

自习3

蒙日圆的推导过程

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条互相垂直的切线，其交点的轨迹是圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ，称为蒙日圆，也称为外蒙日圆、外准圆。推导如下：

设两个切点为 A, B ，两条切线的交点为 $P(x_0, y_0)$ 。设两条切线 PA, PB 的方程分别为 $y = k_1(x - x_0) + y_0$ ， $y = k_2(x - x_0) + y_0$ 。先考虑其中一条切线 PA ，与椭圆联立：

$$\begin{cases} y = k_1(x - x_0) + y_0 \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

得

$$(a^2k_1^2 + b^2)x^2 + 2a^2k_1(y_0 - k_1x_0)x + a^2(y_0 - k_1x_0)^2 - a^2b^2 = 0$$

由于 PA 是切线，故 $\Delta = 0$ ，即

$$\begin{aligned} \Delta &= 4a^4k_1^2(y_0 - k_1x_0)^2 - 4(a^2k_1^2 + b^2)[a^2(y_0 - k_1x_0)^2 - a^2b^2] \\ &= 4a^2b^2[(a^2 - x_0^2)k_1^2 + 2x_0y_0k_1 + b^2 - y_0^2] \end{aligned}$$

于是 $(a^2 - x_0^2)k_1^2 + 2x_0y_0k_1 + b^2 - y_0^2 = 0$ ，同理，对于切线 PB ，我们通过同样的计算过程可以得到 $(a^2 - x_0^2)k_2^2 + 2x_0y_0k_2 + b^2 - y_0^2 = 0$ ，所以 k_1, k_2 是下面这个一元二次方程的两个根：

$$(a^2 - x_0^2)k^2 + 2x_0y_0k + b^2 - y_0^2 = 0$$

根据韦达定理，有 $k_1k_2 = \frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2}$ ，又因为 $k_1k_2 = -1$ ，故 $\frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2} = -1$ ，解得

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$$

这说明点 $P(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上。

蒙日圆的推导过程曾经在高考出现过（广东省）此推导过程体现了“同构”的思想，即把 k_1, k_2 看作一元二次方程的两个根。涉及“同构”思想的考题很多，最经典的莫过于2021年全国甲卷的圆锥曲线大题。

T16

椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 。设直线 AB 的方程为 $x = my + t$ ，设 A, B 坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 。联立

$$\begin{cases} x = my + t \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$$

得 $(m^2 + 2)y^2 + 2mty + t^2 - 4 = 0$ ，由韦达定理得

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2mt}{m^2 + 2} \\ y_1 y_2 = \frac{t^2 - 4}{m^2 + 2} \end{cases}$$

顺便求一下 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 x_2$, 之后会用上:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2t = \frac{4t}{m^2 + 2} \\ x_1 x_2 = (my_1 + t)(my_2 + t) = \frac{2t^2 - 4m^2}{m^2 + 2} \end{cases}$$

现在, 根据题目条件, 有 $MA \perp MB$, 即 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (注意不要用斜率之积为 -1 来表达垂直, 应该用向量点乘为 0).

$$\begin{aligned} (x_1 - 2, y_1) \cdot (x_2 - 2, y_2) &= (x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 + y_1 y_2 \\ &= \frac{2t^2 - 4m^2}{m^2 + 2} - \frac{8t}{m^2 + 2} + 4 + \frac{t^2 - 4}{m^2 + 2} \\ &= \frac{3t^2 - 8t + 4}{m^2 + 2} \end{aligned}$$

所以 $3t^2 - 8t + 4 = 0$, 解得 $t = \frac{2}{3}$ 或 2 , 其中 2 要舍去(因为是 M 点).

T17

跟上面的题目一样, 只不过把椭圆换成了双曲线, 定点不告诉你在 x 轴上.

T18

抛物线的方程是 $x^2 = 4y$. 四边形 $GHMN$ 是一个筝形, 其面积 $S = \frac{1}{2}|GM| \cdot |NH|$, 而 GM, FH 是两条弦长. 设 GM 的方程是 $y = kx + 1$, 设 M, N 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. 联立

$$\begin{cases} y = kx + 1 \\ x^2 = 4y \end{cases}$$

得 $x^2 - 4kx - 4 = 0$. 根据韦达定理有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4k \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$$

根据弦长公式有 $|GM| = \sqrt{k^2 + 1} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 4(k^2 + 1)$.

再求另一条弦长 $|FH|$. 由于直线 FH 的方程是 $y = -\frac{1}{k}x + 1$, 因此我们只需要把上面 $|GM|$ 中的 k 换成 $-\frac{1}{k}$ 即可得到 $|FH| = 4(\frac{1}{k^2} + 1)$. 故 $S = 8(k^2 + 1)(\frac{1}{k^2} + 1) = 8(2 + k^2 + \frac{1}{k^2}) \geq 32$.

T19

设直线 MN 的方程为 $y = kx + m$, 这道题目无论怎样, 都避免不了分类讨论 MN 垂直 x 轴 (或者垂直 y 轴) 的情形. 设 M, N 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 联立

$$\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 3y^2 = 3 \end{cases}$$

得 $(3k^2 + 1)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 3 = 0$, 根据韦达定理有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{6km}{3k^2 + 1} \\ x_1 x_2 = \frac{3m^2 - 3}{3k^2 + 1} \end{cases}$$

顺便求一下 $y_1 + y_2$ 和 $y_1 y_2$, 后面用得上:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2m}{3k^2 + 1} \\ y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = \frac{m^2 - 3k^2}{3k^2 + 1} \end{cases}$$

现在根据 $k_{GM} \cdot k_{GN} = \frac{2}{3}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - 1}{x_1} \cdot \frac{y_2 - 1}{x_2} &= \frac{y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1}{x_1 x_2} \\ &= \frac{\frac{m^2 - 3k^2}{3k^2 + 1} - \frac{2m}{3k^2 + 1} + 1}{\frac{3m^2 - 3}{3k^2 + 1}} \\ &= \frac{m - 1}{3m + 3} \end{aligned}$$

所以由 $\frac{m-1}{3m+3} = \frac{2}{3}$, 解得 $m = -3$, 所以直线 MN 经过定点 $(0, -3)$.