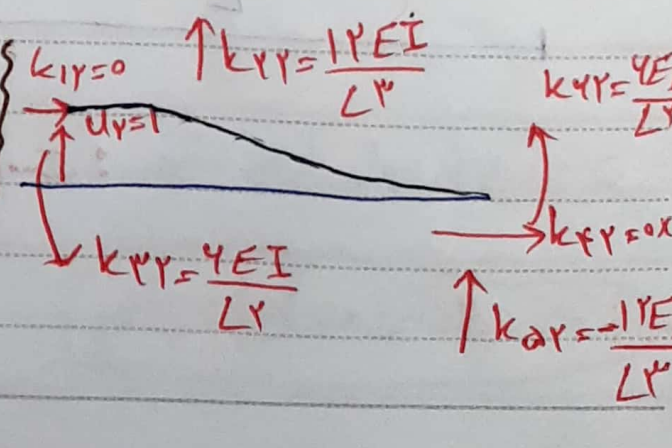


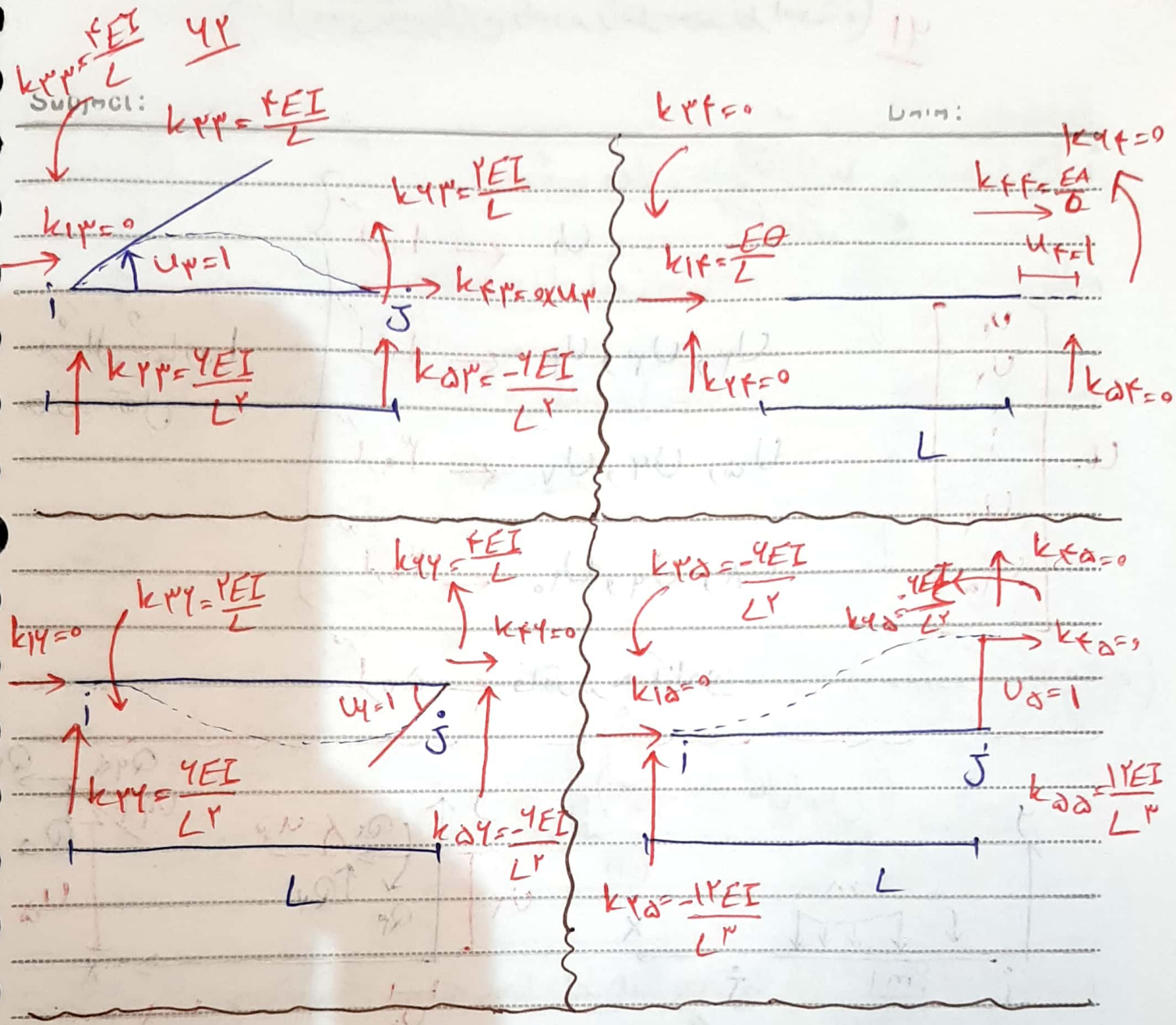

۶ مولفه تغییرشکل.

این نیروها، لنگرها و تغییرشکل‌های متناظر با آن‌ها مثلاً مثبت در نظر گرفته می‌شوند که در امتداد مثبت محور x و y محلی بوده و لنگرها و دوران‌های نیز پادساعتگرد باشند.




Scanned with CamScanner




روابط تیر و تغییرشکل به صفحه بعد آمده است:

MICRO®
Scanned with CamScanner

Subject: Date:

روابط نیرو تغییر شکل عضو در دستگاه مختصات محلی XY:

$$Q_1 = k_{11}U_1 + k_{12}U_2 + k_{13}U_3 + k_{14}U_4 + k_{15}U_5 + k_{16}U_6 + Qf_1$$

$$Q_2 = k_{21}U_1 + k_{22}U_2 + k_{23}U_3 + k_{24}U_4 + k_{25}U_5 + k_{26}U_6 + Qf_2$$

$$Q_3 = k_{31}U_1 + k_{32}U_2 + k_{33}U_3 + k_{34}U_4 + k_{35}U_5 + k_{36}U_6 + Qf_3$$

$$Q_4 = k_{41}U_1 + k_{42}U_2 + k_{43}U_3 + k_{44}U_4 + k_{45}U_5 + k_{46}U_6 + Qf_4$$

$$Q_5 = k_{51}U_1 + k_{52}U_2 + k_{53}U_3 + k_{54}U_4 + k_{55}U_5 + k_{56}U_6 + Qf_5$$

$$Q_6 = k_{61}U_1 + k_{62}U_2 + k_{63}U_3 + k_{64}U_4 + k_{65}U_5 + k_{66}U_6 + Qf_6$$

$k_{ij}$: ضریب سختی است که نشان دهنده مولفه لازم در امتداد $Q_i$ برای ایجاد تغییر شکل واحد در امتداد $U_j$ است و قتی سایر تغییر شکل ها برابر با صفر باشند.

روابط فوق را می توان به صورت زیر در دستگاه مختصات محلی نشان داد: (خیلی مهم)

$$Q = kU + Qf \rightarrow Q = kU + Qf$$

Q: بردار نیروهای گره ای عضو

U: بردار تغییر شکل های گره ای عضو

Qf: بردار نیروهای گیرداری عضو

k: ماتریس سختی عضو

OMICRO

Scanned with CamScanner

۴۴

Subject:

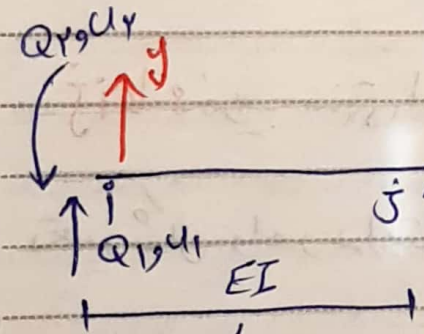
Date:

$$k = \frac{EI}{L^3}$$

المان خاص

$$\begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

از اثر سختی نیروی محوری صرف نظر کنیم

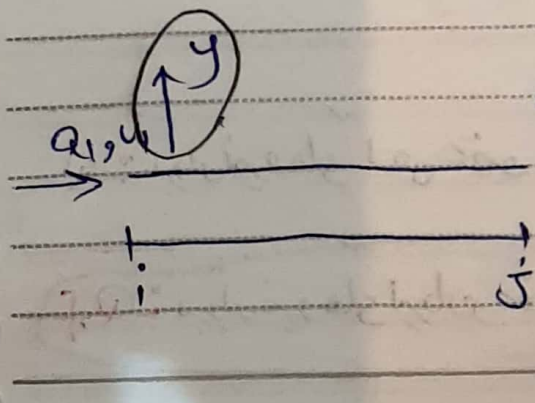



$$k = \frac{EI}{L^3}$$

(یک عضو تیر)

$$\begin{bmatrix} 12L & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس سختی یک عضو تیر در دستگاه دوبعدی (صفحه‌ای) است.




$$k = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی یک عضو خرپا

(یک عضو خرپا)

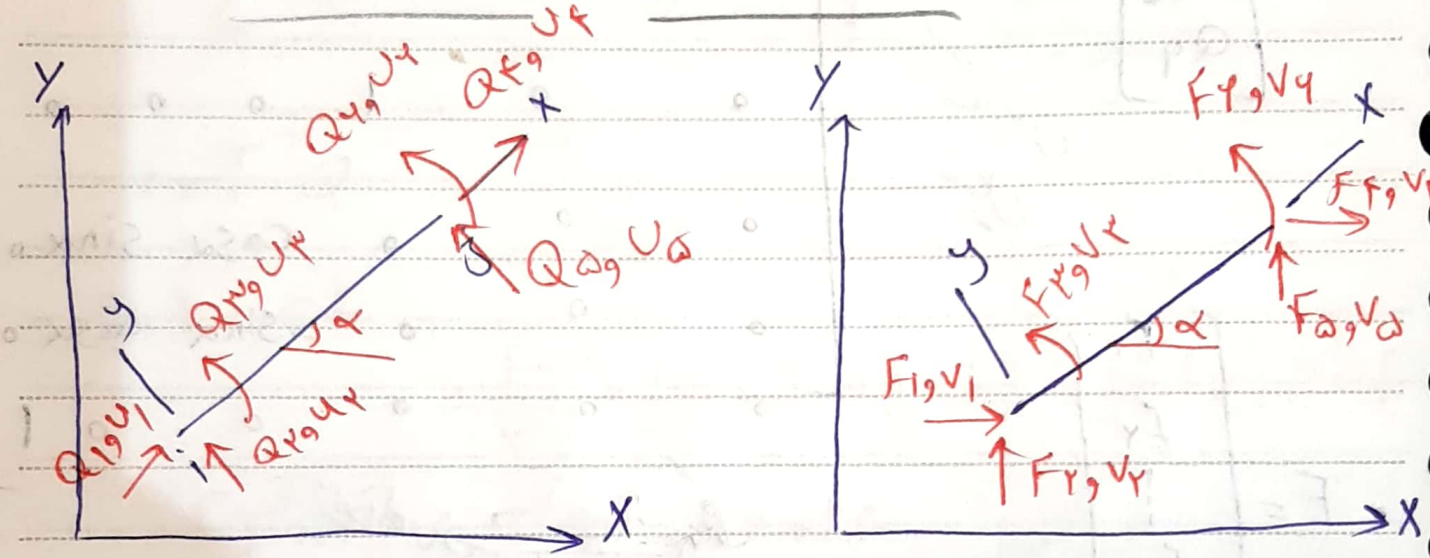
MICRO

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

## تبدیل دستگاه‌های مختصات محلی $(XY)$ و کلی $(XY)$ به یکدیگر

برای بدست آوردن ماتریس سختی کل سازه می بایست بردارهای نیرو و تغییر مکان و نیز ماتریس سختی هر عضو از دستگاه مختصات محلی به دستگاه مختصات کلی برده شوند.




$$Q_1 = F_1 \cos\alpha + F_2 \sin\alpha$$

$$Q_2 = -F_1 \sin\alpha + F_2 \cos\alpha$$

$$Q_3 = F_3$$

$$Q_4 = F_4 \cos\alpha + F_5 \sin\alpha$$

$$Q_5 = -F_4 \sin\alpha + F_5 \cos\alpha$$

$$Q_6 = F_6$$

$$F_1 = Q_1 \cos\alpha - Q_2 \sin\alpha$$

$$F_2 = Q_1 \sin\alpha + Q_2 \cos\alpha$$

$$F_3 = Q_3$$

$$F_4 = Q_4 \cos\alpha - Q_5 \sin\alpha$$

$$F_5 = Q_4 \sin\alpha + Q_5 \cos\alpha$$

$$F_6 = Q_6$$

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

محلی

لذا می‌توان نوشت → $Q = FT$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}$$

کلی ← $F = T^T Q$ ← ترانهاده

از آن جایی که مولفه بردار $U$ (در دستگاه محلی) با مولفه‌های بردار $V$ یک به یک متناظر هستند پس می‌توان نوشت:

$U = TV$ ← محلی

$V = T^T U$ ← کلی

$U$: بردار تغییر شکل‌های کرمی در دستگاه مختصات محلی

$V$: بردار تغییر شکل‌های کرمی در دستگاه مختصات کلی

با حذف سطر و ستون‌هایی از ماتریس تبدیل $T$ که درجات آزادی متناظر با آن‌ها را صفر می‌کنیم

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

خرپایی و تیرها یکسره وجود ندارند می توان ماتریس تبدیل T مرتبط با عضو تیر و عضو خرپایی را بدست آورد.

$$T=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

عضو خرپایی و عضو تیر

$$F=T^T Q$$

$$Q=kU+Qf \Rightarrow F=T^T[kU+Qf]=$$

$$=[T^T k]U+T^T Qf=[T^T k][TV]+T^T Qf$$

$$=[T^T kT]V+T^T Qf=\bar{k}V+F_f$$

که در آن:

$\bar{k}=T^T kT$ : ماتریس سختی عضو در دستگاه مختصات کلی

$F_f=T^T Qf$ : بردار نیروهای گیرداری عضو در دستگاه مختصات کلی

ماتریس سختی کل سازه:

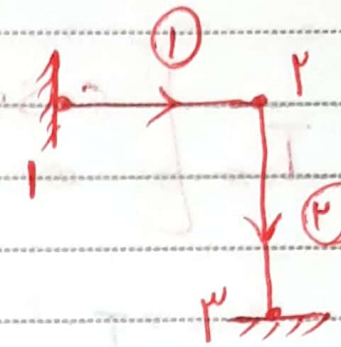
در روش تحلیل ماتریسی، محاسبه ماتریس سختی کل سازه ks ضروری می باشد، لذا اگر ماتریس سختی هر عضو m از سازه را با $\bar{k}_m$ نشان دهیم برای بدست آوردن ks می بایست درایه های مشخصی از ماتریس های سختی $\bar{k}_m$ اعضا را به شکل مناسب جمع جبری نماییم.

MICRO
Scanned with CamScanner

Subject:

Unit:

ماتریس سختی کل سازه:




$$\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & k_{16}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{24}^{(1)} & k_{25}^{(1)} & k_{26}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & k_{35}^{(1)} & k_{36}^{(1)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} & k_{44}^{(1)} & k_{45}^{(1)} & k_{46}^{(1)} \\ k_{51}^{(1)} & k_{52}^{(1)} & k_{53}^{(1)} & k_{54}^{(1)} & k_{55}^{(1)} & k_{56}^{(1)} \\ k_{61}^{(1)} & k_{62}^{(1)} & k_{63}^{(1)} & k_{64}^{(1)} & k_{65}^{(1)} & k_{66}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\bar{K}_2 = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} & k_{14}^{(2)} & k_{15}^{(2)} & k_{16}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} & k_{25}^{(2)} & k_{26}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ k_{41}^{(2)} & k_{42}^{(2)} & k_{43}^{(2)} & k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\ k_{51}^{(2)} & k_{52}^{(2)} & k_{53}^{(2)} & k_{54}^{(2)} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ k_{61}^{(2)} & k_{62}^{(2)} & k_{63}^{(2)} & k_{64}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

$$K_{SS}=\begin{bmatrix} {}^{(1)}k_{44}+{}^{(2)}k_{11} & {}^{(1)}k_{45}+{}^{(2)}k_{12} & {}^{(1)}k_{46}+{}^{(2)}k_{13} \\ {}^{(1)}k_{54}+{}^{(2)}k_{21} & {}^{(1)}k_{55}+{}^{(2)}k_{22} & {}^{(1)}k_{56}+{}^{(2)}k_{23} \\ {}^{(1)}k_{64}+{}^{(2)}k_{31} & {}^{(1)}k_{65}+{}^{(2)}k_{32} & {}^{(1)}k_{66}+{}^{(2)}k_{33} \end{bmatrix}$$

(ستون‌ها: ۱، ۲، ۳ — سطرها: ۱، ۲، ۳)

بردار نیروهای گیرداری $P_f$ کل سازه را نیز می‌توان با همین روش برای بردار نیروهای گیرداری $F_f$ اعضای سازه بدست آورد:

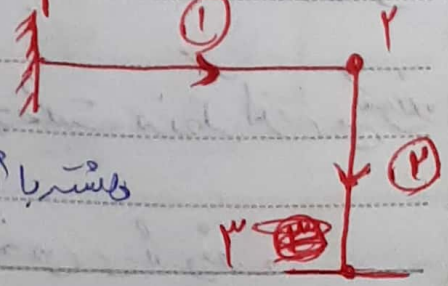
$$Ff_{(1)}=\begin{bmatrix} {}^{(1)}Ff_1 \\ {}^{(1)}Ff_2 \\ {}^{(1)}Ff_3 \\ {}^{(1)}Ff_4 \\ {}^{(1)}Ff_5 \\ {}^{(1)}Ff_6 \end{bmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

عضو ۱

$$Ff_{(2)}=\begin{bmatrix} {}^{(2)}Ff_1 \\ {}^{(2)}Ff_2 \\ {}^{(2)}Ff_3 \\ {}^{(2)}Ff_4 \\ {}^{(2)}Ff_5 \\ {}^{(2)}Ff_6 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{matrix}$$

$$P_f=\begin{bmatrix} {}^{(1)}Ff_4+{}^{(2)}Ff_1 \\ {}^{(1)}Ff_5+{}^{(2)}Ff_2 \\ {}^{(1)}Ff_6+{}^{(2)}Ff_3 \end{bmatrix}\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

بردار نیروهای گره‌ای را زمانی محاسبه می‌کنیم که در طول المان بارگذاری




وشته با کسیم

OMICRO
Scanned with CamScanner

Subject: Unit:

مراحل کلی تحلیل سازه با روش ماتریسی :

الف) مشخص کردن گره ها در سازه و شماره گذاری گره ها و اعضای سازه ای.

ب) تعیین دستگاه مختصات کلی XY که X در راستای افق و سمت راست و Y در راستای قائم و هم سمت بالا باشد و صدا آن در پایین ترین گره سمت چپ سازه قرار می گیرد.

ج) برای هریک از اعضای سازه، یک گره ابتدایی و یک گره انتهایی در نظر بگیرید و با توجه به آن ها بستگاه محلی xy اعضا را تعریف نمایید که محور x در امتداد عضو و در جهت گره ابتدایی می باشد و محور y نیز عمود بر امتداد عضو خواهد بود.

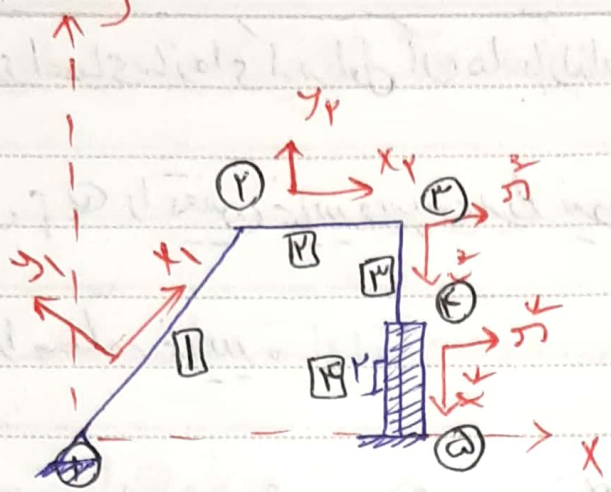
د) مشخص کردن درجات آزادی سازه در گره ها و شماره گذاری آن ها. شماره گذاری درجات آزادی در گره به این صورت انجام می شود که ابتدا درجه آزادی انتقالی در امتداد x، پس درجه آزادی انتقالی در امتداد y و نهایتا درجه آزادی دورانی گره را (در صورت وجود) شماره گذاری می شوند، درجات آزادی انتقالی در جهت مثبت محورهای x و y و درجات آزادی دورانی نیز در صورت پادساعتگرد مثبت در نظر گرفته می شوند.

بدین ترتیب تغییر شکل های مجهول گره ای مشخص می شوند.

MICRO

Scanned with CamScanner

VI




گره ۱ ← $d_1$

گره ۲ ← $d_2, d_3, d_4$

گره ۳ ← $d_5, d_6, d_7$

گره ۴ ← $d_8, d_9, d_{10}$

گره ۵ ← فاقد درجه آزادی

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_9 \\ d_{10} \end{bmatrix}$$

ه) ماتریس سختی اعضای سازه را تشکیل دهید. (در دستگاه مختصات محلی)

و سپس آن‌ها را در دستگاه مختصات کلی تبدیل نمایید.

$$\bar{k} = T^T k T$$

$$k = \frac{EI}{L^3} = \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی یک المان قاب

* ماتریس سختی مقطع زن ا

Subject: Date:

و) برای اعضای سازه‌ای که بر طول آن ها بارگذاری وجود دارد بردار نیروهای گره‌داری در دستگاه محلی $Q_f$ را تعیین نمایید و سپس بردار نیروهای گره‌داری $F_f$ در دستگاه مختصات کلی را محاسبه نمایید.

$$F_f = T^T Q_f$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ز) براساس درجات آزادی سازه و مطابق با روش توضیح داده شده در بخش محاسبه ماتریس سختی کل سازه، $k_s$ را محاسبه نمایید.

ح) بردار نیروهای گره‌داری $P_f$ کل سازه براساس روش بیان شده تشکیل دهید و بردار نیروهای گرهی $P$ را ایجاد نمایید.

ط) بردار تغییر شکل های گرهی مجهول $d$ را با حل دستگاه زیر بدست آورید:

$$P - P_f = k_s d$$

حال با توجه به بردار $d$ می توان بردار $\Delta$ تغییر مکان های انتهای اعضای قاب

MICRO

Scanned with CamScanner

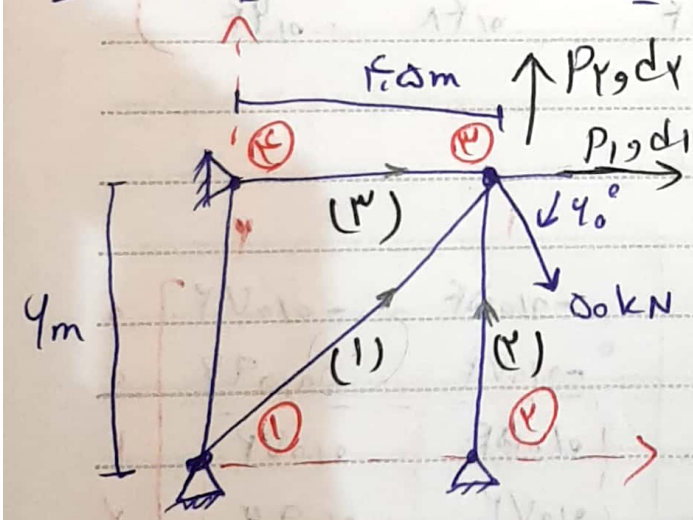
Subject: Date:

در دستگاه مختصات کلی) رابدست آورد و با رابطه $U=TV$ نیز تغییرمکان های انتهای های اعضای قاب در دستگاه محلی ها حاصل می شود.

ج) با رابطه $Q=kU+Qf$ می توان نیروهای انتهای اعضا را در دستگاه مختصات محلی عضو بدست آورد که آن برای اعضا خرپایی به صورت $Q=kU$ است.

با رابطه $F=TQ$ نیز می توان نیروهای انتهای اعضای سازه را در دستگاه مختصات کلی بدست آورد.

مثال: نیروهای داخلی و واکنش های تکیه گاهی خرپایی روبرو را با روش ماتریسی بدست آورید.




اعضای خرپا $\Rightarrow$ $E=200\,GPa$, $A=5425\,mm^2$

$$L_1=\sqrt{(4.5)^2+(4)^2}=6.02\,m$$

$$\cos\alpha_1=\frac{4.5}{6.02}=0.74 \qquad \sin\alpha_1=\frac{4}{6.02}=0.66$$

$$EA=200\times 5425=1085000\,kN$$

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject:

Date: عفوا خرنا:

$$\bar{k}_1 = \frac{EA}{L_1} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha_1 & \cos\alpha_1\sin\alpha_1 & -\cos^2\alpha_1 & -\cos\alpha_1\sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_1\sin\alpha_1 & \sin^2\alpha_1 & -\cos\alpha_1\sin\alpha_1 & -\sin^2\alpha_1 \\ -\cos^2\alpha_1 & -\cos\alpha_1\sin\alpha_1 & \cos^2\alpha_1 & \cos\alpha_1\sin\alpha_1 \\ -\cos\alpha_1\sin\alpha_1 & -\sin^2\alpha_1 & \cos\alpha_1\sin\alpha_1 & \sin^2\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$\bar{k}_1 \times T'$

$$\bar{k}_1 = \frac{1,12\text{ax}10^4}{1,0} \begin{bmatrix} 0,34 & 0,48 & -0,34 & -0,48 \\ 0,48 & 0,64 & -0,48 & -0,64 \\ -0,34 & -0,48 & 0,34 & 0,48 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 \end{bmatrix}$$

$$\bar{k}_1 = 10^4 \left[\begin{array}{cc|cc} 0,0548 & 0,0772 & -0,0548 & -0,0772 \\ 0,0772 & 0,0994 & -0,0772 & -0,0994 \\ \hline -0,0548 & -0,0772 & 0,0548 & 0,0772 \\ -0,0772 & -0,0994 & 0,0772 & 0,0994 \end{array}\right] \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 1 \qquad\quad 2$

$L_2 = 4m \qquad \cos\alpha_2 = \cos 90 = 0$

$\sin\alpha_2 = \sin 90 = 1$

MICRO®

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

$$k_{\mu} = \frac{1,1\text{٢٥} \times 10^{4}}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_{\mu} = 10^{4} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1\text{٨٧٥} & 0 & -0\text{٨٧٥} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1\text{٨٧٥} & 0 & 0,1\text{٨٧٥} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \end{array}$$

$L_{\mu} = 4,5\,m$ $\quad \cos\alpha_{\mu} = \cos 0 = 1$

$\sin\alpha_{\mu} = \sin 0 = 0$ $\quad k_{\mu} = \frac{1,1\text{٢٥} \times 10^{4}}{4,5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$k_{\mu} = 10^{4} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc} 0,\text{٢٥} & 0 & -0,\text{٢٥} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0,\text{٢٥} & 0 & 0,\text{٢٥} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \end{array}$$

MICRO

Scanned with CamScanner

۷۴

Subject: Unit:

$$k_S = 10^4 \begin{bmatrix} (0.054 + 0.125) & (0.072 + 0 + 0) \\ (0.072 + 0 + 0) & (0.192 + 0.1875 + 0) \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix}$$

$$k_S = 10^4 \begin{bmatrix} 1.304 & 0.072 \\ 0.072 & 0.3825 \end{bmatrix}$$

بردار بارهای گرهی $P$:

$$P_1 = 50 \cos 60^\circ = 25\ kN$$

$$P_2 = -50 \sin 60^\circ = -43.3\ kN \qquad P = \begin{bmatrix} 25 \\ -43.3 \end{bmatrix}$$

$$P = k_S d \rightarrow \begin{bmatrix} 25 \\ -43.3 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 1.304 & 0.072 \\ 0.072 & 0.3825 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$d = \begin{bmatrix} 0.00124 \\ -0.00185 \end{bmatrix} m$$

محاسبه نیروهای انتهای عضو (۱):

$$V_1 = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00124 \\ -0.00185 \end{bmatrix}$$

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000124 \\ -0.000125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0000774 \end{bmatrix} m$$

$$Q_1 = k_1 U_1 \Rightarrow Q_1 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{1.125 \times 10^4}{1.5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0000774 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 15.84 \\ -15.84 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = T_1^T Q_1 \rightarrow F_1 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.84 \\ -15.84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.34 \\ 3.168 \\ -6.34 \\ -3.168 \end{bmatrix} kN$$

محاسبه نیروهای انتهای عضو (۲):

$$V_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}_{2}^{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000124 \\ -0.000125 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.000124 \\ -0.000125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.000125 \end{bmatrix} m$$

$$Q_2 = k_2 U_2$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{1.125 \times 10^4}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.000125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.15 \\ -35.15 \end{bmatrix} kN$$

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

$$F_2 = T_2^T Q_2$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳۴,۴۸ \\ -۳۴,۴۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ۳۴,۴۸ \\ 0 \\ -۳۴,۴۸ \end{bmatrix} kN$$

محاسبه نیروهای انتهای عضو ۳:

$$V_3 = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ۰/۰۰۰۱۲۶ \\ -۰/۰۰۰۱۸۵ \end{bmatrix} m$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ۰/۰۰۰۱۲۶ \\ -۰/۰۰۰۱۸۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ۰/۰۰۰۱۲۶ \end{bmatrix} m$$

$$Q_3 = K_3 U_3 \qquad Q_3 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{۱,۱۴۰ \times ۱۰^۴}{۴,۵} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ ۰/۰۰۰۱۲۶ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۳۱,۵ \\ ۳۱,۵ \end{bmatrix} kN$$

$$F_3 = T_3^T Q_3 \qquad F_3 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۳۱,۵ \\ ۳۱,۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳۱,۵ \\ 0 \\ ۳۱,۵ \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

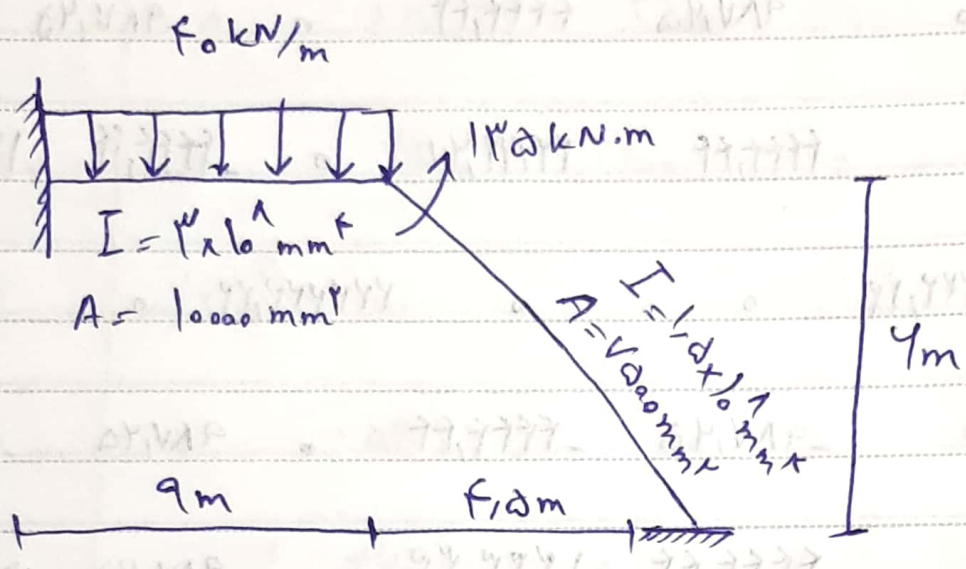
MICRO®

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

مثال: واکنش های تکیه گاهی و نیروهای انتهای اعضای قاب نشان داده شده را با روش ماتریسی بدست آورید.

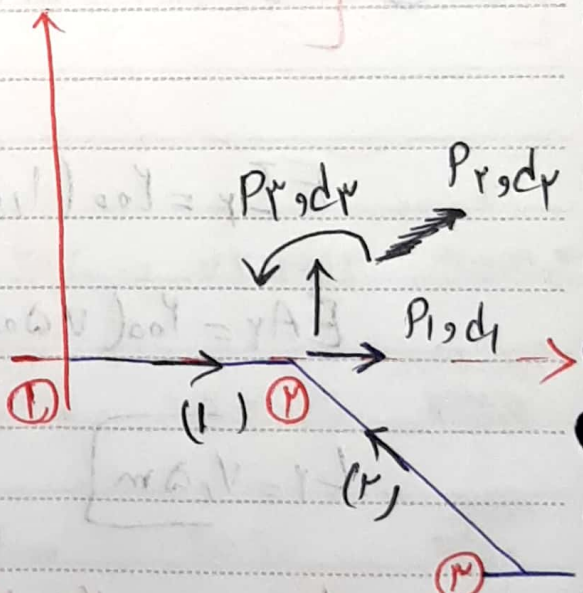
$E = 200\ GPa$

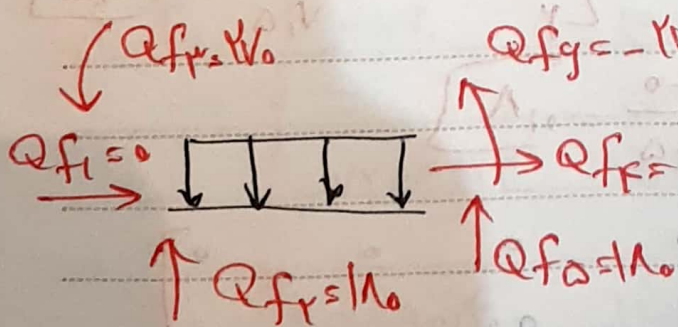



نیروهای گیردار انتهای عضو (۱)

$$Qf_2 = Qf_3 = \frac{40 \times 9}{2} = 180\ kN$$

$$Qf_4 = -Qf_5 = \frac{4 \times (9)^2}{12} = 270\ kN.m$$




$$EI_1 = 200 \times 3 \times 10^8 = 6 \times 10^{10}\ kN.mm^2 = 6 \times 10^4\ kN.m^2$$

$$EA_1 = 200 \times (10000) = 2 \times 10^6\ kN$$

Scanned with CamScanner

Subject:

Unit:

| | ٥ | ٥ | ٥ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ٥ | ٢٢٢٢٢٢,٢٢ | ٠ | ٠ | -٢٢٢٢٢٢,٢٢ | ٠ | ٠ |
| ٤ | ٠ | ٩٨٧,٤٥ | ٢٢٢٢,٢٢ | ٠ | -٩٨٧,٤٥ | ٢٢٢٢,٢٢ |
| ٩ | ٠ | ٢٢٢٢,٢٢ | ٢٢٤٤٩,٤٧ | ٠ | -٢٢٢٢,٢٢ | ١٣٣٣,٣٣ |
| ١ | -٢٢٢٢٢٢,٢٢ | ٠ | ٠ | ٢٢٢٢٢٢,٢٢ | ٠ | ٠ |
| ٢ | ٠ | -٩٨٧,٤٥ | -٢٢٢٢,٢٢ | ٠ | ٩٨٧,٤٥ | -٢٢٢٢,٢٢ |
| ٣ | ٠ | ٢٢٢٢,٢٢ | ١٣٣٣,٣٣ | ٠ | -٩٨٧,٤٥ | ٢٢٤٤٩,٤٧ |

$\bar{K}_{1:6} = K_{1:6}$

نفرض ٢: $EI_2 = 200\,(1.5 \times 10^{-3}) = 30000\ kN.m^2$

$EA_2 = 200\,(75000) = 1.5 \times 10^{4}\ kN$

$L_2 = 7.5\,m$

$\cos\alpha_2 = \frac{X_2 - X_3}{L_2} = \frac{9 - 13.5}{7.5} = -0.6$

$\sin\alpha_2 = \frac{Y_2 - Y_3}{L_2} = \frac{4 - 0}{7.5} = 0.8$

$T_{2:6}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -0.6 | 0.8 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.8 | -0.6 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | -0.6 | 0.8 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | -0.8 | -0.6 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

$$k_{y\varepsilon} = \begin{bmatrix} 2\times10^{5} & 0 & 0 & -2\times10^{5} & 0 & 0 \\ 0 & 853.33 & 3200 & 0 & -853.33 & 3200 \\ 0 & 3200 & 16000 & 0 & -3200 & 8000 \\ -2\times10^{5} & 0 & 0 & 2\times10^{5} & 0 & 0 \\ 0 & -853.33 & -3200 & 0 & 853.33 & -3200 \\ 0 & 3200 & 8000 & 0 & -3200 & 16000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{k}_{y\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 271647.13 & -99599.6 & -250 & -271647.13 & 99599.6 \\ -99599.6 & 12830.27 & -192 & 99599.6 & -12830.27 \\ -250 & -192 & 16000 & 250 & 192 \\ -271647.13 & 99599.6 & 250 & 271647.13 & -99599.6 \\ 99599.6 & -12830.27 & 192 & -99599.6 & 12830.27 \\ -250 & -192 & 8000 & 250 & 192 \end{bmatrix}$$

$$T_2 k_{y\varepsilon} T_2 =$$



ستل شش حاتر بس صفحه ی بعد

Scanned with CamScanner

۸۲

| | |
|---|---|
| $-۲۵۴۰$ | ۱ |
| $-۱۹۲۰$ | ۲ |
| $۸۵۵۵$ | ۳ |
| $۲۵۴۰$ | |
| $۱۹۲۰$ | |
| $۱۴۰۵۵$ | |

$$P=\begin{bmatrix}0\\0\\۱۳۵\end{bmatrix}$$

$$ks=\begin{array}{c|cc} & ۱ & ۲ \\ ۱ & (۲۲۲۲۲۲۲,۲۲۲۷۲۵۴۴,۱۳) & -۹۵۵۹۰,۴۵ \\ ۲ & -۹۵۵۹۰,۴۵ & (۹۸۷,۱۵+۱۳۳۵۰۷,۲) \\ ۳ & ۲۵۴۵۰ & (۱۹۲۰-۴۴۴۴,۴۴) \end{array}$$

| | | |
|---|---|---|
| ۲۵۴۰ | | ۱ |
| $(۱۹۲۰-۴۴۴۴,۴۴)$ | | ۲ |
| $(۱۴۰۵۵+۲۴۴۴۴,۲۷)$ | | ۳ |

$$ks=\begin{array}{c|ccc} & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲۹۴۷۴۸,۳۵ & -۹۵۵۹۰,۴ & ۲۵۴۵۰ \\ ۲ & -۹۵۵۹۰,۴ & ۱۲۹۴۴,۸۵ & -۲۵۲۴,۴۴ \\ ۳ & ۲۵۴۵۰ & -۲۵۲۴,۴۴ & ۴۲۴۴۴,۲۷ \end{array}$$

$$Pf=\begin{bmatrix}0\\۱۸۵\\-۲۷۵\end{bmatrix}$$

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject: Date:

$$P - P_f = ks\,d \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \\ -270 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29647.35 & -9999.6 & 2540 \\ -9999.6 & 12979.85 & -2527.5 \\ 2540 & -2527.55 & 4234.75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \Rightarrow d = \begin{bmatrix} -0.000942503\ m \\ -0.001447\ m \\ 0.009430\ rad \end{bmatrix}$$

$$U_1 = V_1 = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.000942503 \\ -0.001447 \\ 0.009430 \end{bmatrix}$$

محاسبه نیروهای انتهای عضو (۱)

$$F_1 = \bar{k}_1 V_1 + F_{f1} \rightarrow f_1 = \begin{bmatrix} 128.35\ kN \\ 222.94\ kN \\ 302.14\ kN.m \\ -128.35\ kN \\ 134.55\ kN \\ -111\ kN.m \end{bmatrix}$$

MICRO

Scanned with CamScanner

Subject:

Date:

$$Q_1 = T_1 F_1 \rightarrow Q_{1,6} = \begin{bmatrix} 1۳۸,۴۵ & kN \\ ۲۲۳,۵۷ & kN \\ ۶۰۳,۱۴ & kN.m \\ -1۳۸,۴۵ & kN \\ 1۲۷,۴۴ & kN \\ -11,1 & kN.m \end{bmatrix}$$

محاسبه تغییرمکان‌های انتهای عضو (۲):

$$V_{2,6} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00۲۲۳۰۳ \ m \\ -0.00۱۴۴۸۶ \ m \\ 0.00۹۶۳۰۸ \ rad \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -1۳۸,۴۵ & kN \\ 1۲۷,۴۳ & kN \\ ۷۰,۷۵ & kN.m \\ 1۳۸,۴۵ & kN \\ -1۲۷,۴۳ & kN \\ 1۶۷,۰۹ & kN.m \end{bmatrix}$$

$$k_2 V_{2,6} + F_{f2} \rightarrow F_{2,6}$$

MICRO

Scanned with CamScanner

۸۵

Subject: Date:

$$Q_4 = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -138.45 \\ 134.43 \\ 70.45 \\ 138.45 \\ -134.43 \\ 147.09 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 192.21 \\ 28.90 \\ 70.45 \\ -192.21 \\ -28.90 \\ 147.09 \end{bmatrix}$$

واکنش های تکیه گاهی:

$$R_{①} = \begin{bmatrix} 138.45\ kN \\ 223.54\ kN \\ 403.14\ kN.m \end{bmatrix}$$

$$R_{③} = \begin{bmatrix} -138.45\ kN \\ -134.43\ kN \\ 70.45\ kN.m \end{bmatrix}$$

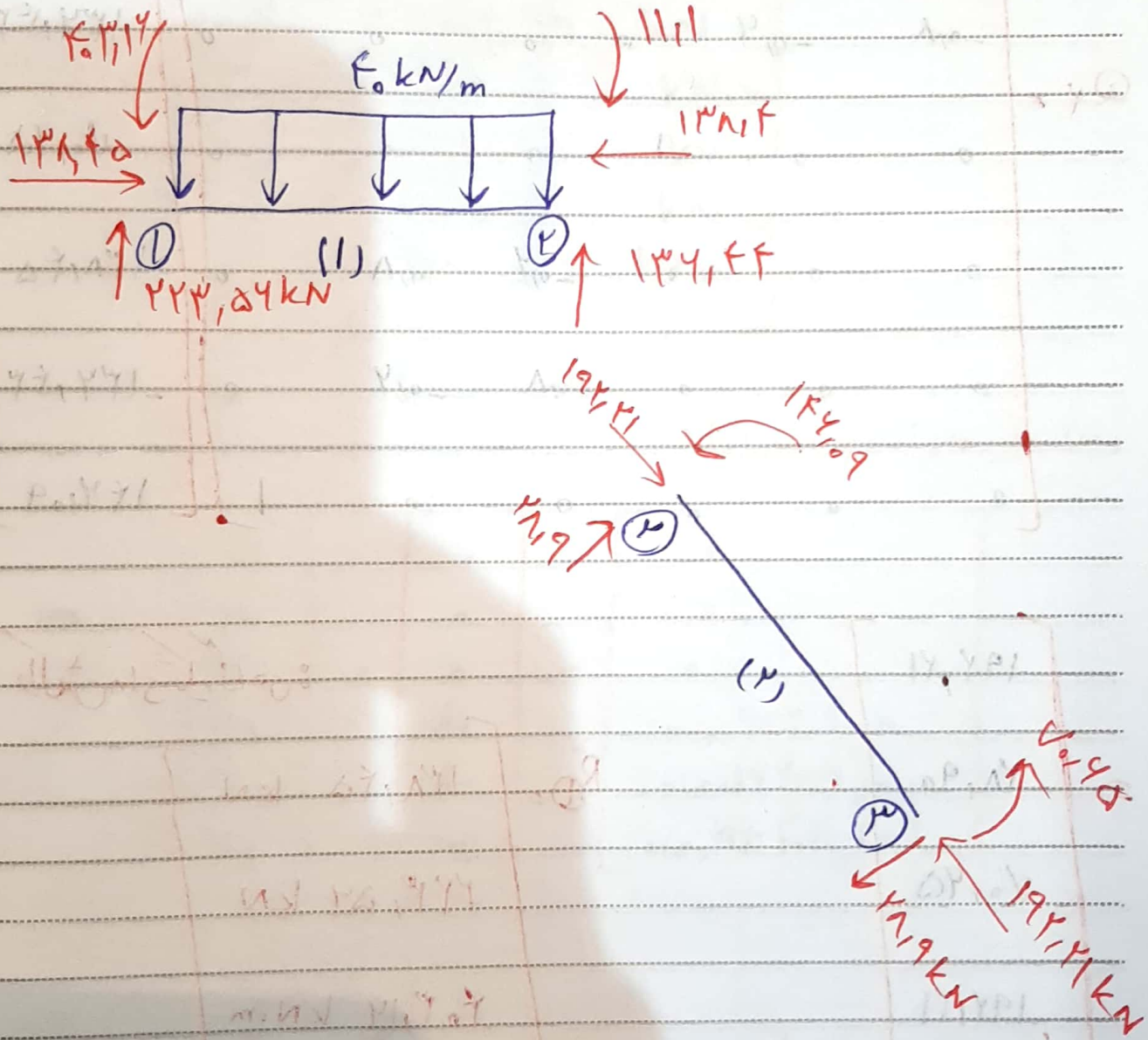
Scanned with CamScanner

۸۶

Subject:

Date:

## نیروهای اعضای قاب




MICRO®

Scanned with CamScanner