高二上学期命题参考卷（自编）

下面是本卷的答案及解析：

选择题答案速查： $C, A, A, D, C, B, C, B, (ACD), (BC), (AC)$
填空题答案速查： $(\frac{3}{2}, 2), 4, [\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}]$

T1

答案：C
解析：显然集合 A, B 都包含 1 ，自然都包含所有整数。

T2

答案：A
解析：设 $z=a+bi$，由于 z 为虚数，则 $b\neq 0$ 。下面计算：

$$z+\frac{1}{z}=(a+\frac{a}{a^2+b^2})+\frac{b(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2}i$$

$z+\frac{1}{z}$ 为实数，则虚部为 0，故 $a^2+b^2=1$，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1$ 。

T3-T6

答案：A, D, C, B
解析：略

T7

答案：C
解析：由题意，$S_8-S_4=a_5+a_6+a_7+a_8=0$，根据等差数列的性质：

$$若m+n=p+q，则a_m+a_n=a_p+a_q$$

推出 $a_1+a_{12}=0$，从而 $S_{12}=6(a_1+a_{12})=0$ 。由本题可以得到以下结论：若 $S_m=S_n$，则 $S_{m+n}=0$ $(m\neq n)$。

T8

答案：B
解析：$\cos a_n\cdot\tan a_{n+1}=1$ 等价于 $\tan a_{n+1}=\frac{1}{\cos a_n}$ ，两边平方得 $\tan^2 a_{n+1}=\frac{1}{\cos^2 a_n}$ ，利用余弦和正切的关系式：

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=\tan^2\theta+1$$

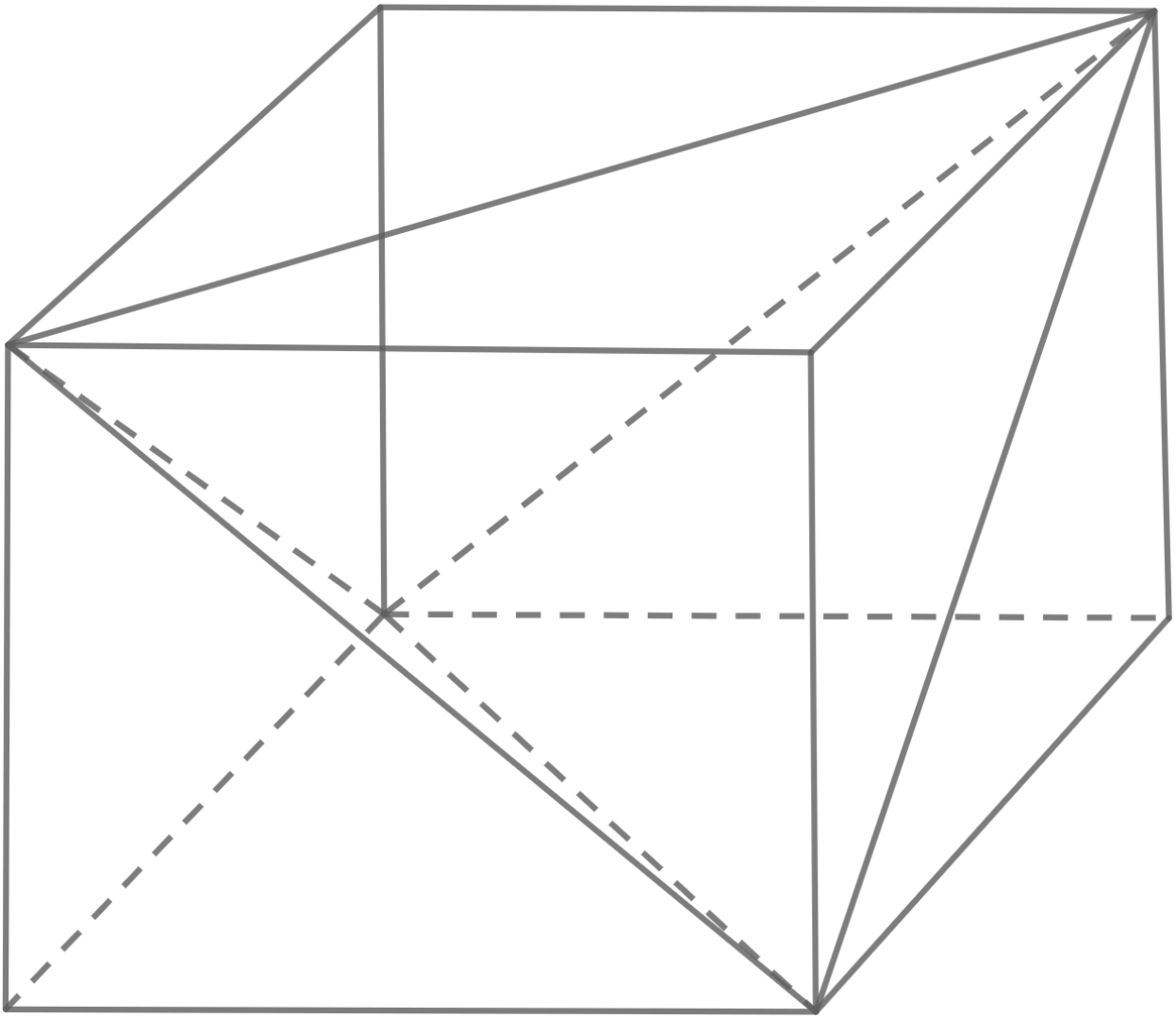
得到 $\tan^2 a_{n+1}=\tan^2 a_n+1$ ，于是 $\{\tan^2 a_n\}$ 是首项为 1 公差为 1 的等差数列，$\tan^2 a_n=n$ ，$\tan a_n=\sqrt{n}$ 。又因为 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$ ，则 $\cos a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ，$\cos a_{2025}=\frac{1}{\sqrt{2026}}$ 。

T9

答案：ACD
解析：

- 对于 A： 略
- 对于 B： 注意是正弦值，余弦值才是 $\frac{1}{3}$
- 对于 C： 即外接球

- 对于 D： 即外接正方体，考虑下面的图形：



T10

答案：BC
解析：

- 对于 A： 由题意，$a_{n+k}=\frac{1}{a_n}$ ，于是 $a_{n+2k}=\frac{1}{a_{n+k}}=a_n$，周期为 $2k$
- 对于 B： $S_{n+2k}-S_n$ 是一个周期中所有项之和，只需考虑最开始的一个周期：

$$a_1,a_2,\ldots,a_k,a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_{2k}$$

由于 $a_{n+k}=\frac{1}{a_n}$，故这个周期的项可以写成：

$$a_1,a_2,\ldots,a_k,\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_k}$$

从而所有项之和为 $(a_1+\frac{1}{a_1})+(a_2+\frac{1}{a_2})+\cdots+(a_k+\frac{1}{a_k})\geq 2k$

- 对于 C： $a_{n+2k+1}=a_n$ 意味着 $\{a_n\}$ 有一个周期为 $2k+1$，从而 $a_1=a_{2k+2}=a_2$，同理有 $a_2=a_{2k+3}=a_3$ .....如此下去可知 $\{a_n\}$ 一个周期内 $a_1=a_2=\cdots=a_{2k}$，从而是常数列。

- 对于 D：如果 $k=1$，考虑数列 $1,-1,1,-1,1,\ldots$，满足 $\{a_n\}$ 有两个周期 2 和 4，但它不是常数列。

T11

答案：AC
解析：A,B,C 的图比较简单，略微穷举也可选出答案。至于 D 图，凭直觉也能判错。
实际上，一个图能否一笔画，可以这样考虑：

- 如果一笔画的起点和终点不在同一点，那么起点和终点连出的边必须是奇数条，因为从起点离开的边一定比到达起点的边多一条，而到达终点的边一定比进入终点的边多一条；在起点和终点之间经过的点，每一点连出的边一定是偶数条，否则会出现“只进不出”或者“只出不进”的情况，而这样的情况只能发生在起点和终点上。
- 如果一笔画的起点和终点是同一点，那么图中每个点连出的边都是偶数条。
  因此，一个图能一笔画，当且仅当每个点连出的边都是偶数条（此时从图中任意顶点开始都能一笔画，并且回到原点）；或者有两个点连出的边是奇数条（也就是起点和终点），其它每个点连出的边都是偶数条。
  根据这个结论，图 A 的 B,C 两点连出的边是奇数条，其它每个点连出的边都是偶数条，因此可以一笔画，而且起点和终点就是 B,C；图 B 每个点连出的边都是奇数条，因此不能一笔画；图 C 的 B,C 两点连出的边是奇数条，其它每个顶点连出的边都是偶数条，因此可以一笔画；图 D 每个点连出的边都是奇数条，因此不能一笔画。

T12

答案：$(\frac{3}{2},2)$
解析：$2-m<m-1$

T13

答案：4
解析：两边平方，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\Longrightarrow\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$，根据基本不等式以及向量形式的柯西不等式，有 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2\geq2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\geq2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，则 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\geq4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\geq4$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$。（注意根据题目条件可以得到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$）

T14

答案：$[\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2}]$
解析：如果直接想象正四面体的运动模式，非常困难。运动是相对的，本题不妨反过来想：把正四面体看成静止的参考系，则空间直角坐标系的原点 O 相对于正四面体运动。由于 $OB\perp OC$，故 O 点的轨迹是以 BC 为直径的球，后面就好做了，连接 A 与球心，连线与轨迹球的一远一近两个交点即为 $|OA|$ 取最大、最小时点 O 的位置。

T15

答案：(1) $\frac{a_1}{q-1}$ (2) 略
解析：
(1) $S_n=\frac{a_1}{q-1}q^n-\frac{a_1}{q-1}$，故 $\{S_n+\frac{a_1}{q-1}\}$ 为等比数列，$c=\frac{a_1}{q-1}$。
(2) 假设存在正整数 m,n 使得 $S_m+S_n=S_{m+n}$，则

$$\frac{a_1(q^m+q^n-2)}{q-1}=\frac{a_1(q^{m+n}-1)}{q-1}$$

化简得 $q^m+q^n-1=q^{m+n}$，可以写成 $(q^m-1)(1-q^n)=0$，由于 $q\neq 1$，该式不可能成立，所以假设不成立，即不存在正整数 m,n 使得 $S_m+S_n=S_{m+n}$。

T16

答案：(1) 略 (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
解析：
(1)

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABD}^2&=\frac{1}{4}\cdot AB^2\cdot AD^2\cdot\sin^2\angle BAD\\
&=\frac{1}{4}\cdot AB^2\cdot AD^2\cdot(1-\cos^2\angle BAD)\\
&=\frac{1}{4}\cdot AB^2\cdot AD^2\cdot(1-\frac{(AB^2+AD^2-BD^2)^2}{4\cdot AB^2\cdot AD^2})\\
&=\frac{1}{4}\cdot AB^2\cdot AD^2-\frac{(AB^2+AD^2-BD^2)^2}{16}\\
&=\frac{1}{4}\cdot(CA^2+CB^2)\cdot(CA^2+CD^2)-\frac{[(CA^2+CB^2)+(CA^2+CD^2)-(CB^2+CD^2)]^2}{16}\\
&=\frac{1}{4}(CA^2\cdot CB^2+CA^2\cdot CD^2+CD^2\cdot CB^2)\\
&=S_{\triangle ABC}^2+S_{\triangle ADC}^2+S_{\triangle BCD}^2
\end{aligned}$$

得证。

(2) 以 C 为原点，CB,CD,CA 为 x,y,z 轴正方向建系，求出 P 点坐标即可。设 CB,CD,CA

的长度分别为 a,b,c，设 $P(x,y,z)$。根据题意有 $CP\perp$ 平面ABD，容易求出平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$，于是 $\overrightarrow{CP}//\boldsymbol{n}$，即

$$\frac{x}{\frac{1}{a}}=\frac{y}{\frac{1}{b}}=\frac{z}{\frac{1}{c}}$$

得到 $ax=by=cz$，于是可以设 $x=\frac{k}{a},y=\frac{k}{b},z=\frac{k}{c}$，然后易求出平面 PCB 的一个法向量 $\boldsymbol{n_1}=(0,b,-c)$，平面 CBD 的一个法向量 $\boldsymbol{n_2}=(0,0,1)$，则二面角 $P-BC-D$ 的余弦值为

$$\cos\theta=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{1}{2}$$

解得 $\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

T17

答案：(1) 略 (2) $(n^2-2n+3)\cdot 2^n-3$
解析：
(1) 取 $i=j=1$，则 $\frac{a_1}{a_1}=1$ 是 $\{a_n\}$ 中的项，由于 $\{a_n\}$ 递增且各项均为正整数，故只能是 $a_1=1$。再取 $i=n$，$j=1,2,3,\ldots,n$，则下面的 n 项：

$$\frac{a_n}{a_1},\frac{a_n}{a_2},\frac{a_n}{a_3},\ldots,\frac{a_n}{a_{n-1}},\frac{a_n}{a_n}$$

均在 $\{a_n\}$ 中，由于它们都小于 a_{n+1} 且为递减排列，故它们依次等于 $a_n,a_{n-1},\ldots,a_3,a_2,a_1$，于是 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=a_2$，这就说明了 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 a_2 的等比数列。

(2) $a_2=2a_1=2$，则 $a_n=2^{n-1}$。令

$$\begin{aligned}S_n&=1^2\cdot a_1+2^2\cdot a_2+\cdots+n^2\cdot a_n\\&=1^2\cdot 2^0+2^2\cdot 2^1+\cdots+n^2\cdot 2^{n-1}\\2\cdot S_n&=1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+\cdots+n^2\cdot 2^n\end{aligned}$$

错位相减得

$$S_n=n^2\cdot 2^n-(3\cdot 2^1+5\cdot 2^2+7\cdot 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1})-1$$

再令

$$\begin{aligned}T_n&=3\cdot 2^1+5\cdot 2^2+7\cdot 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}\\2\cdot T_n&=3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+7\cdot 2^4+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n\end{aligned}$$

错位相减得

$$T_n=(2n-3)\cdot 2^n+2$$

于是

$$S_n = n^2 \cdot 2^n - T_n - 1 = (n^2 - 2n + 3) \cdot 2^n - 3$$

T18

答案：(1) 6 (2) $\frac{27}{2}$ (3) 不存在
解析：
(1) F 坐标为 $(1,0)$ 。设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$ ，由重心坐标公式有

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ y_1+y_2+y_3=0 \end{cases}$$

则 $|FA|+|FB|+|FC| = (x_1+1)+(x_2+1)+(x_3+1) = 6$ 。

(2) 在 (1) 中已经得出：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 & (1) \\ y_1+y_2+y_3=0 & (2) \end{cases}$$

由于 $x_1=\frac{y_1^2}{4}$ ，$x_2=\frac{y_2^2}{4}$ ，$x_3=\frac{y_3^2}{4}$ ，代入 (1) 式有：

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2=12 \qquad (3)$$

将 (2) 式平方，有：

$$\begin{aligned} (y_1+y_2+y_3)^2 &= 0 \\ y_1^2+y_2^2+y_3^2+2(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1) &= 0 \\ 12+2(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1) &= 0 \\ y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1 &= -6 \qquad (4) \end{aligned}$$

再将 (4) 式平方，有：

$$\begin{aligned} (y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)^2 &= 36 \\ y_1^2y_2^2+y_2^2y_3^2+y_3^2y_1^2+2y_1y_2y_3(y_1+y_2+y_3) &= 36 \\ y_1^2y_2^2+y_2^2y_3^2+y_3^2y_1^2 &= 36 \qquad (5) \end{aligned}$$

由于 $x_1=\frac{y_1^2}{4}$ ，$x_2=\frac{y_2^2}{4}$ ，$x_3=\frac{y_3^2}{4}$ ，代入 (5) 式有：

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{9}{4} \qquad (6)$$

再将 (1) 式平方，有：

$$\begin{aligned} (x_1+x_2+x_3)^2 &= 9 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) &= 9 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+\frac{9}{2} &= 9 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 &= \frac{9}{2} \qquad (7) \end{aligned}$$

根据 (1) 式和 (7) 式即可求出：

$$\begin{aligned}|FA|^2+|FB|^2+|FC|^2&=(x_1+1)^2+(x_2+1)^2+(x_3+1)^2\\&=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2(x_1+x_2+x_3)+3\\&=\frac{9}{2}+6+3\\&=\frac{27}{2}\end{aligned}$$

(3) 不存在。如果存在 $n>2$，使得 $|FA|^n+|FB|^n+|FC|^n$ 为定值 C，那么根据方程组：

$$\begin{cases}|FA|+|FB|+|FC|=6\\|FA|^2+|FB|^2+|FC|^2=\dfrac{27}{2}\\|FA|^n+|FB|^n+|FC|^n=C\end{cases}$$

能求出 $|FA|,|FB|,|FC|$ 的值，然而这三个显然不是定值。

T19

答案：略
解析：
(1) $|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|=a_1(1-q^n)<|a_1|$，取 $M=|a_1|$ 即可。
(2) 由题意，存在正数 M_1,M_2，分别使得：

$$\begin{aligned}|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|<M_1\\|b_2-b_1|+|b_3-b_2|+\cdots+|b_{n+1}-b_n|<M_2\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}|a_n|&=|a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})|\\&\le|a_1|+|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\&<|a_1|+M_1\end{aligned}$$

同理有 $|b_n|<|b_1|+M_2$。由于

$$\begin{aligned}|a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n|&=|a_{n+1}b_{n+1}-a_{n+1}b_n+a_{n+1}b_n-a_nb_n|\\&=|a_{n+1}(b_{n+1}-b_n)+b_n(a_{n+1}-a_n)|\\&\le|a_{n+1}||b_{n+1}-b_n|+|b_n||a_{n+1}-a_n|\\&<(|a_1|+M_1)|b_{n+1}-b_n|+(|b_1|+M_2)|a_{n+1}-a_n|\end{aligned}$$

故

$$|a_2b_2-a_1b_1|+|a_3b_3-a_2b_2|+\cdots|a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n|<(|a_1|+M_1)M_2+(|b_1|+M_2)M_1$$

取 $M=(|a_1|+M_1)M_2+(|b_1|+M_2)M_1$ 即可。
(3) 取 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，则

$$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<1$$

故 $\{a_n\}$ 具有性质 P 。另一方面我们有：

$$\begin{aligned}
|S_2-S_1|+|S_3-S_2|+\cdots+|S_{n+1}-S_n| &= \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} \\
&> \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \\
&= 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) \\
&= 2(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})
\end{aligned}$$

从而 $|S_2-S_1|+|S_3-S_2|+\cdots+|S_{n+1}-S_n|$ 可以无限大，$\{S_n\}$ 不具有性质 P 。