

绝密 ★ 启用前

2024 年普通高等学校招生全国统一考试（新课标 I 卷）

数学参考答案与解析(鱼塘团队)

本参考答案与解析共 7 页，19 小题，满分 150 分。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 排版制作：鱼塘团队，欢迎加入官方 QQ 群：778435509；答案与解析交流群：770236522。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$

A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$

【答案】A.

【解析】 $-5 < x^3 < 5 \Rightarrow -5^{\frac{1}{3}} < x < 5^{\frac{1}{3}}$, 而 $1 < 5^{\frac{1}{3}} < 2$, 因此 $A \cap B = \{-1, 0\}$.
故答案为 A.

2. 若 $\frac{z}{z-1} = 1+i$, 则 $z =$

A. $-1-i$ B. $-1+i$ C. $1-i$ D. $1+i$

【答案】C.

【解析】两边同时减 1 得： $\frac{1}{z-1} = i$, 进而 $z = 1 + \frac{1}{i} = 1 - i$.
故答案为 C.

3. 已知向量 $a = (0, 1)$, $b = (2, x)$. 若 $b \perp (b - 4a)$, 则 $x =$

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【答案】D.

【解析】即 $b \cdot (b - 4a) = 0$. 代入得 $4 + x(x - 4) = 0$, 即 $x = 2$.
故答案为 D.

4. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = m$, $\tan \alpha \tan \beta = 2$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$

- A. $-3m$ B. $-\frac{m}{3}$ C. $\frac{m}{3}$ D. $3m$

【答案】A.

【解析】通分 $\sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta$. 积化和差 $\frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = 2 \cdot \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$. 即 $\cos(\alpha - \beta) = -3 \cos(\alpha + \beta) = -3m$.

故选 A.

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且他们的高均为 $\sqrt{3}$ ，则圆锥的体积为

- A. $2\sqrt{3}\pi$ B. $3\sqrt{3}\pi$ C. $6\sqrt{3}\pi$ D. $9\sqrt{3}\pi$

【答案】B.

【解析】设二者底面半径为 r ，由侧面积相等有 $\pi r \sqrt{r^2 + 3} = 2\pi r \cdot \sqrt{3}$ ，解得 $r = 3$. 故 $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \times 9 = 3\sqrt{3}\pi$.

故答案为 B.

6. 已知函数为 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0 \\ e^x + \ln(x + 1), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 \mathbf{R} 上单调递增，则 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0]$ B. $[-1, 0]$ C. $[-1, 1]$ D. $[0, +\infty)$

【答案】B.

【解析】 $x \geq 0$ 时， $f'(x) = e^x + \frac{1}{1+x} > 0$ ，故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 而 $y = -x^2 - 2ax - a$ 的对称轴为直线 $x = -a$ ，故由 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增可知 $-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 0$. 在 $x = 0$ 时应有 $-x^2 - 2ax - a \leq e^x + \ln(x + 1)$ ，解得 $a \geq -1$ ，故 $-1 \leq a \leq 0$.

故答案为 B.

7. 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时，曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 8

【答案】C.

【解析】五点作图法画图易得应有 6 个交点.

故答案为 C.

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ， $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$ ，且当 $x < 3$ 时 $f(x) = x$ ，则下列结论中一定正确的是

- A. $f(10) > 100$ B. $f(20) > 1000$ C. $f(10) < 1000$ D. $f(20) < 10000$

【答案】B.

【解析】 $f(1) = 1, f(2) = 2 \Rightarrow f(3) > 3 \Rightarrow f(4) > 5 \Rightarrow f(5) > 8 \Rightarrow f(6) > 13 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(11) > 143 \Rightarrow f(12) > 232 \Rightarrow f(13) > 300 \Rightarrow f(14) > 500 \Rightarrow f(15) > 800 \Rightarrow f(16) > 1000 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(20) > 1000$

故答案为 B.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值为 $\bar{x} = 2.1$ ，样本方差 $s^2 = 0.01$ 。已知该种植区以往的亩收入 x 服从正态分布 $M(1.8, 0.1^2)$ ，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N(\bar{x}, s^2)$ ，则（若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(Z < \mu + \sigma) \approx 0.8413$ ）

- A. $P(X > 2) > 0.2$ B. $P(X > 2) < 0.5$ C. $P(Y > 2) > 0.5$ D. $P(Y > 2) < 0.8$

【答案】BC.

【解析】由所给材料知两正态分布均有 $\sigma = 0.1$ 及正态分布的对称性得：

$P(X > 2) < P(X > 1.9) = 1 - P(X < 1.9) = 1 - 0.8413 < 0.2$, A 错误； $P(X > 2) < P(X > 1.8) = 0.5$, B 正确；

$P(Y > 2) > P(Y > 2.1) = 0.5$, C 正确；

$P(Y > 2) = P(Y < 2.2) = 0.8413 > 0.8$, D 错误.

故答案为 BC.

10. 设函数 $f(x) = (x - 1)^2(x - 4)$ ，则

- A. $x = 3$ 是 $f(x)$ 的极小值点 B. 当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) < f(x^2)$
C. 当 $1 < x < 2$ 时， $-4 < f(2x - 1) < 0$ D. 当 $-1 < x < 0$ 时， $f(2 - x) > f(x)$

【答案】ACD.

【解析】计算知 $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$. 故 $x \in (1, 3)$ 时 $f(x)$ 单调减，其余部分单调增. 由此知 $x = 3$ 为 $f(x)$ 极小值点，A 正确；

由上知 $x \in (0, 1)$ 时 $f(x)$ 单调增，又此时 $x > x^2$ ，故 $f(x) > f(x^2)$ ，B 错误；

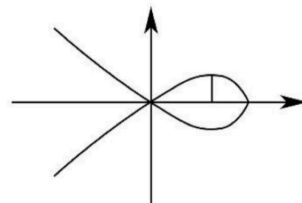
此时 $2x - 1 \in (1, 3)$ ，故 $f(2x - 1) \in (f(3), f(1)) = (-4, 0)$ ，C 正确；

由 $f(2 - x) = (x - 1)^2(-x - 2)$ ，故 $f(2 - x) - f(x) = 2(1 - x)^3 > 0$ ，D 正确.

故答案为 ACD.

11. 造型 α 可以看作图中的曲线 C 的一部分. 已知 C 过坐标原点 O ，且 C 上的点满足横坐标大于 -2 ；到点 $F(2, 0)$ 的距离与到定直线 $x = a (a < 0)$ 的距离之积为 4，则

- A. $a = -2$
B. 点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在 C 上
C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1
D. 当点 (x_0, y_0) 在 C 上时， $y_0 \leq \frac{4}{x_0 + 2}$



【答案】ABD.

【解析】由原点 O 在曲线 C 上且 $|OF| = 2$ 知 O 到直线 $x = a$ 距离为 2，由 $a < 0$ 知 $a = -2$ ，A 正确；

由 $x > -2$ 知 C 上点满足 $(x + 2)\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = 4$ ，代 $(2\sqrt{2}, 0)$ 知 B 正确；

解出 $y^2 = \frac{16}{(x + 2)^2} - (x - 2)^2$ ，将左边设为 $f(x)$ ，则 $f'(2) = -0.5 < 0$ 。又有 $f(2) = 1$ ，故存

$x_0 \in (0, 1)$ 使 $f(x_0) > 1$. 此时 $y > 1$ 且在第一象限, C 错误;

又 $y^2 = \frac{16}{(x+2)^2} - (x-2)^2 < \frac{16}{(x+2)^2}$, 故 $y_0 < \frac{4}{(x_0+2)}$, D 正确.

故答案为 ABD.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 做平行于 y 轴的直线交 C 于 A, B 两点, 若 $|F_1A| = 13, |AB| = 10$, 则 C 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{2}$.

【解析】 根据对称性 $|F_2A| = \frac{|AB|}{2} = 5$, 则 $2a = |F_1A| - |F_2A| = 8$, 得到 $a = 4$. 另外根据勾股定理 $2c = |F_1F_2| = 12$, 得到 $c = 6$, 所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

13. 若曲线 $y = e^x + x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线也是曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 的切线, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\ln 2$.

【解析】 设曲线分别为 y_1, y_2 , 那么 $y_1' = e^x + 1$, 得到切线方程 $y - 1 = 2x$, 根据 $y_2' = \frac{1}{x+1}$ 得到切点横坐标为 $-\frac{1}{2}$, 代入 y_2 得到 $a = \ln 2$.

14. 甲、乙两人各有四张卡片, 每张卡片上标有一个数字, 甲的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7, 乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8. 两人进行四轮比赛, 在每轮比赛中, 两人各自从自己持有的卡片中随机选一张, 并比较所选卡片上数字的大小, 数字大的人得 1 分, 数字小的人得 0 分, 然后各自弃置此轮所选的卡片 (弃置的卡片在此后的轮次中不能使用). 则四轮比赛后, 甲的总得分不小于 2 的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 由对称性, 不妨固定乙出卡片顺序依次为 $(2, 4, 6, 8)$, 为了简便, 设甲依次出 $(a, b, c, d), \{a, b, c, d\} \in \{1, 3, 5, 7\}$. 首先注意到 8 是最大的, 故甲不可能得四分. 若甲得三分, 则从 c 到 a 均要求得分, 比较得必有 $c = 7, b = 5, a = 3, d = 1$ 共一种情况; 若甲得两分, 则讨论在何处得分: 若在 b, c 处, 则同样 $c = 7, b = 5$, 进而 $a = 1, d = 3$, 共一种; 若在 a, c 处, 则必有 $c = 7, a \neq 1, b \neq 5$, 在 $b = 1$ 时有全部两种, 在 $d = 1$ 时仅一种, 共三种; 若在 a, b 处, 则 $b \in \{5, 7\}, a \neq 1, c \neq 7$. 当 $a = 5$ 时, 由上述限制, $c = 1$ 时有两种, $d = 1$ 时仅一种; 当 $a = 7$ 时, a, c, d 全排列六种中仅 $a = 1$ 的两种不行, 故有四种, 此情形共八种. 故共有 $1+3+8=12$ 种, 又总数为 $4! = 24$, 故所求为 $1 - \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C = \sqrt{2} \cos B, a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$, 求 c .

【解析】

(1) 根据余弦定理 $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C = \sqrt{2}ab$, 那么 $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又因为 $C \in (0, \pi)$, 得到 $C = \frac{\pi}{4}$, 此时 $\cos B = \frac{1}{2}$, 得到 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 根据正弦定理 $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{\sqrt{6}}{2}c$, 并且 $\sin A = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, 那么 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = 3 + \sqrt{3}$, 解得 $c = 2\sqrt{2}$.

16. (15 分)

已知 $A(0, 3)$ 和 $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上两点.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B , 且 $\triangle ABP$ 的面积为 9, 求 l 的方程.

【解析】

(1) 直接代入后解方程, 得到 $a^2 = 12, b^2 = 9, c^2 = 3$, 所以 $e^2 = \frac{1}{4}$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$.

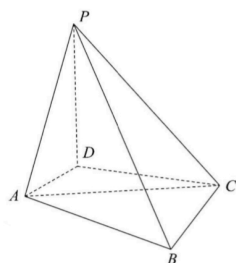
(2) 设 $B(x_0, y_0)$, 则 $\overrightarrow{AB} = \left(x_0 - 3, y_0 - \frac{3}{2}\right), \overrightarrow{AP} = \left(3, -\frac{3}{2}\right)$. 得到 $9 = S = \frac{1}{2} \left| -\frac{3}{2}(x_0 - 3) - 3\left(y_0 - \frac{3}{2}\right) \right|$, 或者 $x_0 + 2y_0 = -6$, 与椭圆方程联立, 得到 $B_1(-3, -15), B_2(0, -3)$, 对应的直线方程 $y = \frac{1}{2}x$ 或者 $y = \frac{3}{2}x - 3$.

17. (15 分)

如图, 四棱锥 $P-ANCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AC = 2, BC = 1, AB = \sqrt{3}$.

(1) 若 $AD \perp AB$, 证明: $AD \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 若 $AD \perp DC$, 且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$, 求 AD .

**【解析】**

(1) 由 $PA \perp$ 面 $ABCD$ 知 $PA \perp AD$, 又 $AD \perp PB$, 故 $AD \perp$ 面 PAB . 故 $AD \perp AB$, 又由勾股定理知 $AB \perp BC$, 故 $AD \parallel BC$, 进而 $AD \parallel$ 面 PBC .

(2) 由 $PA \perp$ 面 $ABCD$. $PA \perp AC$, $PC = 2\sqrt{2}$, 设 $AD = t$, 则 $PD = \sqrt{4+t^2}$, $CD = \sqrt{4-t^2}$, 由勾股定理知 $PD \perp CD$. 则 $S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2}\sqrt{16-t^4}$, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}t\sqrt{4-t^2}$,

设 A 到 PCD 距离为 h . 由等体积, $S_{\triangle PCD} \cdot h = S_{\triangle ACD} \cdot PA$. 代入解出 $h = \frac{2t}{\sqrt{4+t^2}}$. 考虑 A 向 CP 作垂线 AM , 二面角设为 θ 则 $h = AM \sin \theta = \frac{2\sqrt{21}}{7}$. 由此解出 $t = \sqrt{3}$.

18. (17 分)

已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$.

- (1) 若 $b = 0$, 且 $f'(x) \geq 0$, 求 a 的最小值;
- (2) 证明: 曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形;
- (3) 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$, 求 b 的取值范围.

【解析】

函数定义域 $(0, 2)$.

(1) 当 $b = 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} + a = \frac{2}{x(2-x)} + a \geq 0$ 恒成立. 令 $x = 1$ 得 $a \geq -2$.

当 $a = -2$ 时, $f'(x) = \frac{2(x-1)^2}{x(2-x)} \geq 0$, 从而 a 的最小值为 -2 .

(2) $f(x) + f(2-x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3 + \ln \frac{2-x}{x} + a(2-x) + b(1-x)^3 = 2a = 2f(1)$, 且定义域也关于 1 对称, 因此 $y = f(x)$ 是关于 $(1, a)$ 的中心对称图形.

(3) 先证明 $a = -2$. 由题意, $a = f(1) \leq -2$. 假设 $a < -2$, 由 $f\left(\frac{2e^{|b|+1}}{1+e^{|b|+1}}\right) > |b| + 1 - |b| = 1$, 应用零点存在定理知存在 $x_1 \in \left(1, \frac{2e^{|b|+1}}{1+e^{|b|+1}}\right)$, $f(x_1) = 0$, 矛盾. 故 $a = -2$. 此时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(2-x)}[3bx(2-x) + 2]$. 当 $b \geq -\frac{2}{3}$, $f'(x) \geq \frac{(x-1)^2}{x(2-x)}(2-4x+2x^2) \geq 0$, 且不恒为 0 , 故 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 递增. $f(x) > -2 = f(1)$ 当且仅当 $1 < x < 2$, 此时结论成立. 当 $b < -\frac{2}{3}$, 令 $x_0 = \frac{3b - \sqrt{9b^2 - 6b}}{3b} \in (0, 1)$, $f'(x_0) = 0$, 且 $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, 1)$, 因此 $f(x)$ 在 $(x_0, 1)$ 递减, 从而 $f(x_0) > f(1) = -2$, 而 $x_0 \notin (1, 2)$ 此时结论不成立. 综上, b 的取值范围是 $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

19. (17 分)

设 m 为正整数, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是公差为 0 的等差数列, 若从中删去两项 a_i 和 $a_j (i < j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组, 且每组的 4 个数都能构成等差数列, 则称数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列.

- (1) 写出所有的 (i, j) , $1 \leq i \leq j \leq 6$, 使数列 a_1, a_2, \dots, a_6 是 (i, j) -可分数列;
- (2) 当 $m \geq 3$ 时, 证明: 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$ -可分数列;
- (3) 从 $1, 2, \dots, 4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 $j (i < j)$, 记数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列的概率为 P_m , 证明 $P_m > \frac{1}{8}$.

【解析】

记 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

(1) 从 a_1, a_2, \dots, a_6 中去掉两项后剩下 4 项, 恰构成等差数列, 公差必为 d , 否则原数列至少有 7 项. 因此剩下的数列只可能为 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_2, a_3, a_4, a_5, a_3, a_4, a_5, a_6$ 三种可能, 对应的 (i, j) 分别为 $(5, 6), (1, 6), (1, 2)$.

(2) 考虑分组 $(a_1, a_4, a_7, a_{10}), (a_3, a_6, a_9, a_{12}), (a_5, a_8, a_{11}, a_{14}), (a_{4k-1}, a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}) (4 \leq k \leq m)$, (当 $m = 3$ 时只需考虑前三组即可) 即知结论成立.

(3) 一方面, 任取两个 $i, j (i < j)$ 共有 C_{4m+2}^2 种可能. 另一方面, 再考虑一种较为平凡的情况: $i-1, j-i-1$ 均可被 4 整除, 此时, 只要依次将剩下的 $4m$ 项按原顺序从头到尾排一列, 每四个截取一段, 得到 m 组公差为 d 的数列, 则满足题意, 故此时确实是 (i, j) -可分的. 接着计算此时的方法数. 设 $i = 4k+1 (0 \leq k \leq m)$, 对于每个 k, j 有 $\frac{(4m+2) - (4k+1) - 1}{4} + 1 = m-k+1$ (种), 因此方法数为

$$\sum_{k=1}^m (m-k+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

当 $m = 1, 2$, 已经有 $\frac{(m+1)(m+2)}{2} / C_{4m+2}^2 > \frac{1}{8}$. 下面考虑 $m \geq 3$. 我们证明: 当 $i-2, j-i+1$ 被 4 整除, 且 $j-i+1 > 4$ 时, 数列是 (i, j) -可分的. 首先我们将 a_1, a_2, \dots, a_{i-2} , 及 $a_{j+2}, a_{j+3}, \dots, a_{4m+2}$ 顺序排成一列, 每 4 个排成一段, 得到一些公差为 d 的四元数组, 因此我们只需考虑 $a_{i-1}, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}$ 这 $j-i+1$ 个数即可. 为书写方便, 我们记 $j-i = 4t-1 (t > 1)$, 并记 $b_n = a_{n+i-2}$, 即证 $b_1, b_3, b_4, \dots, b_{4t}, b_{4t+2}$ 可被划分成若干组.

引理: 设 $j-1$ 能被 4 整除. 若 b_1, b_2, \dots, b_{j+1} 是 $(2, j)$ -可分的, 则 b_1, b_2, \dots, b_{j+9} 是 $(2, j+8)$ -可分的.

引理证明: 将 b_1, b_2, \dots, b_{j+1} 去掉 b_2, b_j 后的 $\frac{j-1}{4}$ 组四元组再并上 $(b_j, b_{j+2}, b_{j+4}, b_{j+6}), (b_{j+3}, b_{j+5}, b_{j+7}, b_{j+9})$ 即证.

回原题. 由 (2), b_1, \dots, b_{14} 是 $(2, 13)$ -可分数列, 且 (b_1, b_3, b_5, b_7) 和 (b_4, b_6, b_8, b_{10}) 知 b_1, \dots, b_{10} 是 $(2, 9)$ -可分数列, 因而结合引理知 $b_1, b_3, b_4, \dots, b_{4t}, b_{4t+2}$ 可被划分成若干组, 由此结论成立. 计算此时的方法数. 设 $i = 4k+2 (0 \leq k \leq m-1)$, 则此时 j 有 $\frac{(4m+2) - (4k+2)}{4} - 1 = m-k-1$ 种, 因此方法数为

$$\sum_{k=0}^{m-1} (m-k-1) = \frac{m(m-1)}{2}.$$

因此我们有

$$p_m \geq \frac{m(m-1) + (m+1)(m+2)}{2C_{m+1}^2} > \frac{1}{8}.$$