MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLM UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: S. Rodríguez-López

Tentamensskrivning i
Analys, del A
MM5010 7.5hp
20240229

`Inga hjälpmedel tillåtna. Samtliga svar måste motiveras. Minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen. Talen är inte ordnade efter svårighetsgrad. Skriv dina lösningar på separat papper.`

Problemdel

1. Avgör om följande serie och generaliserade integral är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:

   (a) **[2 p]** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{\ln(k+1)}}$, (b) **[1 pt]** $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}+x^5}$.

   Lösningsförslag.

   (a) Notera att för alla $k \geq 1$
   $$\ln(k+1) \leq k,$$
   och att serien $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergerar (det kan visas med hjälp av Cauchykriterium). Jämförelsekriterium I ger oss att den positiva serien
   $$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{\ln(k+1)}}$$
   divergerar. Så serien är inte absolutkonvergent.
   Det är en alternerande serien där talföljden $\frac{1}{\sqrt{\ln(k+1)}}$ är avtagande. Leibnizkriterium ger oss att serien är betingat konvergent.

   (b) Funktionen $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}+x^5}$ är positiva och obegränsad i intervallet $(0,1)$ ty
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$
   Notera att
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2+x^{9/2}} = \frac{1}{2}.$$
   Då integralen konvergerar, eftersom, Jämförelsekriterium II ger oss att integralen konvergerar om, och endast om det gör den generaliserad integralen
   $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{s\to 0^+} 2\sqrt{x}|_s^1.$$

2. **[3 pt]** Lös differentialekvationen
   $$2y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad f(x,0) = \ln|x|,$$
   t.ex. genom att införa de nya variablerna $u = x - y^2$ och $v = y$.

Lösningsförslag. Kedjeregeln ger

$$f'_x = f'_u \qquad f'_y = -2yf'_u + f'_v,$$

vilket överför ekvationen i

$$2yf'_u - 2yf'_u + f'_v = 2y \Leftrightarrow f'_v = 2v. \Leftrightarrow f(u,v) = v^2 + g(u) = y^2 + g(x - y^2).$$

Om vi sätter in $y = 0$ och använder villkoret $f(x,0) = \ln|x|$ får vi $g(x) = \ln|x|$. Lösningen är därför

$$f(x,y) = y^2 + \ln\left|x - y^2\right|.$$

3. För varje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, låt $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara funktionen definierad av

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(\sin(x^2|y|))^\alpha}{x^2+y^2}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$?

   (b) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är partiellderiverbar i origo?

   (c) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är differentierbar i origo?

Lösningsförslag.

(a) Notera att funktioner är odefinierad i några punkter på planet om $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, så kan inte vara kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$ i dessa fall.

Om $\alpha \in \mathbb{N}$, är $\mathbb{R}^2$ funktionsdefinitionsmängden och funktionen är kontinuerlig i alla punkter förutom $(0,0)$ eftersom det är en produkt av funktioner som kan skrivas som en sammansättning av kontinuerliga funktioner.

Eftersom $(0,0)$ är en hopningspunkt, är f_α kontinuerlig i origo om, och bara om

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = f_\alpha(0,0) = 0.$$

Omskrivning av uttrycket i polära koordinater, och användingen av standardgränsvärden visas att det gäller om $\alpha \geq 1$ och $\alpha \in \mathbb{N}$.

(b) Notera att, för alla $\alpha > 0$, f_α är väl definierad i en området av origo. Dessutom

$$\frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(0,0) := \lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x,0) - f_\alpha(0,0)}{x} = 0,$$

och likadan $\frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(0,0) = 0$. Så är f_α partiellderiverbar i origo för alla $\alpha > 0$.

(c) Om f_α är differentierbar i origo, gäller då att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_\alpha(x,y)}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 0.$$

Omskrivning av uttrycket i polära koordinater, och användingen av standardgränsvärden visas att det gäller om, och bara om, $\alpha > 1$.

4. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3xy + y^3 - 3y^2 + 4.$$

(a) **[2 p]** Hitta alla stationära punkter för denna funktion, och bestäm, för varje av dessa, den associerade kvadratiska formen.

(b) **[1 p]** Bestäm om de stationära punkterna är lokala maxima, minima eller sadelpunkter.

Lösningsförslag.

(a) Gadienten blir

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6x + 3y \\ 3x + 3y^2 - 6y \end{pmatrix}.$$

Vi skulle lösa

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y = 0 \\ x + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x(2-x) \\ x + x^2(2-x)^2 - 2x(2-x) = 0 \end{cases}.$$

Så $x = 0$ (och då $y = 0$) eller

$$1 + x(4 - 4x + x^2) - 4 + 2x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 6x - 3 = 0.$$

Vi gissar att 1 är en lösning. Då polynomdivison ger oss att

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 3 = (x-1)(x^2 - 3x + 3).$$

Så ser vi att $x = 1$ är den endast reella lösningar. Därför finns två stationära punkter

$$p_1 = (1,1) \qquad p_2 = (0,0).$$

Notera att

$$f(p_1) = 3, \qquad f(p_2) = 4.$$

Hessianer blir då

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 3 \\ 3 & 6y-6 \end{pmatrix},$$

så den quadratiska formerna blir

$$Q_{p_1}(h,k) = 6kh \qquad Q_{p_2}(h,k) = -6h^2 + 6hk - 6k^2.$$

(b) Kvadratkomplettering ger oss att

$$Q_{p_2}(h,k) = -6\left((h - \frac{k}{2})^2 + \frac{3}{4}k^2\right).$$

Så drar vi som slutsatsen att p_1 är en sadelpunkt och p_2 ett lokalt maximipunkt.

5. Låt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = (x+y)e^{-2x-4y^2}, \qquad (x,y) \in D.$$

(a) **[1 p]** Bevisa att $\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ (x,y)\in D}} f(x,y) = 0$.

(b) **[2 p]** Undersök om funktionen f har ett största och ett minsta värde i mängden D, och bestäm dessa i så fall.

Lösningsförslag.

(a) Vi behöver undersöka vad som händer då $x^2+y^2 \to \infty$ och $x>0$. Först skriver vi om funktionen f som
$$f(x,y) = xe^{-x}e^{-4y^2}e^{-x} + ye^{-y^2}e^{-3y^2}e^{-2x}.$$
Eftersom $xe^{-x} \to 0$ då $x \to +\infty$, och xe^{-x} är kontinuerlig, är funktionerna xe^{-x} och e^{-x} begränsad för $x \geq 0$. Dessutom, $\lim_{y\to\pm\infty} e^{-4y^2} = 0$. Så följer det att
$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} xe^{-2x}e^{-4y^2} = 0.$$
Eftersom $ye^{-y^2} \to 0$ då $y \to \pm\infty$, är funktionen ye^{-y^2} begränsad för alla $y \in \mathbb{R}$. Dessutom är e^{-2x} begränsad för $x \geq 0$. Då får vi att
$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} ye^{-y^2}e^{-3y^2}e^{-2x} = 0.$$
Det följer att $f(x,y) \to 0$ då $x^2+y^2 \to \infty$ för $(x,y) \in D = \{(x,y) : x>0\}$.

(b) Definitionen av gränsvärdet ger oss att, givet $\varepsilon > 0$, finns det $N>0$, sådant att, för $|(x,y)| > N$ och $x>0$ gäller att $|f(x,y)| \leq \varepsilon$. Vi väljer $\varepsilon = \frac{1}{4\sqrt{2e}}$ (Varför? ;-)).
Då kan vi reducera vår studie till den kompakta området
$$D_N = \left\{(x,y) : x \geq 0, x^2+y^2 \leq N\right\}.$$
Då vet vet att funtionen har en maximum och minimum i den kompakta området, ty f är kontinuerlig.
Gradienten blir
$$\nabla f(x,y)^T = e^{-4y^2-2x}\begin{pmatrix} 1-2(x+y) & 1-8y(x+y) \end{pmatrix}$$
Vi får en stationär punkt $(1/4, 1/4)$ (som är en inre punkt till området).

- $f(1/4,1/4) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$.

Randen till området utgörs av linjen $x=0$, och $x^2+y^2=N$, .
Notera att vi har väljer N stor sådan att för $x^2+y^2=N$ i området gäller att $|f(x,y)| \leq \varepsilon$.
Låt $g(y) = f(0,y) = ye^{-y^2}$. Derivatan $g'(y) = (1-8y^2)e^{-4y^2} = 0$ då $y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Då har vi

- $f\left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{2\sqrt{2e}}$.

Det följer att f har ett största och ett minsta värde och att dessa finns bland talen $\frac{1}{2}e^{-3/4}$ och $\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-2/4}$.
Notera att
$$\frac{1}{2}e^{-3/4} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-2/4} \Leftrightarrow \sqrt{2} \geq e^{1/4} \Leftrightarrow 4 \geq e.$$
Då gäller att
$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = f(0, -\frac{1}{2\sqrt{2e}}) \qquad \max_{(x,y)\in D} f(x,y) = f(1/4,1/4).$$

Teoridel

6. **[3 p]** Formulera och bevisa Cauchys rotkriterium och d'Alemberts kvotkriterium för serier.

7. **[3 p]** Härled formlerna för derivatorna av $\sin x$, $\arcsin x$, e^x och $\ln x$. Formeln $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ får användas utan bevis.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLM UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: S. Rodríguez-López

Tentamensskrivning i
Analys, del A
MM5010 7.5hp
20240229

`Inga hjälpmedel tillåtna. Samtliga svar måste motiveras. Minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen. Talen är inte ordnade efter svårighetsgrad. Skriv dina lösningar på separat papper.`

Problemdel

1. Avgör om följande serie och generaliserade integral är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:

   (a) **[2 p]** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{\ln(k+1)}}$, (b) **[1 pt]** $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}+x^5}$.

   Lösningsförslag.

   (a) Notera att för alla $k \geq 1$
   $$\ln(k+1) \leq k,$$
   och att serien $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergerar (det kan visas med hjälp av Cauchykriterium). Jämförelsekriterium I ger oss att den positiva serien
   $$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{\ln(k+1)}}$$
   divergerar. Så serien är inte absolutkonvergent.
   Det är en alternerande serien där talföljden $\frac{1}{\sqrt{\ln(k+1)}}$ är avtagande. Leibnizkriterium ger oss att serien är betingat konvergent.

   (b) Funktionen $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}+x^5}$ är positiva och obegränsad i intervallet $(0,1)$ ty
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$
   Notera att
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2+x^{9/2}} = \frac{1}{2}.$$
   Då integralen konvergerar, eftersom, Jämförelsekriterium II ger oss att integralen konvergerar om, och endast om det gör den generaliserad integralen
   $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_s^1.$$

2. **[3 pt]** Lös differentialekvationen
   $$2y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad f(x,0) = \ln|x|,$$
   t.ex. genom att införa de nya variablerna $u = x - y^2$ och $v = y$.

Lösningsförslag. Kedjeregeln ger

$$f'_x = f'_u \qquad f'_y = -2yf'_u + f'_v,$$

vilket överför ekvationen i

$$2yf'_u - 2yf'_u + f'_v = 2y \Leftrightarrow f'_v = 2v. \Leftrightarrow f(u,v) = v^2 + g(u) = y^2 + g(x-y^2).$$

Om vi sätter in $y=0$ och använder villkoret $f(x,0) = \ln|x|$ får vi $g(x) = \ln|x|$. Lösningen är därför

$$f(x,y) = y^2 + \ln\left|x - y^2\right|.$$

3. För varje $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, låt $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara funktionen definierad av

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(\sin(x^2|y|))^\alpha}{x^2+y^2}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$?

   (b) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är partiellderiverbar i origo?

   (c) **[1 p]** Bestäm för vilka värden av α som funktionen f_α är differentierbar i origo?

Lösningsförslag.

(a) Notera att funktioner är odefinierad i några punkter på planet om $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, så kan inte vara kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$ i dessa fall.

Om $\alpha \in \mathbb{N}$, är $\mathbb{R}^2$ funktionsdefinitionsmängden och funktionen är kontinuerlig i alla punkter förutom $(0,0)$ eftersom det är en produkt av funktioner som kan skrivas som en sammansättning av kontinuerliga funktioner.

Eftersom $(0,0)$ är en hopningspunkt, är f_α kontinuerlig i origo om, och bara om

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = f_\alpha(0,0) = 0.$$

Omskrivning av uttrycket i polära koordinater, och användingen av standardgränsvärden visas att det gäller om $\alpha \geq 1$ och $\alpha \in \mathbb{N}$.

(b) Notera att, för alla $\alpha > 0$, f_α är väl definierad i en området av origo. Dessutom

$$\frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(0,0) := \lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x,0) - f_\alpha(0,0)}{x} = 0,$$

och likadan $\frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(0,0) = 0$. Så är f_α partiellderiverbar i origo för alla $\alpha > 0$.

(c) Om f_α är differentierbar i origo, gäller då att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_\alpha(x,y)}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 0.$$

Omskrivning av uttrycket i polära koordinater, och användingen av standardgränsvärden visas att det gäller om, och bara om, $\alpha > 1$.

4. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3xy + y^3 - 3y^2 + 4.$$

(a) **[2 p]** Hitta alla stationära punkter för denna funktion, och bestäm, för varje av dessa, den associerade kvadratiska formen.

(b) **[1 p]** Bestäm om de stationära punkterna är lokala maxima, minima eller sadelpunkter.

Lösningsförslag.

(a) Gadienten blir

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6x + 3y \\ 3x + 3y^2 - 6y \end{pmatrix}.$$

Vi skulle lösa

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y = 0 \\ x + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x(2-x) \\ x + x^2(2-x)^2 - 2x(2-x) = 0 \end{cases}.$$

Så $x = 0$ (och då $y = 0$) eller

$$1 + x(4 - 4x + x^2) - 4 + 2x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 6x - 3 = 0.$$

Vi gissar att 1 är en lösning. Då polynomdivison ger oss att

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 3 = (x-1)(x^2 - 3x + 3).$$

Så ser vi att $x = 1$ är den endast reella lösningar. Därför finns två stationära punkter

$$p_1 = (1,1) \qquad p_2 = (0,0).$$

Notera att

$$f(p_1) = 3, \qquad f(p_2) = 4.$$

Hessianer blir då

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 3 \\ 3 & 6y-6 \end{pmatrix},$$

så den quadratiska formerna blir

$$Q_{p_1}(h,k) = 6kh \qquad Q_{p_2}(h,k) = -6h^2 + 6hk - 6k^2.$$

(b) Kvadratkomplettering ger oss att

$$Q_{p_2}(h,k) = -6\left((h - \frac{k}{2})^2 + \frac{3}{4}k^2\right).$$

Så drar vi som slutsatsen att p_1 är en sadelpunkt och p_2 ett lokalt maximipunkt.

5. Låt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = (x+y)e^{-2x-4y^2}, \qquad (x,y) \in D.$$

(a) **[1 p]** Bevisa att $\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ (x,y)\in D}} f(x,y) = 0$.

(b) **[2 p]** Undersök om funktionen f har ett största och ett minsta värde i mängden D, och bestäm dessa i så fall.

Lösningsförslag.

(a) Vi behöver undersöka vad som händer då $x^2+y^2 \to \infty$ och $x>0$. Först skriver vi om funktionen f som
$$f(x,y) = xe^{-x}e^{-4y^2}e^{-x} + ye^{-y^2}e^{-3y^2}e^{-2x}.$$
Eftersom $xe^{-x} \to 0$ då $x \to +\infty$, och xe^{-x} är kontinuerlig, är funktionerna xe^{-x} och e^{-x} begränsad för $x \geq 0$. Dessutom, $\lim_{y\to\pm\infty} e^{-4y^2} = 0$. Så följer det att
$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} xe^{-2x}e^{-4y^2} = 0.$$
Eftersom $ye^{-y^2} \to 0$ då $y \to \pm\infty$, är funktionen ye^{-y^2} begränsad för alla $y \in \mathbb{R}$. Dessutom är e^{-2x} begränsad för $x \geq 0$. Då får vi att
$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} ye^{-y^2}e^{-3y^2}e^{-2x} = 0.$$
Det följer att $f(x,y) \to 0$ då $x^2+y^2 \to \infty$ för $(x,y) \in D = \{(x,y) : x > 0\}$.

(b) Definitionen av gränsvärdet ger oss att, givet $\varepsilon > 0$, finns det $N > 0$, sådant att, för $|(x,y)| > N$ och $x > 0$ gäller att $|f(x,y)| \leq \varepsilon$. Vi väljer $\varepsilon = \frac{1}{4\sqrt{2e}}$ (Varför? ;-)).
Då kan vi reducera vår studie till den kompakta området
$$D_N = \left\{(x,y) : x \geq 0, x^2+y^2 \leq N\right\}.$$
Då vet vet att funtionen har en maximum och minimum i den kompakta området, ty f är kontinuerlig.
Gradienten blir
$$\nabla f(x,y)^T = e^{-4y^2-2x}\begin{pmatrix} 1-2(x+y) & 1-8y(x+y) \end{pmatrix}$$
Vi får en stationär punkt $(1/4, 1/4)$ (som är en inre punkt till området).

- $f(1/4,1/4) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$.

Randen till området utgörs av linjen $x = 0$, och $x^2+y^2 = N$, .
Notera att vi har väljer N stor sådan att för $x^2+y^2 = N$ i området gäller att $|f(x,y)| \leq \varepsilon$.
Låt $g(y) = f(0,y) = ye^{-y^2}$. Derivatan $g'(y) = (1-8y^2)e^{-4y^2} = 0$ då $y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Då har vi

- $f\left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{2\sqrt{2e}}$.

Det följer att f har ett största och ett minsta värde och att dessa finns bland talen $\frac{1}{2}e^{-3/4}$ och $\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-2/4}$.
Notera att
$$\frac{1}{2}e^{-3/4} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-2/4} \Leftrightarrow \sqrt{2} \geq e^{1/4} \Leftrightarrow 4 \geq e.$$
Då gäller att
$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = f(0, -\frac{1}{2\sqrt{2e}}) \qquad \max_{(x,y)\in D} f(x,y) = f(1/4,1/4).$$

Teoridel

6. **[3 p]** Formulera och bevisa Cauchys rotkriterium och d'Alemberts kvotkriterium för serier.

7. **[3 p]** Härled formlerna för derivatorna av $\sin x$, $\arcsin x$, e^x och $\ln x$. Formeln $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ får användas utan bevis.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys A, 7.5 hp
den 6/3 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *Betrakta funktionen*

$$g(x,y) = \begin{cases} xy\,\exp(\frac{xy}{x^4+y^4}) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

där som vanligt $\exp(t) = e^t$.

(a) *Är funktionen g kontinuerlig i origo?* 2 p

(b) *Är funktionen g partiellt deriverbar i origo? Bestäm derivatorna i så fall.* 2 p

(c) *Är funktionen g differentierbar i origo?* 1 p

Motivera dina svar!

(a) Vi betraktar $g(x,x) = x^2\exp(\frac{1}{2x^2})$ och ser att $g(x,x)$ är obegränsad då $x \to 0$, ty $\lim_{x\to 0} x^2\exp(\frac{1}{2x^2}) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}e^{\frac{1}{2}t} = \infty$ (som oegentligt gränsvärde). Dvs g kan inte vara kontinuerlig i origo.

(b) Antingen ser vi direkt att $g(x,0) = 0$ för alla x. Därmed är g även i origo partiellt deriverbar med avseende på x och derivatan är lika med 0. Samma argument fungerar även för den partiella derivatan med avseende på y.

Eller så kan man använder sig av definitionen direkt, dvs beräkna i detta fall

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0\cdot h\exp(\frac{0\cdot h}{0^2+h^2})-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 = g'_y(0,0).$$

(c) Nej, enligt (a) är g ej kontinuerlig, och därmed kan den inte vara differentierbar.

Svar: (a) Nej, ej kontinuerlig (b) Ja, $g'_x(0,0) = g'_y(0,0) = 0$ (c) Nej, ej differentierbar.

2. (a) *Bestäm alla stationära punkter till funktionen* 5 p

$$H(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-\frac{1}{6}(x-y+z)^4$$

och avgör deras karaktär. Antar H ett största och/eller minsta värde i $\mathbb{R}^3$? Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} Hx' &= 2x - \frac{2}{3}(x-y+z)^3 = 0 \\ H'_y &= 2y + \frac{2}{3}(x-y+z)^3 = 0 \\ H'_z &= 2z - \frac{2}{3}(x-y+z)^3 = 0 \end{aligned}$$

Subtraktion av den första och den andra ekvationen, samt den andre och den tredje leder till

$$x+y=0 \qquad \text{och} \qquad y+z=0$$

, dvs $x=-y$ och $z=-y$. Insättning i t.ex. den andra ekvationen ger då

$$y(1-(3y)^2)=0,$$

vilket ger oss tre lösningar för y, nämligen $y=0$ och $y=\pm\frac{1}{3}$. Därmed har vi tre stationära punkter, nämligen $(0,0,0)$ och $(\mp\frac{1}{3},\pm\frac{1}{3},\mp\frac{1}{3})$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$H''_{xx} = H''_{yy} = H''_{zz} = 2-2(x-y+z)^2 \qquad H''_{xy} = H''_{yz} = 2(x-y+z)^2 \qquad H''_{xz} = -2(x-y+z)^2.$$

För punkten $(0,0,0)$ är den kvadratiska formen

$$Q_0(h,k,\ell) = 2h^2 + 2k^2 + 2\ell^2$$

positivt definit och punkten är därmed en lokal minimipunkt. I punkterna $(\mp\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \mp\frac{1}{3})$ gäller $(x-y+z)^2 = 1$ och därmed har båda punkterna samma kvadratiska fom

$$Q(h,k,\ell) = 4hk - 4h\ell + 4k\ell.$$

Den är indefinit, ty t.ex. $Q(h,k,0) = 4hk$ antar både positiva och negativa värden. Punkterna är därmed sadelpunkter.

H är både nedåt och uppåt obegränsad, ty $H(x,x,0) = x^2 \to \infty$, då $x \to \infty$ och $H(x,0,0) = x^2 - \frac{1}{6}x^4 = x^2(1-\frac{1}{6}x^2) \to -\infty$, då $x \to \infty$.

Svar: $(0,0,0)$ är en lokal minimipunkt och $(\mp\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \mp\frac{1}{3})$ är sadelpunkter.
Varken minsta eller största värde antas.

(b) *Låt G vara en $\mathcal{C}^3$-funktion som har Taylorutvecklingen* *1 p*

$$G(x,y) = (x-1) + y + (x-1)^2 + y^2 + ((x-1)^2 + y^2)^{3/2} B(x,y)$$

kring $(1,0)$. Är $(1,0)$ en lokal minimipunkt för G? Motivera ditt svar!

Från Taylorutvecklingen kan vi avläsa $G'_x(1,0) = 1$ (och även $G'_y(1,0) = 1$). Alltså är $(1,0)$ inte en stationär punkt och kan därmed (ty G differentierbar) inte vara en lokal extrempunkt.

3. *Avgör om funktionen* *6 p*

$$h(x,y) = (x+y-1)e^{2(x^2+y^2)}$$

antar största och minsta värde i $D = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 < 2\}$ och bestäm dessa i så fall.

Vi börjar med att konstatera att funktionen h är kontinuerlig (faktiskt i hela $\mathbb{R}^2$). Området D är den delen av den öppna cirkelskivan med radie $\sqrt{2}$ och medelpunkt i origo, som ligger i den slutna första kvadranten. D är alltså begränsad, men inte sluten, dvs inte kompakt.

Vi ser dock att funktionen är noll längs linjen $y = 1-x$ och är negativ i den kompakta triangeln $D_- := D = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1-x\}$, medan den är positiv i resterande delen av området $D \setminus D_-$. Därmed antar h ett minsta värde i D_- som även är minsta värde i D.

För att undersöka om h antar även största värde kan vi använda oss av polära koordinater och uppskatta

$$h(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (r(\cos\varphi+\sin\varphi)-1)e^{2r^2} = (r\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})-1)e^{2r^2} < (\sqrt{2}\sqrt{2}-1)e^{2r^2} < e^4,$$

där vi också vet att olikheten är strikt, ty $r < \sqrt{2}$. I uppskattningens första steg har vi sett att (för givet r blir funktionen störst längs linjen $\varphi + \frac{\pi}{4}$, dvs $x = y$. Alltså kollar vi h längs denna linje mot randen av cirkelskivan, dvs $\lim_{x\to 1} h(x,x) = \lim_{x\to 1} (2x-1)e^{4x^2} = e^4$. Då vet vi att h antar värden godtyckligt nära e^4, men å andra sidan har vi sett att $h(x,y) < e^4$ i D. Alltså finns inget största värde.

Det återstår nu att beräkna det minsta värdet. Vi börjar med att kolla stationära punkter, dvs ekvationssystemet

$$\begin{aligned} h'_x &= e^{2(x^2+y^2)}(1 + 4x(x+y-1)) = 0 \\ h'_y &= e^{2(x^2+y^2)}(1 + 4y(x+y-1)) = 0. \end{aligned}$$

Vi får $x = y$ och insättning i t.ex. den första ekvationen ger ingen lösning, dvs det finns inga stationära punkter. Sedan kollar vi randen av triangeln D_-. Längs linjestycket $(t, 0)$ för $0 \leq t \leq 1$ får man (efter lite räkning) en möjlig inre punkt, nämligen $(\frac{1}{2}, 0)$ och av symmetriskäl även $(0, \frac{1}{2})$ på linjestycket på y-axeln. Längs triangelns hypotenus är funktionen 0. Vi måsta alltså jämföra följande värden

$$h(\frac{1}{2}, 0) = h(0, \frac{1}{2}) = -\sqrt{\frac{e}{4}} \qquad h(0,0) = -1 \text{ och } 0.$$

Minsta värdet är då -1.

Svar: Minsta värde: -1, största värde saknas.

4. *Undersök om funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ antar ett största och/eller minsta värde längs den givna kurvan.*

   (a) $x^2 + xy + y^2 = 1$ *1 p*

   (b) $x^2 + 12xy + y^2 = 1.$ *1 p*

   (c) *Välj EN kurva, dvs antingen (a) eller (b), och ange för denna kurva största och/eller minsta värde (i fall de finns).* *3 p*

Motivera dina svar! Funktionen f är kontinuerlig. En möjlighet är att konstatera att båda kurvor faktiskt är kegelsnitt, antingen ellipser eller hyperbler. Genom kvadratkomplettering kan vi avgöra vilket fall inträffar.

(a) $x^2 + xy + y^2 = 1$ kan skrivas som $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$. Alltså är kurvan en ellips, dvs sluten och begränsad, och f antar både största och minsta värde på kurvan. (OBS i fall man inte känner igen att det handlar sig om en ellips ser man från kvadratkompletteringen i alla fall att kurvan är begränsad, ty man får begränsningar $\frac{3}{4}y^2 \leq 1$ och $(x + \frac{y}{2})^2 \leq 1$.)

(b) $x^2 + 12xy + y^2 = 1$. kan skrivas som $x^2 + 12xy + y^2 = (x + 6y)^2 - 35y^2 = 1$. Alltså är kurvan en hyperbel. Eftersom den är obegränsad kommer f anta godtyckligt stora värden (f mäter ju avståndet till origo i kvadrat) och inget största värde antas. Minsta värdet antas dock, ty vi kan välja en stor sluten cirkelskiva, då antar f minsta värdet på den slutna mängden som utgörs av kurvan som ligger innanför cirkelskivan. Detta är även minsta värdet på hela kurvan, ty funktionsvärden utanför är säkert större än cirkelskivans radie i kvadrat. (OBS: Även här kan man argumentera utan att känna igen hyperbeln, t.ex. genom att visa att för varje x finns det ett y, sådan att punkten (x, y) ligger på kurvan, dvs den är obegränsad.)

1 p

(c) För att beräkna minsta/största värdet kan vi använda oss av två metoder, för omväxlings skull ange jag här den ena för (a) och den andra för (b):

(a) Vi använder oss av Lagrangemultiplikatormetoden, där alltså $f(x, y) = x^2 + y^2$ och $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$. Vi börjar med att kolla om det finns en singular punkt på kurvan. Den enda lösningen till grad$g = (2x + y, x + 2y) = (0, 0)$ är $(0, 0)$, men $g(0, 0) \neq 0$, dvs punkten ligger inte på kurvan. Hjälpfunktionen är nu

$$H(x, y; \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$$

och vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} H'_x &= 2x - \lambda(2x + y) = 0 \\ H'_y &= 2y - \lambda(2x + y) = 0 \end{aligned}$$

samt

$$H'_\lambda = -(x^2 + xy + y^2 - 1). = 0$$

Elimination av λ ger (efter lite räkning!) $x = \pm y$. I första fallet ger bivillkoret att $x^2 = \frac{1}{3}$ och därmed funktionsvärdet $\frac{2}{3}$, medan det andra fallet ger $x^2 = 1$ och därmed funktionsvärdet 2. Minsta värdet är alltså $\frac{2}{3}$ och största värdet 2.

(b) Ett alternativ är att använda det nödvändiga villkoret att grad$f$ och grad$g$ ska vara parallella direkt med hjälp av determinanten, dvs vi har ekvationen

$$\det\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x+y & 2x+y \end{pmatrix} = 0$$

Vi får igen $x^2 = y^2$, men nu leder enbart $x = y$ till en lösning, nämligen $x^2 = \frac{1}{14}$, medan $x = -y$ inte ger någon lösning. Minsta värdet är alltså $\frac{2}{14}$.

Svar: (a) Både största och minsta värde antas (b) Endast minsta värde antas

(c) I (a) är minsta värde $\frac{2}{3}$ och största värde 2. I (b) är minsta värde $\frac{2}{14}$.

5. *Lös för $x, y > 0$ den partiella differentialekvationen* *4 p*

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = x$$

t.ex. genom att använda variabelbytet $s = xy$ och $t = \frac{x}{y}$.

Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(s,t) := F(x,y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F'_y &= \widetilde{F}'_s \cdot y + \widetilde{F}'_t \cdot \frac{1}{y} \\ F'_z &= \widetilde{F}'_s \cdot x + \widetilde{F}'_t \cdot \frac{-x}{y^2} \end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då (efter lite räkning)

$$\widetilde{F}'_s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{s}}.$$

Integration leder till

$$\widetilde{F}(s,t) = \sqrt{st} + \phi(t)$$

och därmed

$$F(x,y) = x + \phi(\frac{x}{y}),$$

där ϕ är en tillräckligt många gånger deriverbar funktion.

Svar: allmänna lösning $F(x,y) = x + \phi(\frac{x}{y})$

6. *(a) Undersök om följande serier är konvergenta:* *2 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$$

(b) Undersök om den generaliserade integralen *2 p*

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}\, dx$$

är konvergent.

(a) Observera $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$.

För första serien ser vi därför att termerna $n(e^{\frac{1}{n}} - 1) \to 1$ då $n \to \infty$, dvs termerna går inte mot 0 och serien kan inte vara konvergent. För den andra och tredje serien kan vi använda jämförelsekriteriet II och jämföra med den konvergenta serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. I båda fall blir gränsvärdet 1 och serierna är konvergenta. (OBS: För en fullständig lösning ska dessa gränsvärden beräknas!)

(b) Integralen är generaliserad både i $x = 0$ och vid ∞ och vi delar därför integralen upp i två delar som undersöks var för sig:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}\,dx.$$

Maclaurinutvecklingen av $\arctan x^2$ leder oss till att använda jämförelsekriteriet II och vi beräknar

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \ldots = 1.$$

Eftersom den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent är enligt jämförelsesatsen även $\int_0^1 \frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ konvergent.

I den andra integralen är däremot $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ dominerande. Ty $\lim_{x\to\infty} \arctan x^2 = \frac{\pi}{2}$ och igen jämförelsekriteriet II ger att även den andra integralen är konvergent, ty $\int_0^1 \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent.

Svar: (a) divergetn, konvergent, konvergent (b) konvergent

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys A, 7.5 hp
den 17/4 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. (a) *Bestäm gränsvärdet* $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ *eller visa att det inte finns.* *1 p*

   (b) *Bestäm gränsvärdet* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ *eller visa att det inte finns.* *1 p*

   (c) *Bestäm gränsvärdet* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$ *eller visa att det inte finns.* *1 p*

   (d) *För vilket värde på c är funktionen*

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ c & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   kontinuerlig? *1 p*

   Motivera dina svar!

   (a) $\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = \sin(xy) \cdot \dfrac{1}{x^2+y^2}$ är en begränsad funktion (nämligen $\sin(xy)$) gånger en funktion som går mot 0 (nämligen $\dfrac{1}{x^2+y^2}$) då $x^2+y^2 \to \infty$. Alltså är $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = 0$.

   (b) Om vi sätter $x = y$ får vi $\dfrac{\sin(x^2}{2x^2} \to \frac{1}{2}$ då $x \to 0$,
   men om vi sätter $x = 0$ så får vi $\dfrac{\sin(0)}{y^2} = 0$. Alltså kan $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ inte finnas.

   (c) Om vi nu försöker på samma sätt som i (b) skulle vi få samma gränsvärde i båda fall. Vi kollar därför med polära koordinater och får $\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = \dfrac{\sin\left(r^3\cos^2\varphi\sin\varphi\right)}{r^2}$ som för båda $\cos\varphi = 0$ eller $\sin\varphi = 0$ är lika med noll. Annars kan vi förlänga och får

$$\frac{\sin\left(r^3\cos^2\varphi\sin\varphi\right)}{r^2} = \frac{\sin\left(r^3\cos^2\varphi\sin\varphi\right)}{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi} \cdot \cos^2\varphi\sin\varphi \cdot r.$$

   När $r \to 0^+$ går första faktorn mot 1 och är därmed som andra faktorn begränsad, medan tredje faktorn, nämligen r, går mot 0, alltså är gränsvärdet i alla fall $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = 0$.

   (d) $c = 0$, eftersom endast då gäller $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0)$.

   Svar: (a) $\underline{0}$ (b) <u>existerar ej</u> (c) $\underline{0}$ (d) $\underline{c = 0}$.

2. *Bestäm alla stationära punkter till funktionen* *6 p*

$$F(x,y) = 3x^4 - 6x^2y + 2y^3 + 7$$

   och avgör deras karaktär.

   Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} F'_x &= \ldots = & 12x(x^2-y) = 0 \\ F'_y &= \ldots = & 6(-x^2+y^2) = 0 \end{aligned}$$

   Den första ekvationen har två olika fall, antingen $x = 0$ eller $x^2 = y$. I första fallet, $x = 0$ ger den andra ekvationen även $y = 0$. I andra fallet, $x^2 = y$, blir den andra ekvationen

$y^2 - y = 0$. Det ger oss $y = 1$ och $y = 0$. Och därmed har vi hittat tre stationära punkter, nämligen $(0,0)$ och $(\pm 1, 1)$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$F''_{xx} = 36x^2 - 12y \qquad F''_{xy} = -12x \qquad F''_{yy} = 12y.$$

För punkten $(1,1)$ är den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \ldots = 24h^2 - 24hk + 12k^2 = 24(h - k/2)^2 + 6k^2,$$

medan för punkten $(-1,1)$ är den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \ldots = 24h^2 + 24hk + 12k^2 = 24(h + k/2)^2 + 6k^2.$$

Båda kvadratiska former är alltså positivt definit och punkterna är därmed lokala minimipunkter.
I punkten $(0,0)$ däremot är den kvadratiska formen identisk noll, dvs semidefinit och den avgör inte karaktären hos den stationära punkten. Men om vi betraktar funktionen F längs y-axeln så ser vi att $F(0,y) = 2y^3 + 7$ antar både värden som är större och värden som är mindre än $7 = F(0,0)$. Punkten är därmed en sadelpunkt.

Svar: $(0,0)$ är en sadelpunkt och $(\pm 1, 1)$ är lokala minimipunkter.

3. *Avgör om funktionen* *5 p*

$$f(x,y,z) = (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)e^{x^2+y^2+z^2}$$

antar största och/eller minsta värde i $\mathbb{R}^3$ *och bestäm dessa i så fall.*

Vi observerar först att $f(x,0,0) = (1-x^2)e^{x^2} \to -\infty$ då $x \to \infty$, dvs. f är ej nedåt begränsad och saknar därmed minsta värde.

Vidare kan vi konstatera att $f(x,y,z) \geq 0$ för alla punkter (x,y,z) som ligger i ellipsoiden $E := \{(x,y,z) : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1\}$. Eftersom E är kompakt och f är kontiniuerlig antar f ett största värde på E, som även är största värde av f i $\mathbb{R}^3$ ty $f(x,y,z) < 0$ utanför E.

Eftersom f är noll på randen av E antas största värdet i det inre av E, närmare bestämd i en stationär punkt av f.

Vi betraktar alltså ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
f'_x &= \ldots = & 2x(-x^2 - 2y^2 - 3z^2)e^{x^2+y^2+z^2} &= 0\\
f'_y &= \ldots = & 2y(-1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)e^{x^2+y^2+z^2} &= 0\\
f'_z &= \ldots = & 2z(-2 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)e^{x^2+y^2+z^2} &= 0
\end{aligned}$$

Den andre och den tredje ekvationen implicerar direkt att $y = 0$ respektive $z = 0$. Då ger första ekvationen att även $x = 0$. Alltså finns bara en stationär punkt, nämligen origo, som dessutom ligger i E och största värdet är $f(0,0,0) = 1$.

Svar: största värde 1, minsta värde saknas.

4. *Undersök om funktionen* $h(x,y) = \arctan(x^2 + y^2)$ *antar ett största och/eller minsta värde längs kurvan* $x^3 + y^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Bestäm dem i förekommande fall.* *5 p*

Kurvan är obegränsad, ty för varje $x_0 \in \mathbb{R}$ finns det y_0 sådan att punkten $(x_,y_0)$ ligger på kurvan.

Funktionen $h(x,y) = \arctan(x^2+y^2)$ beror endast på $r = \sqrt{x^2+y^2}$, dvs. avståndet till origo. Dessutom är $\arctan(r^2)$ en strikt växande funktion (i variablen r).

Om vi betraktar den slutna cirkelskivan $B := \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, så finns det säkert punkter av kurvan i den. Skärningen av kurvan med den slutna cirkelskivan är alltså icke-tom och dessutom kompakt (ty kurvan är sluten) och därmed antar h ett minsta värde där.

Pga. monotonin är funktionsvärdena inom B säkert mindre än utanför B och minsta värdet inom B är alltså minsta värdet på hela kurvan.

Däremot finns inte största värde. Eftersom kurvan är obegränsad finns säkert punkter (x_n, y_n) på kurvan sådana att $x_n^2 + y_n^2 \to \infty$ och därmed $h(x_n, y_n) \to \frac{\pi}{2}$, men för ingen punkt (i hela planet) gäller att $h(x, y) = \frac{\pi}{2}$.

För att hitta minsta värdet undersöker vi punkterna där $\operatorname{grad} h$ och $\operatorname{grad} g$ är parallella (här betecknar g funktionen som beskriver bivillkoret, dvs $g(x, y) = x^3 + y^3 - \frac{1}{\sqrt{2}}$):

$$\begin{vmatrix} \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2} & 3x^2 \\ \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2} & 3y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Med lite omskrivning blir ekvationen

$$xy(y - x) = 0.$$

Då får vi tre punkter på kurvan $(0, \frac{1}{2^{1/6}})$, $(\frac{1}{2^{1/6}}, 0)$ och $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Jämförelse av funktionsvärdena ger

$$h\big(0, \frac{1}{2^{1/6}}\big) = h\big(\frac{1}{2^{1/6}}, 0\big) = \arctan\big(\frac{1}{2^{1/3}}\big)$$
$$h\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big) = \arctan(1).$$

Eftersom arctan är en strikt växande funktion är $= \arctan(\frac{1}{2^{1/3}}) < \arctan(1)$ och därmed är minsta värdet $\arctan(\frac{1}{2^{1/3}})$.

Svar: minsta värde $\arctan(\frac{1}{2^{1/3}})$, största värde saknas.

5. *(a) Visa att för en $\mathcal{C}^2$-funktion f skrivs uttrycket $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ i polära koordinater (dvs $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) som $r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$.* *3 p*

   Tips: Det kan vara bra att börja med att beräkna derivatorna med avseende på r.

   (b) Lös (för $r > 0$) den partiella differentialekvationen *2 p*

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)f.$$

(a) Vi betraktar funktionen $\widetilde{f}(r, \varphi) := f(x, y)$ och beräknar (enligt tipset) $\widetilde{f}''_{rr}$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}'_r &= f'_x \cdot x'_r + f'_y \cdot y'_r = f'_x \cdot \cos\varphi + f'_y \cdot \sin\varphi \\
\widetilde{f}''_{rr} &= \big(f'_{xx} \cdot \cos\varphi + f'_{xy} \cdot \sin\varphi\big)\cos\varphi + \big(f'_{yx} \cdot \cos\varphi + f'_{yy} \cdot \sin\varphi\big)\sin\varphi \\
&= f'_{xx} \cdot \cos^2\varphi + 2f'_{xy} \cdot \sin\varphi\cos\varphi + f'_{yy} \cdot \sin^2\varphi
\end{aligned}$$

Alltså är

$$r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = x^2 f'_{xx} + 2xy f'_{xy} + y^2 f'_{yy}.$$

(b) Differerentialekvationen blir då

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - f = 0,$$

som är en linjär ekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Den karakteristiska ekvationen är $\lambda^2 - 1 = 0$ med lösningar $\lambda = \pm 1$. Och därmed är den allmänna lösningen

$$\widetilde{f}(r, \varphi) = A(\varphi)e^r + B(\varphi)e^{-r}$$

där "konstanterna" A och B beror på den andra variablen φ. I de ursprungliga variablerna x och y kan lösningen skrivas som

$$f(x,y) = C\Big(\frac{x}{y}\Big)e^{\sqrt{x^2+y^2}} + D\Big(\frac{x}{y}\Big)e^{-\sqrt{x^2+y^2}},$$

där C och D är tillräckligt många gånger deriverbara funktioner. (OBS: $\frac{x}{y} = \cot\varphi$ och beror alltså endast på φ).

Svar: allmänna lösning $f(x,y) = C\Big(\frac{x}{y}\Big)e^{\sqrt{x^2+y^2}} + D\Big(\frac{x}{y}\Big)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

6. *(a) Undersök om följande serier är konvergenta:* *3 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-50}{n^2}(-1)^n$$

(b) För vilka värden på α är den generaliserade integralen *2 p*

$$\int_0^1 \frac{5+\arctan x}{x^\alpha}\,dx$$

konvergent? Motivera ditt svar!

(a) Den första serien är konvergent enligt kvotkriteriet:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ldots = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4}.$$

För den andra serien kan vi använda ett av jämförelsekriterierna, t.ex. jämförelsekriteriet I:

$$0 \le \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} \le \frac{\sqrt{2n}}{n^2} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}$$

Eftersom serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ är konvergent är även den andra serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}$ konvergent.

Den tredje serien är alternerande och vi försöker använda Leibniz-kriteriet. Vi ser direkt $a_n = \frac{n-50}{n^2} \to 0$ då $n \to \infty$. Dock kan vi konstatera att $a_n > 0$ endast för $n > 50$ och det är inte tydligt om följden är monoton (som också är förutsättningar i Leibniz-kriteriet). En möjlighet är att undersöka differensen

$$a_n - a_{n+1} = \ldots = \frac{n^2+n-50}{n^2(n+1)^2},$$

som är alltså positiv för tillräckligt stora n (Vi behöver inte beräkna för vilka n). Då implicerar Leibniz-kriteriet att även den tredje serien är konvergent.

(b) Den generaliserade integralen är generaliserad endast i 0. Vi använder jämförelsekriteriet II

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{5+\arctan x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 5$$

för att konstatera att den generaliserade integralen i fråga är konvergent precis om den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ är konvergent, vilket är fallet precis om $\alpha < 1$.

Svar: (a) konvergent, konvergent, konvergent (b) konvergent för $\alpha < 1$, annars divergent

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys A, 7.5 hp
den 15/8 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *Berakta funktionen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x-1)}{(x-1)^2+y^2} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}.$$

(a) *Visa att funktionen f är kontinuerlig i hela sin definitionsmängd.* 2 p

(b) *I vilka punkter f är partiellt deriverbar?* 2 p

(c) *I vilka punkter f är differentierbar?* 1 p

Till att börja med kan vi konstatera att funktionen är en sammansättning av differentierbara funktioner utom i punkten $(1,0)$ och är differentierbar (och därmed även kontinuerlig och partiellt deriverbar) i $\mathbb{R} \setminus (1,0)$. Vi behöver alltså endast undersöka $(1,0)$.

(a) Vi använder polära koordinater med center $(1,0)$, dvs $x = 1 + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ och får

$$f(x,y) = \frac{r^2\sin^2\varphi \cdot r\cos\varphi}{r^2} = r\sin^2\varphi\cos\varphi \to 0, \text{ då } (x,y) \to (1,0),$$

ty $\sin^2\varphi\cos\varphi$ är begränsat och $r \to 0$. Alltså har vi fått att

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0 = f(1,0),$$

dvs f är kontinuerlig även i $(1,0)$.

(b) Vi ser direkt att $f(1,y) = 0$ för alla y och $f(x,0) = 0$ för alla x. Alltså finns de partiella derivatorna i $(1,0)$ och är lika med 0.

(c) För att undersöka på differentierbarhet kollar vi

$$\frac{f(1+h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \ldots = \frac{k^2h}{(h^2+k^2)^{3/2}}.$$

Om vi sätter t.ex. $h = k$, ser vi att uttrycket vidare är lika med $\frac{1}{2^{3/2}}$ och därmed inte går mot 0.

Svar: a) se ovan b) partiellt deriverbar i hela $\mathbb{R}$ c) differentierbar i $\mathbb{R} \setminus (1,0)$.

2. (a) *Avgör om funktionen f från uppgift ovan antar största och minsta värde i området* 3 p

$$D = \{(x,y) : |y| \leq \sqrt{3}\,x\}.$$

(b) *Bestäm dessa extremvärden i förekommande fall.* 2 p

(a) Vi ser först att $f(x,x) = \frac{x^2(x-1)}{(x-1)^2+x^2} = \frac{x^3-x^2}{2x^2-2x+1}$ växer över alla gränser då $x \to \infty$. (OBS: linjen (x,x) för $x \geq 0$ ligger i området D.) Därmed finns inget största värde.

Sen betraktar vi området $D_- := \{(x,y) \in D,\ x \leq 1\}$. Området är kompakt, funktionen f är kontinuerlig på D_- (ty den är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^2$ enligt 1.(a)) . Därför antar f minsta värde i D_-. Men f på D_- antar bara icke-positiva värden, medan på $D \setminus D_-$ är värdena icke-negative. Alltså är minsta värdet på D_- även minsta värde på hela D.

(b) För att bestämma minsta värdet av f i D måste vi bestämma minsta värdet av f i det kompakta området D_-. Vi börjar med att undersöka om det finns stationära punkter i det inre av D_-. (OBS: Det inre av D_- innehåller inte punkten $(1,0)$ och därmed är h differentierbar i det inre av D_-.)

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \ldots = y^2 \frac{y^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2} = 0. \\ f'_y(x,y) &= \ldots = \frac{2y(x-1)^3}{((x-1)^2+y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Andra ekvationen är uppfylld endast om antingen $x = 1$ eller $y = 0$. Första fallet kan inte inträffa i det inre av D_-, ty då är $x < 1$. Om $y = 0$ så är även första ekvationen uppfylld och alla punkter på sträcken $(x,0)$ med $0 < x < 1$ är stationära punkter. I dessa punkter är dock $h(x,0) = 0$.

Det återstår att kolla randen, som består av

i. sträckan $(1,y)$ för $|y| \leq \sqrt{3}$

ii. sträckorna $(x, \pm\sqrt{3}x)$ för $0 < x < 1$.

Längs sträckan $(1,y)$ är $h(1,y) = 0$.

Längs sträckorna $(x, \pm\sqrt{3}x)$ undersöker vi hjälpfunktionen

$$H(x) := f(x, \pm\sqrt{3}x) = \ldots = \frac{3(x^3-x^2)}{4x^2-2x+1} \text{ för } 0 < x < 1.$$

Derivatan blir $H'(x) = \ldots = \frac{3x}{(4x^2-2x+1)^2}(4x^3-4x^2+5x-2)$. Vi kan gissa ett nollställe $x = \frac{1}{2}$ och polynomdivision visar att det inte finns andra nollställen i intervallet. Eftersom $H(\frac{1}{2}) = \ldots = -\frac{3}{8}$ är sammanlagt minsta värdet av f i D_-, och därmed även i D, lika med $-\frac{3}{8}$.

Svar: a) inget största värde, men minsta värde b) minsta värde är $-\frac{3}{8}$.

3. *Bestäm för varje värde på $\alpha \in \mathbb{R}$ alla stationära punkter till funktionen* *5 p*

$$g(x,y) = 10 + x^3 + y^3 - 3\alpha xy$$

och avgör deras karaktär.

Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} (I) \quad g'_x &= \ldots = 3(x^2-\alpha y) = 0 \\ (II) \quad g'_y &= \ldots = 3(y^2-\alpha y) = 0 \end{aligned}$$

I fall att $\underline{\alpha \neq 0}$ kan vi lösa ut y ur första ekvationen $y = \frac{x^2}{\alpha}$. Andra ekvationen blir då - efter lite omskrivning - $x(x^3-\alpha^3) = 0$. Den har lösningarna $x = 0$ och $x = \alpha$. Dvs vi har fått stationära punkterna $(0,0)$ och (α,α). För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$g''_{xx} = 6x \qquad g''_{xy} = g''_{yx} = -3\alpha \qquad g''_{yy} = 6y.$$

I punkten $(0,0)$ är den kvadratiska formen $Q(h,k) = -6\alpha hk$ och alltså indefinit (ty $\alpha \neq 0$). Därmed är $(0,0)$ en sadelpunkt.

För punkten (α,α) är den kvadratiska formen $Q(h,k) = \ldots = 6\alpha((h - \frac{1}{2}k)^2 + \frac{9\alpha}{2}k^2$. För $\alpha > 0$ är den positivt definit och punkten är därmed en lokal minimipunkt, medan för för $\alpha < 0$ är den negativt definit och punkten därmed en lokal maximipunkt.

I fall att $\underline{\alpha = 0}$ får vi bara en enda stationär punkt, nämligen $(0,0)$. Alla andra derivator försvinner och därmed är den kvadratiska formen bara semidefinit och avgör inte punktens karaktär. Men vi kan observera att $g(0,0) = 10$ medan $g(t,0) = 10 + t^3$ antar både värden som är större och som är mindre än 10 (i varje omgivning av $t = 0$). Därmed är $(0, 0)$ en sadelpunkt.

Svar: $(0, 0)$ är alltid en saddelpunkt.
I fall $\alpha > 0$ finns dessutom den lokala minimipunkten (α, α) och i fall $\alpha < 0$ är (α, α) en lokal maximipunkt.

4. *Motivera varför funktionen $h(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$ antar ett största och ett minsta värde på ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ samt bestäm dessa.* 5 p

Eftersom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ är kompakt och funktionen h är kontinuerlig, så antar h största och minsta värde på sfären. Vi använder methoden med Langrange-multiplikator och inför hjälpfunktionen

$$F(x, y, z; \lambda) := x^2 - y^2 + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4).$$

Partiell derivering ger följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} 2x - 2x\lambda &= 0 \\ -2y - 2y\lambda &= 0 \\ 1 - 2z\lambda &= 0 \end{aligned}$$

samt

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Eller på ekvivalent form

$$\begin{aligned} x(1 - \lambda) &= 0 \\ y(1 + \lambda) &= 0 \\ 1 - 2z\lambda &= 0 \end{aligned}$$

samt fortfarande

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Från den första ekvationen för vi antingen $x = 0$ eller $\lambda = 1$.

I fall $x = 0$ är (i den andra ekvationen) antingen $y = 0$ och därmed (från bivillkoret) $z = \pm 2$ eller $\lambda = -1$ och därmed från tredje ekvationen $z = -\frac{1}{2}$ och (från bivillkoret) $y^2 = \frac{15}{4}$. Motsvarande funktionsvärden är ± 2 och $-\frac{17}{4}$.

I fall $\lambda = 1$ får vi $y = 0$ och $z = \frac{1}{2}$ och (från bivillkoret) $x^2 = \frac{15}{4}$, där funktionsvärdet blir $\frac{17}{4}$.

Svar: Minsta värde $-\frac{17}{4}$ och största värde $\frac{17}{4}$.

5. *Lös följande partiella differentialekvation för funktionen $F(x, y)$* *5 p*

$$\frac{\partial F}{\partial x} + 2x\frac{\partial F}{\partial y} = F,$$

t.ex. genom variabelbytet

$$\begin{aligned} u &= x \\ v &= y - x^2 \end{aligned} .$$

Bestäm även lösningen som uppfyller $F(x, 0) = e^{x^2+x}$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(u, v) := F(x, y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F'_x &= \widetilde{F}'_u \cdot 1 + \widetilde{F}'_v \cdot (-2x) \\ F'_y &= \widetilde{F}^{e\prime}_v \cdot 1. \end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då

$$\widetilde{F}'_u = \widetilde{F}.$$

Detta är en linjär första ordningsdifferentialekvation (i variablen u), som har lösningen $\widetilde{F}(u,v) = C(v) \cdot e^u$, där "konstanten" C är en tillräckligt många gånger deriverbar funktion i den andra variablen v. Därmed får vi den allmänna lösningen

$$F(x,y) = C(y - x^2) \cdot e^x.$$

För den speciella lösningen gäller då

$$F(x,0) = C(-x^2) \cdot e^x = e^{x^2+x}$$

och därmed $C(t) = e^{-t}$.

Svar: Den allmänna lösningen är $F(x,y) = C(y - x^2) \cdot e^x$.
Lösningen som även uppfyller det ytterligare villkoret är $F(x,y) = e^{-y+x^2+x}$.

6. *(a)* *i. För vilka värden på $\beta > 0$ är serien* *2 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^\beta+3}$$

konvergent?

ii. Är serien *1 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+2}{n^2+3}$$

konvergent?

(b) Är följande generaliserade integral konvergent eller divergent? *2 p*

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\, dx$$

(a) i. Serien är en positiv serie och vi använder jämförelsekriteriet II

$$\frac{\frac{n^2+2}{n^\beta+3}}{\frac{n^2}{n^\beta}} = \frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^\beta}} \to 1, \text{ då } n \to \infty.$$

Alltså har serien i fråga samma konvergensbeteende som serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^\beta} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta-2}}$.
Den är konvergent precis om exponenten $\beta - 2 > 1$.

ii. Termerna i serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+2}{n^2+3}$ går inte mot 0, alltså kan serien ej konvergera.

(b) Integralen är generaliserad både i $x = 0$ och vid ∞ och vi delar därför upp integralen i

$$\int_0^3 \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\, dx + \int_3^\infty \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\, dx.$$

För det första integral utvecklar vi integranden

$$\frac{1-\cos x}{x^{5/2}} = \frac{1-(1-\frac{x^2}{2!}+O(x^4))}{x^{5/2}} = \frac{1}{2x^{1/2}} + O(x^{3/2}).$$

Genom att använda jämförelsekriteriet II och t.ex. funktionen $\frac{1}{2x^{1/2}}$ ser vi att den första generaliserade integralen är konvergent, ty $\int_0^3 \frac{1}{2x^{1/2}}\, dx$ är konvergent.
För den andra integralen kan vi t.ex. uppskatta integranden

$$\left|\frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\right| \leq \frac{2}{x^{5/2}}.$$

Eftersom $\int_3^\infty \frac{2}{x^{5/2}}\, dx$ är konvergent är enligt jämförelsekriteriet I även den andra integralen ovan konvergent.

Svar: (a) i. konvergent för $\beta > 3$. ii. divergent. (b) konvergent

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag
Analys A, 7.5 hp
den 14/10 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *Betrakta funktionen* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*:*

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) *Visa att gränsvärdet* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ *inte finns.* *1 p*

(b) *Är* g *partiellt deriverbar i origo?* *2 p*

(c) *Tillhör* g *klassen* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$*?* *2 p*

Motivera dina svar!

(a) Vi ser att t.ex. $g(t,0) = 0$ för alla t, medan $g(t,t^3) = \ldots = \frac{1}{2}$ för alla $t \neq 0$, alltså kan gränsvärdet inte finnas.

(b) Vi kollar direkt definitionen. Då ser vi att $\lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = 0$ och $\lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = 0$ och därmed är g partiellt deriverbar i origo.

(c) Eftersom gränsvärdet i (a) inte existerar kan funktionen g inte vara kontinuerlig i origo. vilket även innebär att g inte tillhör klassen $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Svar: a) se ovan b) ja c) nej.

2. *Avgör om* $F(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+1}{x^4+y^4}$ *antar största och/eller minsta värde i mängden* D *och bestäm dessa extremvärden i förekommande fall.*

(a) $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \geq 1\}$ *3 p*

(b) $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *2 p*

Vi konstaterar först att $F(x,y) > 0$ samt att t.ex. $\lim_{x\to\infty} F(x,0) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^4} = 0$. Alltså är alla funktionsvärden strikt större än noll, men det finns funktionsvärden godtyckligt nära noll. Dvs F har i båda fall inget minsta värde.

När vi tittar på funktionen så verkar det som att i fallet (a) är funktionen begränsad och blir liten för punkter långt bort från origo, medan i (b) verkar den vara obegränsad. Pga denna förmodan blir strategin att undersöka angående maximum olika i (a) respektive (b).

(a) Vi börjar med att beräkna $\lim_{(x,y)\to\infty} F(x,y)$. Det kan vi göra på olika sätt, t.ex. med polära koordinater

$$0 \leq F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^2+1}{r^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)} = \ldots = \frac{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi} \leq \frac{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}}{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Alltså har vi $\lim_{(x,y)\to\infty} F(x,y) = 0$ och därmed finns till varje $\epsilon > 0$ ett tal R sådan att $F(x,y) < \epsilon$ för alla (x,y) med $\sqrt{x^2+y^2} > R$. För att kunna göra ett lämpligt val av ϵ kollar vi stationära punkter i D samt funktionsvärden på randen $x^2+y^2 = 1$. Vi börjar med stationära punkter. Vi får ekvationssystemet

$$F'_x(x,y) = \frac{2x(x^4+y^4) - (x^2+y^2+1)4x^3}{(x^4+y^4)^2} = 0.$$

$$F'_y(x,y) = \frac{2y(x^4+y^4) - (x^2+y^2+1)4y^3}{(x^4+y^4)^2} = 0.$$

Multiplikation av den första ekvationen med y och den andra med x samt subtraktion leder till

$$(x^2+y^2+1)(4x^3y-4xy^4)=0,$$

och därmed $xy(x^2-y^2)=0$. Insättning i t.ex. den första ekvationen visar att $x=0$ skulle leda till $y=0$, liksom $y=0$ till $x=0$. Men eftersom $(0,0)$ inte ligger i definitionsområdet ger det ingen lösning. Men även $x^2=y^2$ leder till samma punkt (måste visas!) och därmed finns inga stationära punkter.

På randen har vi $h(\varphi):=F(\cos\varphi,\sin\varphi)=\dfrac{2}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$. Derivering ger

$$h'(\varphi)=\ldots=8\frac{\sin\varphi\cos\varphi(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)}{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^2}.$$

I punkterna där derivatan försvinner får vi följande funktionsvärden: Om $\sin\varphi=0$ eller $\cos\varphi=0$ blir funktionsvärdet 2, om däremot $\sin^2\varphi=\cos^2\varphi$ så är $\sin^2\varphi=\cos^2\varphi=\frac{1}{2}$ och därmed funktionsvärdet 4.

Om vi nu t.ex. väljer $\epsilon=\frac{1}{7}$ så vet vi enligt ovan att det finns R sådan att $F(x,y)<\frac{1}{7}$ i området $x^2+y^2>R^2$. Men området $1\le x^2+y^2\le R^2$ är kompakt och därför antar den kontinuerliga funktionen F säkert ett största värde där. Detta värde är (enligt våra beräkningar ovan) lika med 4, som därmed är största värdet i hela D.

(b) Om $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ så ligger t.ex. punkterna $(0,t)$ för $t\neq 0$ inom D. Eftersom $F(0,t)=\frac{t^2+1}{t^4}$ växer över alla gränser då $t\to 0$ är F obegränsad och saknar största värde.

Svar: a) minsta värde saknas, största värde 4 b) största och minsta värde saknas.

3. *Bestäm för varje värde på $\alpha\in\mathbb{R}$ alla stationära punkter till funktionen* *5 p*

$$f(x,y)=2x^3-6\alpha^2xy^2+3\alpha^3y^4$$

och avgör deras karaktär.

Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{array}{lll} (I) & f'_x & = \ldots = 6(x^2-\alpha^2y^2)=0 \\ (II) & f'_y & = \ldots = 12\alpha^2y(-x+\alpha y^2)=0 \end{array}$$

I andra ekvationen har vi tre fall: $\alpha=0$, $y=0$ eller $x=\alpha y^2$.

$\alpha=0$ ger i första ekvationen $x=0$ och därmed är alla punkter $(0,t)$ för $t\in\mathbb{R}$ stationära punkter.

$y=0$ implicerar även $x=0$ och därmed är $(0,0)$ en stationär punkt för alla α.

$x=\alpha y^2$ leder till $y^2(y^2-1)=0$. Eftersom $y=0$ redan diskuterades kan vi dra slutsatsen att $y=\pm1$. I båda fall får vi då $x=\alpha$. Vi får två stationära punkter $(\alpha,\pm1)$.

För att bestämma karaktär hos de stationära punkterna beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$G''_{xx}=12x \qquad G''_{xy}=G''_{yx}=-12\alpha^2y \qquad G''_{yy}=-12\alpha^2x+3\cdot 12\alpha^3y^2.$$

I punkten $(0,0)$ försvinner alla andra derivator, och därmed är den kvadratiska formen bara semidefinit och avgör inte punktens karaktär. Men vi kan observera att $G(0,0)=0$ och att $G(t,0)=2t^3$ antar både värden som är större och som är mindre än 0 (i varje omgivning av $t=0$). Därmed är för alla värden på α punkten $(0,0)$ en sadelpunkt.
För punkten $(\alpha,\pm)$ är den kvadratiska formen $Q(h,k)=\ldots=12\alpha((h\pm\alpha k)^2+\alpha^2k^2)$. För $\alpha>0$ är den positivt definit och punkterna är därmed en lokala minimipunkter, medan för för $\alpha<0$ är den negativt definit och punkterna därmed lokala maximipunkter.

I fall att $\underline{\alpha = 0}$ får vi en hel linje av stationära punkter, nämligen $(0, t)$. I en sådan punkt är funktionsvärdet $G(0, t) = 0$ men $G(x, t) = 2x^3$ kan antar positiva värden för $x > 0$ och negativa för $x < 0$ och därmed är alla dessa punkter saddelpunkter.

Svar: $(0, 0)$ är alltid en saddelpunkt.

Om $\alpha > 0$ finns dessutom de lokala minimipunkter $(\alpha, \pm 1)$

om $\alpha < 0$ är de lokala maximipunkter $(\alpha, \pm 1)$.

om $\alpha = 0$ består hela y-axeln av sadelpunkter.

4. (a) *Avgör om funktionen $h(x, y) = xy$ på kurvan $x^2 + 2xy + 4y^2 = 3$ med $y \geq 0$ har största och/eller minsta värde, och bestäm dessa i så fall.* *4 p*

   (b) *Vilka värden antar funktionen $H(x, y) = \arctan(xy)$ på kurvan $x^2 + 2xy + 4y^2 = 3$ med $y \geq 0$? Använd dina resultat från deluppgift (a) och motivera ditt svar ordentligt!* *1 p*

   (a) Kurvan är en sluten mängd, genom kvadratkomplettering ser vi att kurvan kan skrivas på formen $(x + y)^2 + 3y^2 = 3$, dvs kurvan är begränsad, och därmed kompakt. Då funktionen h är kontinuerlig, så antar h största och minsta värde på kurvan . Eftersom funktionen är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$ och även bivillkoret är given av en kontinuerlig funktion med öppen definitionsmängd, så måste extrempunkterna uppfylla det nödvändiga villkoret att gradienten av h och gradienten av funktionen som ger bivillkoret är linjärt beroende i dessa punkter eller så är de randpunkter till kurvan. Först betraktar vi alltså ekvationssystemet

$$\det \begin{pmatrix} y & 2x + 2y \\ x & 2x + 8y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{samt } (x + y)^2 + 3y^2 = 3.$$

   Beräkning av determinanten ger $4y^2 - x^2 = 0$, dvs $x = \pm 2y$. Insättning i bivillkoret ger (obs här hoppar jag över beräkningen!) två punkter:

$$\Big(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \Big), \quad (1, \frac{1}{2}),$$

   som ger funktionsvärdena $-\frac{3}{2}$ och $\frac{1}{2}$. Därtill kommer kurvans randpunkter där $y = 0$. Dessa är $(\pm\sqrt{3}, 0)$ som ger funktionsvärdet 0.

   (b) Kurvan är bågvis sammanhängande och funktionen är kontinuerlig, alltså antar funktionen h i (a) alla värden mellan sitt minsta värde och sitt största värde, dvs värdemängden är intervallet $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$. Eftersom arctan är kontinuerlig och växande antar då H på kurvan alla värden i intervallet $[-\arctan(\frac{3}{2}), \arctan(\frac{1}{2})]$.

Svar: (a) Minsta värde $-\frac{3}{2}$, största värde $\frac{1}{2}$. (b) intervallet $[-\arctan(\frac{3}{2}), \arctan(\frac{1}{2})]$.

5. (a) *Låt funktionen $G \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ vara en funktion som har följande Taylorutveckling kring punkten $(1, -2)$*

$$G(x, y) = 7 + 2(x-1) + 3(y+2) + \frac{1}{2}\Big(-8(x-1)^2 - 12(x-1)(y+2) + (y+2)^2\Big) + \big((x-1)^2 + (y+2)^2\big)^{\frac{3}{2}} B(x, y),$$

   där B är begränsad i en omgivning av $(1, -2)$. *3 p*

   i. *Ange $G(1, -2)$ och $G'_x(1, -2)$.*

   ii. *Ange tangentplanet till grafen till G i punkten $(1, -2, G(1, -2))$. Går tangentplanet genom origo?*

   iii. *I vilken riktningen växer funktionen snabbast i punkten $(1, -2)$?*

   iv. *Räcker informationen ovan för att ange funktionsvärdet av G i punkten $(\frac{99}{100}, -\frac{200}{101})$? Om ja, ange det! Om nej, förklara varför inte.*

   (b) *Ange en mängd $M \subset \mathbb{R}^2$ som har följande egenskaper: M är varken öppen eller sluten, M är obegränsad och ej bågvis sammanhängande. Förklara även varför din mängd har dessa egenskaper!* *2 p*

(a) i. Vi kan läsa av funktionsvärdet och den partiella derivatan från Taylorutvecklingen: $G(1,-2) = 7$ och $G'_x(1,-2) = 2$.

ii. Tangentplanet till grafen till G i punkten $(1,-2,G(1,-2))$ har ekvationen $z = 7+2(x-1)+3(y+2)$. Origo ligger dock inte på planet, ty $0 \neq 7+2(0-1)+3(0+2)$.

iii. Funktionen växer snabbast i grandientens riktning, vilken i punkt $(1,-2)$ är $(2,3)$.

iv. Nej, formationen ovan räcker inte för att ange funktionsvärdet av G i punkten $(\frac{99}{100}, -\frac{200}{101})$? Vi bara vet att B är begränsad, men vi vet inte hur stor den är i punkten i fråga.

(b) Ett exempel på en sådan mängd är $M := \{(x,y) : x > 2\} \cup \{(0,8)\}$. Mängden består av alla punkter som ligger höger om linjen $x = 2$ samt den enskilde punkten $(0,8)$. Hela linjen $x = 2$ består av randpunkter som dock inte tillhör mängden, alltså är den ej sluten. Punkten $(0,8)$ är också en randpunkt, den tillhör mängden, som därmed inte heller är öppen. M är obegränsad, ty t.ex. alla punkter av formen $(t,0)$ med $t > 2$ tillhör mängden, dvs punkter med godtyckligt stor avstånd till origo. Mängden är ej bågvis sammanhängande, ty det inte går att binda samman punkten $(0,8)$ med någon av de andra punkterna med en kurva som helt ligger i M.

6. (a) *Avgör för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:*

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$

iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{n^2+100}$

(b) *Någon säger: Jag påstår att serien* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ *är konvergent eftersom*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)}{\frac{(-1)^n}{n^2}} = 1.$$

Är det korrekt? Om ja, förtydliga argumentet, dvs ange vilken sats eller vilka satser som används. Om nej, gör ett korrekt resonemang.

(a) i. Genom att använda kvotkriteriet ser vi att $\left|\frac{\frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}\right| = \ldots = (1+\frac{1}{n})^n \to e > 1$ och därmed att serien är divergent.

Alternativt kunde vi t.ex. genom uppskattningen $\frac{n^n}{n!} \geq \frac{n!}{n!} = 1$ kunnat se att termerna inte går mot noll och även så kunnat konstatera att serien är divergent.

ii. Vi ämnar använda rotkriteriet och kollar därför

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}\right|} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

Alltså är serien absolut konvergent.

iii. Vi kollar förutsättningarna för Leibniz-kriterium. Termerna $\frac{n}{n^2+100}$ går mot 0, men vi ser inte direkt om följden är monoton. Därför inför vi hjälpfunktionen

$$h(t) := \frac{t}{t^2+100}$$

och deriverar den med avseende på t. Då får vi $h'(t) = \ldots = \frac{100-t^2}{(t^2+100)^2}$. För $t > 10$ är alltså h, och därmed även följden i fråga, strängt avtagande. Detta är tillräckligt för att kunna använda Leibnitzkriteriet och vi får att serien är konvergent. För att kolla om den även är absolut konvergent undersöker vi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+100}$. Vi ser dock t.ex. $\dfrac{\frac{n}{n^2+100}}{\frac{1}{n}} \to 1$ och då har serien, enligt jämförelsekriteriet II samma konvergensbeteende som serien $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, dvs den är divergent.

(b) Argumentet är inte korrekt, ty jämförelsekriterierna får användas enbart för positiva serier. I detta fall kan man istället jämföra serien $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ med serien $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, dvs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Men eftersom $\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ får vi så att den ursprungliga serien är absolut konvergent.

Svar: (a) divergent, absolut konvergent, betingat konvergent (b) se ovan.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys A, 7.5 hp
den 28/11 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *Betrakta funktionen* $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} : g(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$. *5 p*

   (a) Undersök om gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ *finns och bestäm det i förekommande fall.*

   (b) Undersök om gränsvärdet $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} g(x,y)$ *finns och bestäm det i förekommande fall.*

   (c) Ange en kurva, sådan att funktionen g *är konstant längs kurvan (med enda eventuella undantag att funktionen inte är definierad i origo).*

   Vi börjar med att skriva om funktionen i polära koordinater

   $$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \ldots = \arctan\big(\frac{1}{r}(\cos\varphi + \sin\varphi)\big)$$

   (a) Om $r \to 0$ ser vi från omskrivningen ovan att gränsvärdet beror på riktningen φ. Speciellt ser vi t.ex.

   $$\lim_{t\to 0+} g(0,t) = \lim_{t\to 0+} \arctan\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{t\to 0} g(t,-t) = \lim_{t\to} \arctan 0 = 0,$$

   dvs $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ finns inte.
   Kommentar: $\lim\limits_{t\to 0-} g(0,t) = \lim_{t\to 0-} \arctan\frac{1}{t} = -\frac{\pi}{2}$ skulle ge ännu ett annat värde.

   (b) I omskrivningen ovan är $\cos\varphi + \sin\varphi$ begränsad och därmed $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} g(x,y) = 0$, ty $\frac{1}{r} \to 0$, funktionen arctan är kontinuerlig och $\arctan 0 = 0$.

   (c) Vi ser direkt att funktionen g är konstant lika med 0 längs den räta linjen $x+y=0$. Om vi vill även se andra kurvor sätter vi $\dfrac{x+y}{x^2+y^2} = C$. Om $C = 0$ är det precis linjen innan, annars får vi $x^2 - \frac{1}{C}x + y^2 - \frac{1}{C}y = 0$. Genom kvadratkompletteringen får vi

   $$(x - \frac{1}{2C})^2 + (y - \frac{1}{2C})^2 = \frac{1}{2C^2},$$

   dvs cirklar med medelpunkt på första medianen och som går genom origo. OBS gränsfallet då radien växer över alla gränser utgörs av den räta linjen $x+y=0$.

   Svar: a) <u>gränsvärdet existerar ej</u> b) <u>0</u> c) <u>t.ex. $y = -x$</u>.

2. *Avgör om funktionen* $G(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-4}{x^2+5y^2+1}$ *antar största och/eller minsta värde i mängden* $D := \{(x,y) : |y| \le 1\}$ *och bestäm dessa extremvärden i förekommande fall.* *5 p*

   Vi ser direkt att funktionen är begränsad, ty

   $$G(x,y) = \frac{x^2+y^2-4}{x^2+5y^2+1} < \frac{x^2+5y^2+1}{x^2+5y^2+1} = 1.$$

   Vi har alltså $G(x,y) < 1$ men också $\lim\limits_{x\to\infty} G(x,0) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2+1} = 1$. Därmed antar G inte något största värde.

   Vi konstaterar att funktion G är noll längs den delen av cirkellinjen $x^2+y^2=4$ som ligger innanför remsan $|y| \le 1$. På området $D_- := \{(x,y) : |y| \le 1, x^2+y^2 \le 4\}$ är funktionen icke-positiv, och utanför D_- positiv. Funktionen är kontinuerlig och antar därför ett minsta värde på det kompakta området D_-, som är mindre än noll och därmed även minsta värdet av G på hela området D.

För att bestämma minsta värdet börjar vi med att kolla eventuella stationära punkter i det inre av D_-. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} G'_x(x,y) &= \ldots = \frac{2x(4y^2+5)}{(x^2+5y^2+1)^2} = 0. \\ G'_y(x,y) &= \ldots = \frac{2y(-4x^2+21)}{(x^2+5y^2+1)^2} = 0. \end{aligned}$$

Från den första ekvationen ser vi direkt att $x = 0$ och därmed pga den andra ekvationen även $y = 0$. Den enda stationära punkten är alltså origo.

Randen av D_- består av två cirkelbågar, samt två sträckor med $y = \pm 1$. Längs cirkelbågarna är funktionen noll. Vi kollar alltså längs sträckorna $(t, \pm 1)$ då gränserna för t fås genom att beräkna skärningspunkterna mellan cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ och linjen $y = 1$ (för $y = -1$ blir det samma gränser). Vi får då $x = \pm\sqrt{3}$. Alltså betraktar vi hjälpfunktionen

$$h(t) := g(x, \pm 1) = \frac{x^2-3}{x^2+6} = 1 - \frac{9}{x^2+6} \qquad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}.$$

Derivatan blir då $h'(t) = \dfrac{9 \cdot 2x}{(x^2+6)^2}$, och den är noll precis om $x = 0$. För att får minsta värdet måste vi alltså jämföra

$$g(0,0) = -4 \qquad h(0) = -\frac{1}{2} \qquad h(\pm\sqrt{3}, \pm 1) = 0.$$

Svar: minsta värde -4 största värde finns ej.

3. *Betrakta funktionen* *5 p*

$$f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+2z^2) + xy.$$

Bestäm alla stationära punkter till f och avgör deras karaktär.

Vi konstaterar att funktionen f är definierad för alla punkter i $\mathbb{R}^3$ utom origo $(0,0,0)$ och betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{2x}{x^2+y^2+2z^2} + y = 0 \\ f'_y &= \frac{2y}{x^2+y^2+2z^2} + x = 0 \\ f'_z &= \frac{4z}{x^2+y^2+2z^2} = 0. \end{aligned}$$

Från den tredje ekvationen ser vi direkt att $z = 0$, då blir de första två ekvationer

$$\begin{aligned} (I) \quad \frac{2x}{x^2+y^2} + y &= 0 \\ (II) \quad \frac{2y}{x^2+y^2} + x &= 0. \end{aligned}$$

Om vi multiplicera den första ekvationen med y och den andre med $-x$ och addera dessa två får vi

$$y^2 - x^2 = 0,$$

dvs $y = x$ eller $y = -x$. I första fallet ger den första ekvationen $\dfrac{2x}{2x^2} + x = 0$ eller $1 + x^2 = 0$ som inte har några (reella) lösningar. I andra fallet däremot får vi $1 + x^2 = 0$, dvs $x = \pm 1$. Vi har alltså två stationära punkter $(1,-1,0)$ och $(-1,1,0)$.

För att bestämma karaktär hos de stationära punkterna beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$f''_{xx} = \ldots = 2\frac{-x^2 + y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + 2z^2)^2} \qquad f''_{xy} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 2z^2)^2} + 1 \qquad f''_{xz} = \frac{-8xz}{(x^2 + y^2 + 2z^2)^2}.$$

$$f''_{yy} = \ldots = 2\frac{x^2 - y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + 2z^2)^2} \qquad f''_{yz} = \frac{-8yz}{(x^2 + y^2 + 2z^2)^2} \qquad f''_{zz} = \ldots = 4\frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + 2z^2)^2}.$$

För båda stationära punkter är då den kvadratiska formen

$$Q(h,k,\ell) = 0 \cdot h^2 + 0 \cdot k^2 + 0 \cdot \ell^2 + 2 \cdot 2 \cdot hk + 0 \cdot h\ell + 0 \cdot k\ell = 4hk + 2\ell^2,$$

som är indefinit. Det ser man t.ex. genom att titta på $Q(t,t,0) = 4t^2$ och $Q(t,-t,0) = -4t^2$, dvs Q antar både positiva och negativa värden.

Svar: De stationära punkterna $(1,-1,0)$ och $(-1,1,0)$ är både sadelpunkter.

4. *Betrakta funktionen $h(x,y) = x^4 + y^4$.* *5 p*

   (a) *Avgör om funktionen h antar på kurvan $x^2 + 6xy + y^2 = 2$ största och/eller minsta värde, och bestäm dessa i förekommande fall.*

   (b) *För vilka värden på $\alpha \in \mathbb{R}$ är funktionen h på kurvan $x^2 + 2\alpha xy + y^2 = 2$ begränsad?*

(a) Kurvan kan skrivas på formen $(x + 3y)^2 - 8y^2 = 2$ (ses genom kvadratkomplettering) och är därmed obegränsad (den är en hyperbel, eller så ser man att för varje godtyckligt stor värde på y kan man lösa ut x, dvs kurven innehåller punkter med godtyckligt stor y-koordinat). Därför är även funktionen $h(x,y) = x^4 + y^4$ obegränsad på kurvan och antar därmed inget största värde. Däremot antar funktionen ett minsta värde, ty vi kan inskränka oss på t.ex. en kompakt cirkelskiva med tillräckligt stor radie. Snittet med kurvan är en kompakt mängd och ty h är kontinuerlig antar den ett minsta värde där. Om vi väljer radien tillräckligt stor blir det även minsta värdet för h på hela kurvan.

För att beräkna värdet kollar vi det nödvändiga villkoret:

$$\det \begin{pmatrix} 2x + 6y & 4^3 \\ 6x + 2y & 4y^3 \end{pmatrix} = 0$$

Faktorisering (efter lite räkning) ger ekvationen

$$8(y - x)(y + x)(3x^2 + 3y^2 + xy) = 0$$

Vi har antingen $y = x$ eller $y = -x$. Den sista faktorn är lika med $3(x + \frac{y}{6})^2 + \frac{11}{12}y^2$, den är noll precis om $y =$ och $x = 0$, men origo ligger inte på kurvan. Alltså har vi två fall:

Fall 1: $y = x$ Genom att stoppa in det i kurvans ekvationen får vi (efter lite räkning) två möjliga minimi-punkter $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Fall 2: $y = -x$ Det finns inga punkter som uppfyller kurvans ekvation (om man stopp in får man $-2x^2 = 1$, som inte har en reell lösning).

Eftersom $h(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = h(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$ är detta alltså minsta värdet.

(b) Vi skriver kurvans ekvation om till $(x+\alpha y)^2 + (1-\alpha^2)y^2 = 2$ (med hjälp av kvadratkomplettering) och har olika fall:
För $\alpha^2 < 1$ är kurvan begränsad (en ellips), och därmed kompakt, den kontinuerliga funktionen h antar därmed största och minsta värde och är alltså begränsad.
För $\alpha^2 > 1$ innehåller kurvan som i (a) punkter med godtyckligt stora y-koordinater och därmed är h obegränsad.
För $\alpha^2 = 1$ består kurvan av två parallella linjer som även i detta fall innehåller punkter med godtyckligt stora koordinater och därför är h ej begränsad.

Svar: (a) Minsta värde $\frac{1}{8}$, största värde finns ej. (b) $-1 < \alpha < 1$.

5. *Bestäm alla C^2-funktioner F som uppfyller differentialekvationen* *5 p*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{4y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{4y^3}\frac{\partial F}{\partial y} = 16y^2$$

i området $y > 0$, t.ex. genom att införa de nya variablerna $s = x + y^2$ och $t = x - y^2$.

Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(s,t) := F(x,y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F''_{xx} &= \widetilde{F}''_{ss} + 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt} \\ F''_{y} &= 2y\widetilde{F}'_s - 2y\widetilde{F}'_t \\ F''_{yy} &= 2\widetilde{F}'_s - 2\widetilde{F}'_t + 4y^2(\widetilde{F}''_{ss} - 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt}). \end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då $4\widetilde{F}''_{st} = 16y^2$ och därmed

$$\widetilde{F}''_{st} = 2s - 2t.$$

Integration leder till

$$\widetilde{F}(s,t) = s^2t - st^2 + h(x+y^2) + g(t)$$

och därmed

$$F(x,y) = 2y^2(x^2 - y^4) + h(x+y^2) + g(x-y^2),$$

där h och g är tillräckligt många gånger deriverbara funktioner.

6. (a) *Avgör för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:* *3 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+400} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^4+400}.$$

(b) *Avgör för var och en av följande generaliserade integraler om den är konvergent eller divergent:* *2 p*

$$\int_0^{\infty}\frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx \qquad \int_0^{\infty}\frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2-1)}dx.$$

(a) Vi kollar först med hjälp av jämförelsekriteriet II om den första serien är absolut konvergent. Eftersom

$$\frac{\frac{n}{n^2+400}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad \text{då } n \to \infty$$

har serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+400}$ samma konvergensbeteende som $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, dvs den är divergent. Vi kollar om serien är betingat konvergent med hjälp av Leibniz-kriteriet. Termerna $\frac{n}{n^2+400}$ går mot 0, men vi ser inte direkt om följden är monoton. Därför inför vi hjälpfunktionen

$$h(t) := \frac{t}{t^2+400}$$

och deriverar den med avseende på t. Då får vi $h'(t) = \ldots = \frac{400-t^2}{(t^2+400)^2}$. För $t > 20$ är alltså h, och därmed även följden i fråga, strängt avtagande. Detta är tillräckligt för att kunna använda Leibnitzkriteriet och vi får att serien är konvergent.

För den andra serien använder vi igen JFK II och då $\dfrac{\dfrac{n}{n^4+400}}{\dfrac{1}{n^3}} \to 1$ är serien absolut konvergent.

(b) Den första integralen är generaliserad i 0 och ∞. Vi delar därför upp integralen som

$$\int_0^1 \frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx + \int_1^\infty \frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx.$$

För den vänster integralen ser vi $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\dfrac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \arctan(e) > 0$ och den är därmed konvergent enligt jämförelsekriteriet II, ty integralen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ är konvergent. För den höger integralen uppskattar vi integranden för $x > 1$ med $0 \leq \dfrac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)} \leq \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x^2}$ och ser därmed att integralen är konvergent enligt JFK I, ty integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ är konvergent.

Den andre integralen är även generaliserad i $x = 1$. Där beter sig integranden som $\dfrac{1}{x-1}$ och därmed (enligt JFK II) är integralen divergent.

Svar: a) betingat konvergent, absolut konvergent   b) konvergent, divergent.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag
Analys A, 7.5 hp
den 5/3 2020

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *(a) Ange ett värde på konstanten c sådant att funktionen* *3 p*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{cases} x \ln(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ c & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

är kontinuerlig. I vilka punkter är funktionen differentierbar? Motivera dina svar!

(b) Avgör om funktionen *2 p*

$$h(x, y) = \frac{\ln(y + 1)}{x} \quad då \quad x > 0$$

har ett gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$ (med $x > 0$).

(a) Om gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existerar och vi sätter c lika med gränsvärdet, så är f kontinuerlig. Vi använder polära koordinater och betraktar

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \ldots = 2 \cos \varphi \cdot r \ln r,$$

som går mot 0 då $(x, y) \to (0, 0)$, ty den första faktorn är begränsad och den andra faktorn $r \ln r \to 0$, då $r \to 0$. Alltså är $c = 0$.

Funktionen f är i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en sammansättning av differentierbara funktioner och därmed själv differentierbar där. I origo måste vi undersöka närmare. Men vi ser att f inte är partiellt deriverbar med avseende på x i origo, ty

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \ln h^2$$

existerar inte. Därmed kan f inte vara differentierbar i origo.

(b) Vi betraktar $h(x, x) = \frac{\ln x+1}{x} \to 1$ då $x \to 0$, men $h(x, 0) = 0$. Därmed existerar gränsvärdet inte.

Svar: a) $c = 0$, och f är differentierbar i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ b) nej, gränsvärdet existerar inte.

2. *Betrakta funktionen $G(x, y) = xy\, e^{x^2 - y^2}$.* *5 p*

(a) Undersök om funktionen G antar största och/eller minsta värde i mängden

$$A = \{(x, y) : |x - y| \leq 1\}$$

och bestäm dessa extremvärden i förekommande fall.

(b) Vilka värden antar funktionen G i mängden

$$B = \{(x, y) : |x - y| < 1\}?$$

Vi konstaterar först att mängden A är en sluten, men obegränsad remsa kring första medianen, och B är dess inre. Ingen av mängderna är kompakt. Vi noterar att $G(x, x) = x^2 \cdot e^0$ är obegränsad då $x \to \infty$, dvs G har inget största värde, varken i A eller B.

(a) Sen konstaterar vi att $G(x, y) \geq 0$ för (x, y) i första och tredje kvadranten, samt $G(x, y) \leq 0$ för (x, y) i andra och fjärde kvadranten. Eftersom skärningen av de sistnämnda med mängden A är begränsad vet vi att den kontinuerliga funktionen G antar ett minsta värde på den kompakta mängden $D := \{(x, y) \in A, x \cdot y \leq 0\}$. Detta värde måste vara negativt och därmed även minsta värde för G i A.

För att beräkna minsta värde betraktar vi först ev. stationära punkter i det inre av D. Redan den första ekvationen $G'_x(x,y) = ye^{x^2-y^2}(1+2x^2) = 0$ har dock inga lösningar som kan ligga i det inre, ty $y = 0$. Alltså fortsätter vi med randen av D. Längs koordinataxlarna försvinner funktionen och det återstår att undersöka G längs linjerna $(t, t-1)$ för $t \in [0,1]$ samt $(t, t+1)$ för $t \in [-1, 0]$. Av symmetriskäl räcker det dock att undersöka bara en av dessa, vi väljer den första, dvs

$$h(t) := G(t, t-1) = (t^2 - t)e^{2t-1} \qquad t \in [0,1].$$

Derivation ger $h'(t) = \ldots = (2t^2 - 1)e^{2t-1}$ som har bara ett relevant nollställen, nämligen $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Därmed får vi som minsta värde $h(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}-1}$.

(b) I (a) har vi sett att G antar sitt minsta värde $b := \frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}-1}$ på randen av mängden A (och endast där), dvs i en punkt som är en randpunkt till mängden B men som inte ligger i B. Därmed vet vi att $G(x,y) > b$ för $(x,y) \in B$, samt att G antar värden som är godtyckligt nära b. Dessutom har vi sett att G är uppåt obegränsad i B. Eftersom G är kontinuerlig och definitionsmängden B är bågvis sammanhängande har alltså G egenskap av mellanliggande värden och antar därmed alla värden i det öppna intervallet (b, ∞).

Svar: a) minsta värde $\frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}-1}$, största värde saknas b) G antar i B alla värden större än $\frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}-1}$.

3. *Betrakta funktionen $g(x,y) = (x+y)^3 + \beta(3x^2 + y^2)$ med parametern $\beta \in \mathbb{R}$.* *5 p*

   (a) Bestäm för varje värde på $\beta \neq 0$ alla stationära punkter till g och avgör deras karaktär.

   (b) Bestäm för $\beta = 0$ alla stationära punkter till g och avgör deras karaktär.

Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} (I) \quad g'_x &= 3(x+y)^2 + 6\beta x = 0 \\ (II) \quad g'_y &= 3(x+y)^2 + 2\beta y = 0. \end{aligned}$$

(a) I fall $\beta \neq 0$ leder subtraktion till $y = 3x$. Om man stoppar in det i den första ekvationen får man $6x(8x + \beta) = 0$. Dvs vi får två stationära punkter $(0,0)$ och $(-\frac{\beta}{8}, -\frac{3\beta}{8})$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$g''_{xx} = 6(x+y) + 6\beta \qquad g''_{xy} = g''_{yx} = 6(x+y) \qquad g''_{yy} = 6(x+y) + 2\beta.$$

I punkten $(0,0)$ är den kvadratiska formen $Q(h,k) = 6\beta h^2 + 2\beta k^2$. För $\beta > 0$ är den positivt definit och origo är därmed en lokal minimipunkt, medan för för $\beta < 0$ är den negativt definit och origo därmed en lokal maximipunkt.
För punkten $(-\frac{\beta}{8}, -\frac{3\beta}{8})$ är den kvadratiska formen $Q(h,k) = \ldots = 3\beta((h-k)^2 - 4\beta k^2$ som är indefinit för varje värde på $\beta \neq 0$ och därmed är punkten en sadelpunkt.

(b) I fall att $\beta = 0$ får vi en hel linje av stationära punkter, nämligen $(t, -t)$ för $t \in \mathbb{R}$. Alla andra derivator försvinner och därmed är varje kvadratisk form bara semidefinit och avgör inte punktens karaktär. Men vi kan observera att $g(t, -t) = 0$ medan $g(t+h, -t) = h^3$ antar både värden som är större och som är mindre än 0 (i varje omgivning av $h = 0$). Därmed är varje punkt på linjen en sadelpunkt.

Svar: (a) $(-\frac{\beta}{8}, -\frac{3\beta}{8})$ är alltid en saddelpunkt.
I fall $\beta > 0$ är origo en lokala minimipunkt och i fall $\beta < 0$ är origo en lokal maximipunkt.
(b) Varje punkt på linjen $y = -x$ är en sadelpunkt.

4. *Avgör om funktionen $f(x, y, z) = xyz$ har största och/eller minsta värde under bivillkoren*

$$x + y + z = 0 \quad \textit{och} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Bestäm dessa i så fall. *5 p*

Första bivillkoret beskriver ett plan i $\mathbb{R}^3$ och andra bivillkoret enhetsfären. Funktionens definitionsområde är alltså ett cirkel i rummet, och därmed kompakt. Eftersom f är kontinuerlig, så antas både största och minsta värde på denna mängd. Vi konstaterar att det inte finns singulära punkter (på ytorna som ges av bivillkoren) och använder metoden av Lagrangemultiplikatorer, dvs vi betraktar hjälpfunktionen

$$H(x, y, z; \lambda, \mu) := xyz + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Partiell derivering ger följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} yz + \lambda + 2x\mu &= 0 \\ xz + \lambda + 2y\mu &= 0 \\ xy + \lambda + 2y\mu &= 0 \end{aligned}$$

samt

$$x + y + z = 0 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Subtraktion av den första och andra ekvationen samt den andra och den tredje ger - efter lite omskrivning -

$$\begin{aligned} (y - x)(z - 2\mu) &= 0 \\ (z - y)(x - 2\mu) &= 0. \end{aligned}$$

Från den första ekvation har vi antingen $y = x$ eller $z = 2\mu$. Om vi stoppar in $y = x$ i bivillkoren får vi två intressanta punkter $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ (OBS den andra ekvationen är du uppfylld med lämplig μ men värdet på det är ej relevant för lösningen). I andra fallet $z = 2\mu$ ger den andra ekvationen antingen $z = y$ eller $z = 2\mu$, vilket betyder $x = z$. I dessa två fall ger insättning i bivillkoren 4 punkter till, nämligen $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ och $\left(\mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Om vi sätter in dessa i funktionen får vi att största värdet är $\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ och minsta värdet är $-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

5. Lös den partiella differentialekvationen 5 p

$$xF''_{xx} - 4x^3F''_{yy} - F'_x = 16x^3$$

för $x > 0$, till exempel med hjälp av de nya variablerna $s = x^2 - y$ och $t = x^2 + y$.

Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(s, t) := F(x, y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F''_x &= 2x\widetilde{F}'_s + 2x\widetilde{F}'_t \\ F''_{xx} &= 4x^2\widetilde{F}''_{ss} + 8x^2\widetilde{F}''_{st} + 4x^2\widetilde{F}''_{tt} + 2\widetilde{F}'_s + 2\widetilde{F}'_t \\ F''_{yy} &= \widetilde{F}''_{ss} - 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt}. \end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då

$$\widetilde{F}''_{st} = 1.$$

Integration leder till

$$\widetilde{F}(s, t) = st + \varphi(t) + \psi(s)$$

och därmed

$$F(x, y) = (x^2 - y)(x^2 + y) + \varphi(x^2 + y) + \psi(x^2 - y),$$

där φ och ψ är tillräckligt många gånger deriverbara funktioner.

6. *(a) Avgör för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:* *5 p*

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(-\frac{1}{6}\right)^n$

ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}(-1)^n$

(b) För vilka $x \in \mathbb{R}$ *är serien* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ *är konvergent, för vilka divergent?*

(a) i. Vi använder kvotkriteriet och får

$$\left| \frac{\binom{2(n+1)}{n+1} \left(-\frac{1}{6}\right)^{(n+1)}}{\binom{2n}{n} \left(-\frac{1}{6}\right)^n} \right| = \ldots = \frac{(2n+2)(2n+1)}{6(n+1)^2} \to \frac{2}{3} \qquad \text{då } n \to \infty.$$

Eftersom gränsvärdet $\frac{2}{3} < 1$ är serien absolut konvergent.

ii. Eftersom $\cos(n\pi) = (-1)^n$ så är serien lika med

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

dvs. den harmoniska serien, som är alltså divergent.

(b) Vi använder rotkriteriet och får

$$\sqrt[n]{|e^{-nx}|} = e^{-x}.$$

För $x < 0$ är $e^{-x} > 1$ och serien därmed divergent, för $x > 0$ är $e^{-x} < 1$ och serien därmed konvergent. I fallet $x = 0$ måste vi kolla direkt. Eftersom $e^{0 \cdot n} = 1$ inte går mot 0 då $n \to \infty$, så är serien inte konvergent.

Svar: (a) <u>i. konvergent, ii. divergent</u> (b) <u>För $x > 0$ är serien konvergent, för $x \leq 0$ är serien divergent.</u>

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag
Analys A, 7.5 hp
den 15/4 2020, kl 9.00-14.00
Inlämning via kurssidan senast kl 16.00

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

0. Låt parametern A vara lika med den näst sista siffran i ditt personnummer.

Lösningsförslaget skrivs med parametern, för att ha alla olika varianter med.

1. *(a) Undersök om gränsvärdet av* $\dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$ *existerar då* $x^2+y^2\to\infty$. *2 p*

   (b) Betrakta $h(x,y)=\arctan\dfrac{x^2}{y}$. *3 p*

   i. Undersök om gränsvärdet av $h(x,y)$ *existerar då* $(x,y)\to(0,0)$ *med* $y>0$.

   ii. Undersök om gränsvärdet av $h(x,y)$ *existerar då* $(x,y)\to(0,0)$ *med* $y>|x|$.

   iii. Ange en (icke-konstant) funktion $H(x,y)$ *sådan att gränsvärdet av produkten* $H(x,y)\cdot h(x,y)$ *existerar då* $(x,y)\to(0,0)$ *med* $y>0$.

(a) En möjlighet är användning av polära koordinater:

$$0\le\left|\frac{r^3(\cos^3 t+\sin^3 t)}{r^4(\cos^4 t+\sin^4 t)}\right|\le\frac{2}{r(\cos^4 t+\sin^4 t)}\le\frac{4}{r}.$$

Med hjälp av instängningsregeln kan vi då dra slutsatsen att $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty}\dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}=0$. Den sista olikheten ovan fås t.ex. genom omskrivningen

$$\cos^4 t+\sin^4 t=\cos^2 t(1-\sin^2 t)+\sin^2 t(1-\cos^2 t)=1-\frac{1}{2}\sin^2 2t\ge\frac{1}{2}.$$

(b) i. I övre halvplanet kan vi välja två olika vägar

$$h(0,y)=\arctan 0=0\quad \text{och } h(x,x^2)=\arctan\frac{x^2}{x^2}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

och därmed existerar gränsvärdet i området $y>0$ inte.
ii. Observera först att kurvan $y=x^2$ som används ovan inte ligger i området $y>|x|$. Nu kan vi däremot göra en uppskattning

$$0\le\frac{x^2}{y}<\frac{y^2}{y}=y$$

och ty arctan-funktionen är monoton får vi

$$0\le\arctan\frac{x^2}{y}<\arctan y.$$

Igen instängningsregeln ger att gränsvärdet i detta fall är 0.
(iii) Eftersom h är begränsad så duger t.ex. varje funktion H, sådan att $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}H(x,y)=0$, t.ex $H(x,y)=y$.

Svar: (a) $\underline{\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty}\dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}=0}$

(b) <u>i. gränsvärdet existerar inte, ii. gränsvärdet är 0, iii. t.ex. $H(x,y)=y$</u>.

2. *(a) Undersök om $G(x,y) = y\, e^{x^2-y^2}$ antar största och/eller minsta värde i mängden* *4 p*

$$D = \{(x,y) : y \geq |x| + A - 10\}.$$

OBS: Använd ditt värde av A som du har bestämt i fråga 0 ovan.

(b) Ange ett exempel på en begränsad, men icke-kompakt delmängd av $\mathbb{R}^2$. *1 p*

(a) Området består av alla punkter som ligger ovanför kurvan $y = |x| - \widetilde{A}$, där jag för enkelhets skull använder $\widetilde{A} := 10 - A$. Parametern $\widetilde{A}$ kan anta följande värden $1, 2, \ldots ..10$.

Vi konstaterar först att linjen $y = x$ ligger inom området och $G(t,t) = t$ är uppåt obegränsad, alltså antar G inte största värde.

Vi ser att $G \geq 0$ för alla punkter med $y \geq 0$ och $G \leq 0$ för $y \leq 0$. Eftersom

$$D_0 := \{(x,y) \in D, y \leq 0\}$$

är en sluten triangel och därmed kompakt, samt att G är kontinuerlig så antar G minsta värde på D_0 som också är minsta värdet på D.

(b) Om mängden är begränsad men inte kompakt, så får den inte vara sluten. T.ex. den öppna enhetscirkelskivan är en sådan mängd $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

3. *Betrakta funktionen $g(x,y) = x^4 + y^4 - \beta(x-y)^2$ med parametern $\beta \in \mathbb{R}$.*

(a) Bestäm för varje värde på β alla lokala minimipunkter till g. *4 p*

(b) Välj ett värde på β. *1 p*
Ange (för detta värde på β) en mängd M_1 sådan att g antar ett minsta värde på M_1 och ange en mängd M_2 sådan att g inte antar minsta värde på M_2.

(a) Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{array}{rlcl} (I) & g'_x & = & 4x^3 - 2\beta(x-y) = 0 \\ (II) & g'_y & = & 4y^3 + 2\beta(x-y) = 0. \end{array}$$

Addition av ekvationerna ger $4x^3 + 4y^3 = 0$, alltså $y = -x$. Från den första ekvationen får vi då efter lite omskrivning $x(x^2 - \beta) = 0$. Därmed har vi (för varje värde på β den stationära punkten $(0,0)$ samt för positiva β två till stationära punkter $(\pm\sqrt{\beta}, \mp\sqrt{\beta})$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$g''_{xx} = 12x^2 - 2\beta \qquad g''_{xy} = g''_{yx} = 2\beta \qquad g''_{yy} = 12y^2 - 2\beta.$$

För båda punkter $(\pm\sqrt{\beta}, \mp\sqrt{\beta})$ är den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \ldots = 10\beta\Big((h + \frac{1}{5}k)^2 + (1 - \frac{1}{25})k^2\Big)$$

positivt definit, ty $\beta > 0$! Båda punkter är alltså lokala minimipunkter.

För punkten $(0,0)$ är den kvadratiska formen $Q(h,k) = \ldots = -2\beta(h-k)^2$ semidefinit och avgör därmed inte karaktären.

Vi tittar igen på $g(x,y) = x^4 + y^4 - \beta(x-y)^2$ och observerar att för $\beta < 0$ gäller $g(x,y) \geq 0 = g(0,0)$ och därmed är $(0,0)$ i detta fall en (även global) minimipunkt. För $\beta > 0$ däremot har vi $g(t,t) = 2t^4 \geq 0$ medan $g(t,0) = t^2(-\beta + t^2)$ antar negativa värden för tillräckligt små t. I detta fall är $(0,0)$ alltså en sadelpunkt. Sammanfattningsvis har vi fått följande:

$\underline{\beta > 0}$: $(\pm\sqrt{\beta}, \mp\sqrt{\beta})$ är lokala minimipunkter och $(0,0)$ är en sadelpunkt.
$\underline{\beta \leq 0}$: den enda stationära punkten $(0,0)$ är en minimipunkt.

(b) Oavsett värdet på β kan mängden M_1 väljas som en godtycklig kompakt mängd ty g är kontinuerlig, t.ex. den slutna enhetscirkelskivan $M_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ett exempel på M_2 får vi t.ex. genom att välja något $\beta \leq 0$ och $M_2 = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$, ty vi har sett att $g(x,y) > 0$ i denna mängd men eftersom $g(0,0) = 0$ och g är kontinuerlig, så antar g i M_2 värden godtyckligt nära 0.

Svar: (a) <u>För $\beta > 0$ är $(\pm\sqrt{\beta}, \mp\sqrt{\beta})$ är lokala maximipunkter, för $b \leq 0$ är endast $(0,0)$ en minimipunkt</u>

(b) <u>t.ex. $M_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ och $M_2 = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$.</u>

4. *(a) Avgör om funktionen* $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ *har största och/eller minsta värde under bivillkoret*

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (A+2)z^2 = 200$$

och bestäm dessa i så fall. *4 p*

OBS1: Använd igen ditt värde för A!

OBS2: Det är ok att svara med "största värdet av dessa tal" utan av numeriskt avgöra vilket som är störst!

(b) Betrakta kurvan $x^2 - y^2 = 4$ *(som en delmängd av* $\mathbb{R}^2$*). Ange en funktion, som antar minsta värde på denna mängd men inte största värde.* *1 p*

(a) Bivillkoret beskriver i alla fall en ellipsoid, dvs en kompakt mängd. Funktionen f är inte kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^3$ men kontinuerlig i alla punkter som uppfyller bivillkoret (ty origo inte uppfyller det) och därmed har f både största och minsta värde under bivillkoret.

Vi konstaterar att det inte finns singulära punkter (på ellipsoiden) och använder metoden av Lagrangemultiplikatorer, dvs vi betraktar hjälpfunktionen

$$H(x,y;\lambda) := \frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \lambda\big((x-1)^2 + (y+1)^2 + (A+2)z^2 - 200\big).$$

Partiell derivering ger följande ekvationssystem

$$\begin{aligned}
-\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} + 2\lambda(x-1) &= 0 \\
-\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} + 2\lambda(y+1) &= 0 \\
-\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} + 2\lambda(A+2)z &= 0
\end{aligned}$$

samt

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (A+2)z^2 - 200 = 0.$$

Elimination av λ i den första och andra ekvationen samt i den den andra och den tredje ger - efter lite omskrivning -

$$x = -y \qquad \text{samt} \qquad z\left(y - \frac{1}{A+1}\right) = 0.$$

I den andra ekvationen får vi två fall. Om $z = 0$ så får vi tillsammans med $x = -y$ från bivillkoret punkterna $(11, -11, 0)$ och $(-9, 9, 0)$.

I det andra fallet, nämligen $y = \frac{1}{A+1}$ (OBS $A+1 \neq 0$), så ger bivillkoret $z = \pm\sqrt{\dfrac{200 - 2\frac{(A+2)^2}{(A+1)^2}}{A+2}}$.

Största och minsta värdet finns därför bland funktionsvärdena i dessa punkter, dvs

$$f(11,-11,0) = \frac{1}{242}, \qquad f(-9,9,0) = \frac{1}{162},$$

och

$$f\left(-\frac{1}{A+1}, \frac{1}{A+1}, \pm\sqrt{\frac{200 - 2\frac{(A+2)^2}{(A+1)^2}}{A+2}}\right) = \frac{1}{\frac{2}{(A+1)^2} + \frac{200}{A+2} - \frac{2(A+2)}{(A+1)^2}}.$$

Anmärkning: I alla fall är minsta värdet $\frac{1}{242}$ och största värdet det som ges av punkterna med $z \neq 0$, men det krävs inte i lösningen.

(b) Kurvan är en hyperbel t.ex. funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2$ antar minsta värdet men ej största värde. Den antar minsta värdet eftersom snittet av hyperbeln med en sluten cirkelskiva med radie t.ex. 10 är en kompakt mängd och värdet av den kontinuerliga funktionen f utanför denna mängd är säkert större än i mängden. Därför antar f ett minsta värde i cirkelskivan som även är minsta värdet på hela hyperbeln. Däremot är hyperbeln en obegränsad mängd och därför även f (som ju ange avståndet till origo i kvadrat) obegränsad på hyperbeln.

Ett annat enkelt exempel är $f(x,y) = |x|$. Tydligen är x koordinaten för punkter på hyperbeln antingen större än 2 eller mindre än -2, alltså antar f alla värden större eller lika med 2.

5. *Betrakta differentialekvationen* *5 p*

$$\frac{1}{16x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{12xy^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{36y^4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{16x^3}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{18y^5}\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

för $x > 0$.

(a) *Visa att differentialekvationen i de nya variablerna $s = x^2 + y^3$ och $t = x^2 - y^3$ blir*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = f.$$

(b) *Lös den partiella differentialekvationen.*

(a) Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(s,t) := F(x,y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned}
F''_x &= \widetilde{F}'_s 2x + \widetilde{F}'_t 2x \\
F''_{xx} &= \ldots = 4x^2(\widetilde{F}''_{ss} + 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt}) + 2\widetilde{F}'_s + 2\widetilde{F}'_t \\
F''_{xy} &= \ldots = 6xy^2(\widetilde{F}''_{ss} - \widetilde{F}''_{tt}) \\
F''_{yy} &= \ldots = 9y^2(\widetilde{F}''_{ss} - 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt}) + 6y\widetilde{F}'_s - 6y\widetilde{F}'_t.
\end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då verkligen

$$\widetilde{F}''_{ss} = F.$$

(b) Lösningen blir då $\widetilde{F}(s,t) = A(t)e^s + B(t)e^{-s}$ och därmed

$$F(x,y) = A(x^2 - y^3)e^{x^2+y^3} + B(x^2 - y^3)e^{-(x^2+y^3)}$$

med tillräckligt många gånger deriverbara funktioner A och B.

6. (a) *Undersök om serien* *2 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{2n} \left(-\frac{1}{9}\right)^n$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent.

(b) *För vilka $x \in \mathbb{R}$ är serien $\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n$ konvergent.* *1 p*

(c) *Undersök om den generaliserade integralen* *2 p*

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}\,dx$$

är konvergent.

(a) Vi använder kvotkriteriet och får

$$\left| \frac{\binom{3(n+1)}{2(n+1)} \left(-\frac{1}{9}\right)^{(n+1)}}{\binom{3n}{2n} \left(-\frac{1}{9}\right)^n} \right| = \ldots = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \cdot \frac{1}{9} \to \frac{3}{4} \quad \text{då } n \to \infty.$$

Eftersom gränsvärdet $\frac{3}{4} < 1$ är serien absolut konvergent.

(b) För att använda rotkriteriet beräknar vi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n(x-1)^n|} = |x-1|$. Därmed får vi att serien är absolut konvergent för $|x-1| < 1$ dvs för $0 < x < 2$ och divergent för $|x-1| > 1$ dvs för $x < 0$ eller $x > 2$. I gränspunkterna $|x-1| = 1$ avgör rotkriteriet inte och vi kollar serien direkt, nämligen $\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n$ och $\sum_{n=0}^{\infty} n(1)^n$. I båda fall går termerna inte mot 0, alltså är serierna divergenta.

(c) Vi konstaterar först att integralen är generaliserad både i $x = 0$ och vid ∞ och delar därför upp integralen t.ex. som

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}\,dx = \int_0^7 \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}\,dx + \int_7^\infty \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}\,dx.$$

För den första integralen använder vi JFKII och beräknar

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}}{x^{\frac{1}{4}}} = \ldots = \frac{1}{3},$$

och därmed har den första integralen samma konvergensbeteende som $\int_0^7 \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\,dx$, alltså konvergent. För den andra integralen kan vi t.ex. använda JFKI genom att för $x > 7$ uppskatta $\frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)} \leq \frac{\frac{\pi}{4}}{x^2}$. Eftersom $\int_7^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent är även den andra integralen konvergent.

Svar: (a) abolut konvergent (b) konvergent för $0 < x < 1$. (c) konvergent.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag
Analys A, 7.5 hp
den 19/8 2020, kl 9.00-14.00

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

0. *Låt parametern a vara lika med numret på din födelsemånad (t.ex. om du är född i september så är $a = 9$ för dig)*

   Lösningsförslaget skrivs med parametern, för att ha alla olika varianter med.

1. *Undersök följande gränsvärden och beräkna dem i förekommande fall:* *5 p*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}} \qquad \lim_{x^2+y^2\to\infty} e^{-(x^2+4xy+3y^2)}.$$

Kommentar: den första funktionen är alltså $e^{\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}} = \exp\left(\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}\right)$.

Vi börjar med att konstatera att $x^2 + 2xy + 2y^2 \to 0$ då $(x, y) \to (0, 0)$. För att avgöra hur $\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}$ beter sig, måste vi avgöra tecknet hos $x^2 + 2xy + 2y^2$. En möjlighet är kvadratkomplettering $x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2 \geq 0$. Alltså får vi $\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2} \to -\infty$ då $(x, y) \to (0, 0)$ och därmed $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}} = 0$.

I det andra fallet ser vi genom kvadratkomplettering att $-(x^2 + 4xy + 3y^2)$ är en indefinit kvadratisk form och därmed existerar gränsvärdet inte. Vi kan också kolla direkt längs olika linjer

$$\begin{aligned}
(x, y) = (t, 0) &\quad \text{ger} \quad e^{-(x^2+4xy+3y^2)} = e^{-t^2} \to 0 \quad \text{då } t \to \infty,\\
(x, y) = (-2t, t) &\quad \text{ger} \quad e^{-(x^2+4xy+3y^2)} = e^{t^2} \to \infty \quad \text{då } t \to \infty,\\
(x, y) = (t, -t) &\quad \text{ger} \quad e^{-(x^2+4xy+3y^2)} = e^{0} \to 1 \quad \text{då } t \to \infty,
\end{aligned}$$

alltså existerar gränsvärdet $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} e^{-(x^2+4xy+3y^2)}$ inte.

Svar: $\underline{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}} = 0}$ och $\underline{\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} e^{-(x^2+4xy+3y^2)} \text{ finns inte.}}$

2. *Betrakta funktionen $G(x,y,z) = xy - xz - yz + axyz$, där parametern a har värdet från fråga 0.*

   (a) *Bestäm alla stationära punkter till G samt deras karaktär.* *4 p*

   (b) *Avgör om G antar största och/eller minsta värde i mängden* *1 p*

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

(a) Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{array}{rrcl} (I) & G'_x & = & y - z + ayz = 0 \\ (II) & G'_y & = & x - z + axz = 0 \\ (III) & G'_z & = & -x - y + axy = 0. \end{array}$$

Vi försöka lösa ekvationssystemet genom att eliminiera de icke-linjära termerna, t.ex. genom $x \cdot (i) - y \cdot (II) = 0$. Det ger oss ekvationen

$$z(-x + y) = 0.$$

Alltså finns det två fall: $z = 0$ eller $y = x$. Vi betrakta först $z = 0$, då blir ekvationssystemet:

$$\begin{array}{rrcl} (I) & G'_x & = & y = 0 \\ (II) & G'_y & = & x = 0 \\ (III) & G'_z & = & -x - y + axy = 0 \end{array}$$

och vi har fått en stationär punkt $(0,0,0)$. I det andra fallet, $y = x$, blir ekvationssystemet

$$\begin{array}{rrcl} (I) & G'_x & = & x - z + axz = 0 \\ (II) & G'_y & = & x - z + axz = 0 \\ (III) & G'_z & = & -2x + ax^2 = 0. \end{array}$$

Ekvation (III) har två lösningar, $x = 0$ som leder till samma stationär punkt, som vi redan har hittat, eller $x = \frac{2}{a}$. Ur ekvation (I) får vi $z = -\frac{2}{a}$, dvs stationära punkten $(\frac{2}{a}, \frac{2}{a}, -\frac{2}{a})$. OBS: $a \neq 0$, ty det är numret på en måndad.

Vi har alltså fått två stationära punkter $(0,0,0)$ och $(\frac{2}{a}, \frac{2}{a}, -\frac{2}{a})$. För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$G''_{xx} = G''_{yy} = G''_{zz} = 0$$

$$G''_{xy} = G''_{yx} = 1 + az \qquad G''_{xz} = G''_{zx} = -1 + ay \qquad G''_{yz} = G''_{zy} = -1 + ax$$

För $(0,0,0)$ är den kvadratiska formen $Q(h,k,\ell) = 2hk - 2h\ell - 2k\ell$. Den är indefinit, ty $Q(1,1,0) = 2 > 0$ medan $Q(1,-1,0) = -2 < 0$ och därmed är $(0,0,0)$ en sadelpunkt. För den andra stationära punkten är den kvadratiska formen $Q(h,k,\ell) = -2hk + 2h\ell + 2k\ell$ och därmed också indefinit.

(b) Funktionen G är kontinuerlig och mängden K kompakt, alltså antar G i K både största och minsta värde.

Svar: (a) Stationära punkterna är $(0,0,0)$ och $(\frac{2}{a}, \frac{2}{a}, -\frac{2}{a})$ och dessa är sadelpunkter.

(b) Största och minsta värde antas.

3. Låt $h(x,y) = \dfrac{e^{-(x+y)}}{1+x^2+y^2}$.

(a) Betrakta mängden *4 p*

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \text{ och } y \geq 0\}.$$

i. Avgör om funktionen h antar största och/eller minsta värde i området D_1 och bestäm dessa i förekommande fall.

ii. Ange värdemängden av h i området D_1, dvs ange mängden av alla värden som h antar i D_1, och motivera hur du har kommit fram till denna mängd.

(b) Avgör om funktionen h antar största och/eller minsta värde i området *1 p*

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}.$$

(a) i. Vi konstatera att mängden D_1 är den slutna första kvadranten, dvs en sluten men ej begränsad mängd. Funktionen h är kontinuerlig i hela sin definitionsmängd.

Minsta värde: Vi ser direkt att $h(x,y) > 0$ för alla (x,y). Men vi har också att t.ex. $h(x,0) = \frac{e^{-x}}{1+x^2} \to 0$ då $x \to \infty$, dvs att det antas värden godtyckligt nära 0. Därmed kan det inte finnas ett minsta värde.

Största värde: Vi observera att, eftersom $x \geq 0$ och $y \geq 0$ så gäller

$$0 < h(x,y) \leq \frac{e^0}{1+x^2+y^2}.$$

I och med att $\frac{1}{1+x^2+y^2} \to 0$ då $x^2+y^2 \to \infty$ följer enligt instängningsregeln att även

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} h(x,y) = 0.$$

Det betyder att för varje $\epsilon > 0$ kan vi kan hitta ett tal R sådan att $h(x,y) < \epsilon$ för alla (x,y) sådana att $x^2+y^2 > R^2$. Ett lämpligt epsilon är då mindre än funktionsvärdena i alla stationära punkter (det finns bara ändligt många). Om vi nu betraktar den kompakta mängden $K := \{(x,y) \in D_1 : x^2+y^2 < R^2\}$ så vet vi att å ena sidan så är h utanför K mindre än ϵ och å andra sidan vet vi att den kontinuerliga funktionen h antar ett största värde i K, dock inte på randen av cirkelbågen. Eftersom ϵ är mindre än detta största värde (enligt hur vi har valt det) är därmed största värdet i K även största värde i D_1.

För att bestämma största värdet börjar vi med att bestämma stationära punkterna:

$$\begin{aligned} h'_x &= \frac{e^{-(x+y)}[-(1+x^2+y^2)-2x]}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ h'_y &= \frac{e^{-(x+y)}[-(1+x^2+y^2)-2y]}{(1+x^2+y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Subtraktion av dessa två ekvationer leder till $x = y$. Om man stoppar det in i t.ex. den första ekvationen, så får man (efter lite omskrivning!) $2x^2+2x+1$, en ekvation som saknar (reella) lösningar. Alltså finns inga stationära punkter i det inre av K.

Randen av K består av tre delar: cirkelbågen, en del av x-axeln och en del av y-axeln. Enligt vår argumentation ovan kan största värdet inte antas på cirkelbågen och det återstår bara att kolla sträckorna $(0,t)$ och $(t,0)$, i båda fall för $t \in [0,R]$. Vi betrakta hjälpfunktionen

$$\widetilde{h}(t) := h(0,t) = h(t,0) = \frac{e^-t}{1+t^2} \quad \text{då } t \in [0,R].$$

Vi får $\widetilde{h}'(t) = \ldots = -e^{-t}\frac{(t+1)^2}{(1+t^2)^2} \geq 0$ och därmed inga lokala extrempunkter i det inre av sträckan. Därmed antas största värdet i hörnpunkten: $h(0,0) = 1$.

ii. Vi har fått att största värdet är 1 och minsta värdet saknas, men vi vet att alla funktionsvärden är större än 0 och att det antas värden godtyckligt nära 0. Funktionen h är kontinuerlig och har därmed egenskapen om mellanliggande värden. Därmed är värdemängden det hela halvöppna intervallet $(0, 1]$.

(b) Minsta värdet saknas pga samma argument som i (a). Men nu saknas även största värdet, ty hela x-axeln ligger i defininitionsmängden och vi har $h(x, 0) = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$ växer över alla gränser då $x \to -\infty$.

Svar: (a) i. Minsta värde saknas, största värde 1. ii. intervallet $(0, 1]$
(b) båda största och minsta värdet saknas.

4. *Undersök om funktionen $f(x, y) = x + y$ antar största och/eller minsta värde på kurvan $x^2 + xy + 2y^2 = 7$ med $y \geq 0$ och bestäm dessa i så fall.* 5 p

(a) Kurvan är den delen av andragradskurvan $x^2 + xy + 2y^2 = 7$ som ligger i slutna första och andra kvadranten av planet. För att kolla vilken sorts kurva det handlar om använder vi kvadratkomplettering

$$x^2 + xy + 2y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{7}{4}y^2.$$

Andragradskurvan $(x+\frac{y}{2})^2+\frac{7}{4}y^2 = 7$ är alltså begränsad och därmed en ellips. Den delen som vi är intresserade av är även sluten, alltså kompakt. Eftersom funktionen f är kontinuerlig antar den alltså både största och minsta värde på kurvan. För att bestämma dessa börjar vi med att kolla nödvändiga villkor för inre punkter:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x + y \\ 1 & x + 4y \end{vmatrix} = 0.$$

Detta ger $x = 3y$ och genom att stoppa denna relation i bivillkoret får vi (efter lite räkning) ekvationen $y^2 = \frac{1}{2}$ och därmed endast $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ty den andra lösningen $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ inte uppfyller bivillkoret $y \geq 0$). Motsvarande x-koordinat är $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ och funktionsvärdet i denna punkt blir $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}) = \ldots = 2\sqrt{2}$. Kurvans randpunkter hittar vi genom att sätta $y = 0$ och får då två punkter $(\pm\sqrt{7}, 0)$ med motsvarande funktionsvärden $\pm\sqrt{7}$. Största och minsta värde finns nu bland följande värden: $\pm\sqrt{7}, 2\sqrt{2}$. Därmed är

Svar: (a) största värdet $2\sqrt{2}$ och minsta värdet $-\sqrt{7}$.

5. *Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen*

$$(x - y)(F''_{xx} + F''_{yy} - 2F''_{xy}) - 2(F'_x - F'_y) = (x - y)^3$$

till exempel genom variabelbytet $u = xy$ och $v = x + y$. 5 p

(a) Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(u, v) := F(x, y)$. Vi får

$$u'_x = y \quad u'_y = x \quad \text{ och } v'_x = v'_y = 1.$$

Användning av kedjeregeln för partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F'_x &= \widetilde{F}'_u y + \widetilde{F}'_v \\ F'_y &= \widetilde{F}'_u x + \widetilde{F}'_v. \end{aligned}$$

För andraderivatorna behövs både kedjeregeln och produktregeln, exempelvis:

$$F''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} F'_x = \frac{\partial}{\partial y}(\widetilde{F}'_u y + \widetilde{F}'_v) = \frac{\partial \widetilde{F}'_u}{\partial y} \cdot y + \widetilde{F}'_u + \frac{\partial \widetilde{F}'_v}{\partial y} = \left(\widetilde{F}''_{uu} u'_y + \widetilde{F}''_{uv} v'_y\right) \cdot y + \widetilde{F}'_u + \widetilde{F}''_{vu} u'_y + \widetilde{F}''_{vv} v'_y$$

och därmed

$$\begin{aligned} F''_{xx} &= \ldots = \widetilde{F}''_{uu} y^2 + 2\widetilde{F}''_{uv} y + \widetilde{F}''_{vv} \\ F''_{xy} &= \ldots = \widetilde{F}''_{uu} xy + \widetilde{F}''_{uv}(x + y) + \widetilde{F}''_{vv} + \widetilde{F}'_u \\ F''_{yy} &= \ldots = \widetilde{F}''_{uu} x^2 + 2\widetilde{F}''_{uv} x + \widetilde{F}''_{vv}. \end{aligned}$$

Insättning i differentialekvationen leder till den nya ekvationen

$$\widetilde{F}''_{uu} = 1.$$

Att integrera två gånger ger $\widetilde{F}(u,v) = \frac{u^2}{2} + u \cdot \varphi(v) + \psi(v)$, där φ och ψ är tillräckligt många gånger deriverbara funktioner. Därmed får vi $\underline{F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + xy \cdot \varphi(x+y) + \psi(x+y)}$.

6. *(a) Visa att serien* *2 p*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\ln(k^2+1) - 2\ln k\big)$$

är konvergent.

(b) Undersök om serien *1 p*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\ln(k+1) - \ln k\big)$$

är konvergent.

(c) Undersök om den generaliserade integralen *2 p*

$$\int_0^{\infty} \big(\ln(x^2+1) - 2\ln x\big)dx$$

är konvergent. Motivera ordentligt, dvs om du använder en sats så redogör för vad satsen säger och hur du kollar förutsättningarna.

(a) Termerna i serien kan skrivas om till $\ln(k^2+1) - 2\ln k = \ldots = \ln(1+\frac{1}{k^2})$ och vi kan använda t.ex. JFK II och jämför med $\frac{1}{k^2}$. Eftersom

$$\frac{\ln(k^2+1) - 2\ln k}{\frac{1}{k^2}} = \frac{\ln(1+\frac{1}{k^2})}{\frac{1}{k^2}} \to 1 \quad \text{då } k \to \infty$$

är serien konvergent, ty serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent. OBS $\ln(k^2+1) - 2\ln k > 0$.

(b) Samma typ av omskrivning och jämförelse med $\frac{1}{k}$ visar att serien är divergent.

(c) Integralen är generaliserad i $x = 0$ och eftersom integrationsintervallet är obegränsat. Därför delar vi upp integralen, t.ex. som

$$\int_0^1 \big(\ln(x^2+1) - 2\ln x\big)dx + \int_1^{\infty} \big(\ln(x^2+1) - 2\ln x\big)dx.$$

I den första integralen är bara integrandens andra termen obegränsad, men explicit räkning (ej gjort här!) visar att $\int_0^1 \ln x dx$ är konvergent och därmed är hela första integralen konvergent.

För den andra integralen kan vi antingen använda JFKII för integraler på liknande sätt som i (a) eller så använder vi Cauchys integralkriteriet, då vi vet att serien i (a) är konvergent. Då måste vi alltså kolla att funktionen $f(x) := \ln(x^2+1) - 2\ln x$ är icke-negativ och avtagande. Vi ser direkt $f(x) = \ldots = \ln(1+\frac{1}{x^2}) > 0$ och eftersom $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \big(-\frac{2}{x^3}\big) < 0$ för $x > 1$ är f avtagande.

Därmed har den andra integralen samma konvergensbeteende som serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$, vilket är den konvergenta serien från (a).

Svar: (a) $\underline{\text{konvergent}}$ (b) $\underline{\text{divergent}}$ (c) $\underline{\text{konvergent.}}$

Lösningar till tentamen

Analys A,
20-10-14.

1.a) Detta är en så kallad teleskoperande serie. Partialsumman s_N kan förenklas enligt följande:

$$s_N = \sum_{k=1}^{\infty} (\ln(k+1) - \ln k) =$$

$$\ln 2 + (\ln(3) - \ln 2) + \ldots + (\ln(N+1) - \ln N)$$

$$= \ln(N+1) \to \infty \quad \text{när} \quad N \to \infty.$$

Serien är alltså divergent. (Det går även att visa detta genom att använda jämförelsekriterium II och jämföra med serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.)

b) Integralen är generaliserad i både 0 och ∞. Vi delar upp integralen i två delar,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}},$$

och undersöker konvergensen hos var och en av delarna. Eftersom

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{x}{x+x^4}} = 1,$$

så följer att

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \text{ konvergent } \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ konvergent},$$

enligt jämförelsekriterium II. Eftersom den högra integralen är konvergent (med värdet 2) så är även den vänstra det.

För den andra delen kan vi också använda jämförelsekriterium II, fast vi nu jämför med integranden x^{-2} i stället. Eftersom

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+x^4}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to \infty} \sqrt{\frac{x^4}{x+x^4}} = 1,$$

så följer att

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \text{ konvergent } \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \text{ konvergent},$$

enligt jämförelsekriterium II. Eftersom den högra integralen är konvergent (med värdet 1) så är även den vänstra det. (Det går även bra att använda jämförelsekriterium I.)

Sammanfattningsvis konvergerar båda delarna och den ursprungliga integralen är alltså konvergent.

2.a) Vi undersöker gränsvärdena längs x-axeln och längs linjen $x = y$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2+0+0)}{\ln(1+t^2+0)} = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2+t^2+t^2)}{\ln(1+t^2+t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2+O(t^4)}{2t^2+O(t^4)} = \frac{3}{2},$$

där vi har MacLaurin-utvecklat $\ln(1+u) = u + O(u^2)$. Då vi får olika gränsvärden längs de båda linjerna saknar funktionen gränsvärde i origo.

b) Vi observerar först olikheterna

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) \le x^2+xy+y^2 \le 2(x^2+y^2),$$

som vidare ger att

$$\frac{1}{2}(1+x^2+y^2) \le 1+x^2+xy+y^2 \le 2(1+x^2+y^2),$$

och till sist

$$\frac{\ln(\frac{1}{2}(1+x^2+y^2))}{\ln(1+x^2+y^2)} \le \frac{\ln(1+x^2+xy+y^2)}{\ln(1+x^2+y^2)} \le \frac{\ln(2(1+x^2+y^2))}{\ln(1+x^2+y^2)}.$$

Med logaritmlagarna kan vi beräkna gränsvärdena av ytterleden:

$$\frac{\ln(\frac{1}{2}(1+x^2+y^2))}{\ln(1+x^2+y^2)} = -\frac{\ln 2}{\ln(1+x^2+y^2)} + 1 \to 1,$$

$$\frac{\ln(2(1+x^2+y^2))}{\ln(1+x^2+y^2)} = \frac{\ln 2}{\ln(1+x^2+y^2)} + 1 \to 1.$$

Enligt instängningslagen följer att också det ursprungliga gränsvärdet blir 1.

3. Vi räknar med kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

På operatorform kan vi skriva

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}.$$

Andraderivatorna kan nu skrivas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Insättning i den ursprungliga ekvationen ger efter förenklingar (och med observationen att $H.L. = (x-y)^2 = u^2$):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = u^2.$$

Vi integrerar två gånger m a p v:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = u^2 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = u^2 v + \phi(u) \Leftrightarrow f = \frac{u^2 v^2}{2} + \phi(u)v + \psi(u),$$

där ϕ och ψ är två stycken två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner. Återgång till de ursprungliga variablerna ger slutligen

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^2 y^2}{2} + \phi(x-y)y + \psi(x-y).$$

4.a) Vi observerar först att $\lim_{x\to\infty} f(x,0,0) = \lim_{x\to\infty} x^4 = \infty$, vilket visar att $\sup f = \infty$ och att maximum inte kan antas. För att visa att minimum faktiskt antas räcker det att visa att $\lim_{x^2+y^2+z^2\to\infty} f(x,y,z) = \infty$. Vi gör detta genom att konstruera en funktion $g(r)$ sådan att $g(r) \to \infty$ då $r \to \infty$ och $f(x,y,z) \geq g(r)$, där $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Observera först att i varje punkt (x,y,z) måste gälla att någon av kvadraterna x^2, y^2, z^2 är större än $\frac{1}{3}r^2$. Det följer att någon av termerna x^4, y^4, z^4 måste vara större än $(\frac{1}{3}r^2)^2 = \frac{1}{9}r^4$, vilket ger olikheten $x^4+y^4+z^4 \geq \frac{1}{9}r^4$. Å andra sidan vet vi att $|x| \leq r, |y| \leq r, |z| \leq r$, vilket leder till att $|xy+yz+zx| \leq |x||y|+|y||z|+|z||x| \leq 3r^2$. Den omvända triangelolikheten ger nu att

$$x^4+y^4+z^4-2(xy+yz+zx) \geq \frac{1}{9}r^4 - 6r^2 \to \infty,$$

vilket visar påståendet.

b) Vi beräknar de stationära punkterna:

$$\begin{cases} f'_x &= 4x^3 - 2y - 2z = 0, \\ f'_y &= 4y^3 - 2x - 2z = 0, \\ f'_z &= 4z^3 - 2y - 2x = 0. \end{cases}$$

Eftersom det var givet att $x = y = z = t$ så reduceras alla tre ekvationerna till $4t^3 - 4t = 0$ med de tre rötterna $t = -1, 0, 1$, vilket ger de tre stationära punkterna $(-1,-1,-1)$, $(0,0,0)$ och $(1,1,1)$.

För att bestämma karaktären av punkten $(0,0,0)$ kan vi beräkna andraderivatorna: $f''_{xx}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = f''_{zz}(0,0) = 0$ och $f''_{xy}(0,0) = f''_{yz}(0,0) = f''_{zx}(0,0) = -2$. Detta ger den kvadratiska formen $Q(h,k,l) = -4hk - 4kl - 4lh$ som är indefinit (t ex gäller ju att $Q(1,1,0) = -4$ medan $Q(-1,1,0) = +4$). $(0,0,0)$ är alltså en sadelpunkt.

Vi kan göra på samma sätt med de två övriga stationära punkterna, men det är enklare att observera att vi från a) vet att funktionen antar globalt min, och eftersom den är partiellt deriverbar måste min-värdet antas i någon av de stationära punkterna. Det kan inte vara i $(0,0,0)$ som ju är en sadelpunkt, och eftersom $f(-1,-1,-1) = f(1,1,1) = -3$ så måste båda de övriga vara globala, alltså speciellt lokala, minpunkter. (För den som valt den andra metoden blir den kvadratiska formen i båda minpunkterna för övrigt lika med $Q = 12h^2 + 12k^2 + 12l^2 - 4hk - 4kl - 4lh = 12\left(h - \frac{k}{6} - \frac{l}{6}\right)^2 + \frac{35}{3}\left(k - \frac{l}{5}\right)^2 + \frac{56l^2}{5}$ som är positivt definit.)

5. Bivillkoret ger en kompakt mängd: den är sluten och då $\lim_{x^2+y^2\to\infty}(x^4 - xy + y^4) \geq \lim_{x^2+y^2\to\infty}(x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + y^4) = \infty$, så måste varje nivåkurva vara begränsad, speciellt gäller detta för kurvan $x^4 - xy + y^4 = 1$. Enligt satsen om extremvärden måste största och minsta värde antas.

För att hitta extrempunkterna beräknar vi $\nabla f = (1,1)$ och $\nabla g = (4x^3 - y, 4y^3 - x)$ där $g(x,y) = x^4 - xy + y^4 - 1$. Vi får

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4x^3 - y & 4y^3 - x \end{vmatrix} = (4y^3 - x) - (4x^3 - y)$$

$= 4(y^3 - x^3) + (y - x) = (y-x)(4(x^2+xy+y^2)+1)$. Eftersom $x^2+xy+y^2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2+(x+y)^2) \geq 0$ så kan den andra faktorn aldrig vara 0. Det följer att de enda möjliga extrempunkterna måste uppfylla $x = y$. Insättning i bivillkoret ger ekvationen $2x^4 - x^2 = 1$. Med $t = x^2$ får vi $2t^2 - t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\frac{1}{2}$. Eftersom $t = x^2 \geq 0$ återstår bara möjligheten $t = x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, vilket ger punkterna $(1,1)$ och $(-1,-1)$. Vi ser nu att $f(1,1) = 1+1 = 2$ måste vara det största värdet och att $f(-1,-1) = -1-1 = -2$ måste vara det minsta värdet.

6 & 7. För teorifrågorna hänvisas till kurslitteraturen.

/Martin Tamm/201014/

Lösningar till tentamen

Analys A,
20-11-18.

1.a) I detta fall gäller att

$$\lim_{k\to\infty}(-1)^k\sqrt{k}$$

inte existerar, vilket betyder att serien inte kan vara konvergent.

b) Här ser vi i stället att följden $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ är monotont avtagande, och att

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}=0.$$

Eftersom serien är alternerande, följer det av Leibniz kriterium att den är konvergent.

2.a) Vi undersöker gränsvärdena längs x-axeln och längs linjen $x=y$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{t^2+0+0}-1}{e^{t^2+0}-1}=\lim_{t\to 0}1=1.$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{t^2+t^2+t^2}-1}{e^{t^2+t^2}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{3t^2+O(t^4)}{2t^2+O(t^4)}=\frac{3}{2},$$

där vi har MacLaurin-utvecklat $e^u-1=u+O(u^2)$. Då vi får olika gränsvärden längs de båda linjerna saknar funktionen gränsvärde i origo.

b) Det är lättare att se vad som händer om vi förlänger med $e^{-x^2-y^2}$:

$$\frac{e^{x^2+xy+y^2}-1}{e^{x^2+y^2}-1}=\frac{e^{xy}-e^{-x^2-y^2}}{1-e^{-x^2-y^2}}.$$

Eftersom $e^{-x^2-y^2}\to 0$ så går nämnaren mot 1. Men faktorn e^{xy} går mot 1 längs koordinataxlarna och mot $+\infty$ längs linjen $x=t, y=t$. Det följer att täljaren, och därför hela funktionen, saknar gränsvärde precis som i a).

3. Vi räknar med kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Ytterligare en derivation ger

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)=$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

På samma sätt beräknas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}\right)=$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Insättning i H.L. och V.L. ger nu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial f}{\partial u}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v},$$

dvs vi erhåller ekvationen

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=2\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Vi delar med 2 och sätter $g=\frac{\partial f}{\partial u}$. Då uppfyller g ekvationen

$$2\frac{\partial g}{\partial v}=g\Leftrightarrow\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{1}{2}g=0.$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn $I=e^{-v/2}$ kan ekvationen skrivas

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big(e^{-v/2}g\Big)=0\Leftrightarrow e^{-v/2}g=\phi(u)\Leftrightarrow g=\phi(u)e^{v/2},$$

för någon godtycklig funktion $\phi(u)$ av u. Om vi går tillbaka till f får vi alltså

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\phi(u)e^{v/2}\Leftrightarrow f=\Phi(u)e^{v/2}+\Psi(v),$$

där $\Phi(u)$ är en primitiv till $\phi(u)$ och $\Psi(v)$ är en godtycklig funktion av v. Återgång till de ursprungliga variablerna x,y ger till sist

$$f(x,y)=\Phi(x+y)e^{(x-y)/2}+\Psi(x-y),$$

där Φ och Ψ är två godtyckliga två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner.

4.a) Om vi betraktar linjen $x=y=z=t$ ser vi att

$$g(t)=f(t,t,t)=9t^2-6t^3$$

går mot $\mp\infty$ då $t\to\pm\infty$. Det följer att $f(x,y,z)$ inte kan anta något största eller minsta värde.

b) Vi beräknar de stationära punkterna:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f'_x &=& 2(x+y+z)-6yz=0,\\ f'_y &=& 2(x+y+z)-6xz=0,\\ f'_z &=& 2(x+y+z)-6xy=0.\end{array}\right. \qquad (1)$$

Eftersom de första termerna i dessa ekvationer är lika så blir även de sista lika, dvs

$$6yz = 6xz = 6xy \Leftrightarrow yz = xz = xy. \qquad (2)$$

Vi visar nu att dessa villkor medför att $x = y = z$. Om vi t ex tar den första likheten, $yz = xz$, så kan denna skrivas som $(y-x)z = 0$. Vi ser att antingen gäller att $x = y$ eller så måste $z = 0$. Men om $z = 0$ så ser vi från (2) att då blir även $xy = 0$, dvs $x = 0$ eller $y = 0$. Om nu både $y = 0$ och $z = 0$ så följer av den första ekvationen i (1) att även $x = 0$. På samma sätt leder antagandet att $y \neq z$ eller att $x \neq z$ till $x = y = z = 0$. Slutsatsen blir alltså att den enda möjligheten är att $x = y = z$.

Om vi sätter in $x = y = z = t$ i vilken som helst av de tre derivatorna så reduceras denna till $2(t + t + t) - 6t^2 = 0 \Leftrightarrow t - t^2 = 0$ med de två rötterna $t = 0, 1$, vilket ger de två stationära punkterna $(0, 0, 0)$ och $(1, 1, 1)$.

För att bestämma karaktären av punkten $(1, 1, 1)$ kan vi beräkna andraderivatorna: $f''_{xx}(1, 1, 1) = f''_{yy}(1, 1, 1) = f''_{zz}(1, 1, 1) = 2$ och $f''_{xy} = 2-6z \Rightarrow f''_{xy}(1, 1, 1) = -4$, $f''_{yz} = 2-6x \Rightarrow f''_{yz}(1, 1, 1) = -4$, $f''_{xz} = 2 - 6y \Rightarrow f''_{xz}(1, 1, 1) = -4$. Detta ger den kvadratiska formen

$$Q(h, k, l) = 2h^2 + 2k^2 + 2l^2 - 8hk - 8kl - 8lh =$$

$$(h - 2k - 2l)^2 - 3(k + 2l)^2 + 9l^2,$$

som är indefinit. $(1, 1, 1)$ är alltså en sadelpunkt.

Om vi nu betraktar punkten $(0, 0, 0)$ så är det lätt att se att den associerade kvadratiska formen är $Q = (h + k + l)^2$ som är semidefinit. Vi kan alltså inte direkt dra någon slutsats. Men det ligger nära tillhands att studera planet $x + y + z = 0$. En linje i detta plan som går genom $(0, 0, 0)$ ges av $x = t, y = t, z = -2t$. Insatt i $f(x, y, z)$ får vi funktionen

$$h(t) = f(t, t, -2t) = 12t^3.$$

Eftersom denna funktion antar både strikt positiva och strikt negativa värden godtyckligt nära origo så måste även denna punkt vara en sadelpunkt.

Anmärkning: I efterhand kan vi konstatera att vi har ytterligare ett bevis för att funktionen inte kan anta max eller min: Det finns helt enkelt inga stationära punkter där max eller min skulle kunna antas!

5. Det är klart att det måste finnas någon punkt som minimerar avståndet till origo: vi observerar att det räcker att minimera avståndsfunktionen över skärningen av kurvan med en (kompakt) cirkelskiva som är tillräckligt stor för att innehålla någon punkt på kurvan för att erhålla minimum. Existensen av minimum följer därför av satsen om extremvärden.

För att visa att maximum inte antas räcker det att observera att det för varje x finns ett y sådant att punkten $P = (x, y)$ ligger på kurvan. Detta följer av att den reella tredjegradsekvationen $xy^3 + x^3y = 2$ för y alltid har en lösning (utom då $x = 0$). Eftersom avståndet från P till origo alltid är större $|x|$, som kan väljas godtyckligt stort, följer att det inte finns något maximalt anstånd till origo.

För att hitta extrempunkterna betraktar vi $f(x, y) = x^2+y^2$ (avståndsfunktionen i kvadrat) och beräknar $\nabla f = (2x, 2y)$ och $\nabla g = (y^3 + 3x^2y, 3xy^2 + x^3)$ där $g(x, y) = xy^3 + x^3y - 2$. Vi får

$$0 = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y^3 + 3x^2y & 3xy^2 + x^3 \end{vmatrix} =$$

$$2x(3xy^2 + x^3) - 2y(y^3 + 3x^2y) = 2x^4 - 2y^4.$$

Vi får $x^4 = y^4$ som ger att $x = y$ eller $x = -y$.
Fallet $x = y$: Insatt i bivillkoret får vi $y^4 + y^4 = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1$, vilket ger punkterna $(1, 1)$ och $(-1, -1)$.
Fallet $x = -y$: Insatt i bivillkoret får vi ekvationen $-y^4 - y^4 = 2$, som saknar lösning.
Vi ser nu att $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1^2 + 1^2 = 2$ är det enda möjliga extremvärdet som alltså måste vara det globala min-värdet. Det kortaste avståndet blir därför roten ur detta, dvs $\sqrt{2}$.

/Martin Tamm/201118/

Lösningar till tentamen

Analys A,
22-03-03.

1. Båda serierna är positiva.
a) Vi skriver om och använder Taylor-utvecklingen $\ln(1+t) = t + O(t^2)$:

$$\ln(\sqrt{k}+1) - \ln\sqrt{k} = \ln(1+\frac{1}{\sqrt{k}}) = \frac{1}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Jämförelsekriterium 2 ger nu att serien är konvergent om och endast om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ konvergerar. Eftersom den sista serien divergerar gör även den ursprungliga det.

b) Samma utveckling som i a) ger

$$\ln(k^2+1) - \ln k^2 = \ln(1+\frac{1}{k^2}) = \frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right).$$

Samma jämförelsekriterium 2 ger att serien är konvergent om och endast om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar. Eftersom den sista serien faktiskt konvergerar gör även den ursprungliga det.

2.a) I det här fallet gäller att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos xy = 1.$$

Gränsvärdet är inte kritiskt, och vi får direkt med kvotregeln:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - \cos(xy) + y^2}{x^2 + \cos(xy) + y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2) - \cos(xy)}{(x^2+y^2) + \cos(xy)} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

b) I det här fallet observerar vi att

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^2 - \cos(xy) + y^2}{x^2 + \cos(xy) + y^2} =$$

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{1 - \dfrac{\cos(xy)}{x^2+y^2}}{1 + \dfrac{\cos(xy)}{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Här har vi använt att $\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{\cos(xy)}{x^2+y^2} = 0$, vilket följer av att $\left|\frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{x^2+y^2} \to 0$.

3. a) Eftersom ekvationen är linjär så ligger det nära till hands att välja ett linjärt koordinatbyte. Det finns flera sådana som fungerar, men här nöjer vi oss med ett exempel: $u = x - y, v = x + y$. Om man inte vet vilket variabelbyte som man ska välja, så går det bra att välja ett variabelbyte av t ex typen $u = x + ay, v = y$, där man sedan kan bestämma ett värde på a så att endast en derivata blir kvar i ekvationen.

Vi räknar med kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Insättning i ekvationen ger

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + f = x + y,$$

vilket också kan skrivas som

$$2\frac{\partial f}{\partial v} + f = v \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2}f = \frac{1}{2}v.$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn $e^{v/2}$ kan ekvationen skrivas som

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{v/2} f\right) = \frac{1}{2} v e^{v/2},$$

eller ekvivalent

$$e^{v/2} f = \int \frac{1}{2} v e^{v/2}\, dv + \phi(u) = (v-2)e^{v/2} + \phi(u).$$

Om vi delar med $e^{v/2}$ och byter tillbaka till x, y-variablerna får vi

$$f(x,y) = (x+y-2) + \phi(x-y)e^{-(x+y)/2}.$$

b) Villkoret att funktionen ska vara noll på linjen $x + y = 0$ ger, om vi sätter $x = t, y = -t$ i formeln för lösningen i a):

$$0 = (t-t-2) + \phi(t-(-t))e^{-(t-t)} \Leftrightarrow \phi(2t) - 2 = 0.$$

Vi får alltså att $\phi(2t) = 2$ för alla värden på t. Detta ger den entydigt bestämda lösningen

$$f(x,y) = (x+y-2) + 2e^{-(x+y)/2}.$$

4. Vi visar att funktionen är obegränsad uppåt och neråt genom att undersöka gränsvärdena

$$\lim_{t\to\infty} f(t,-t,0) = \lim_{t\to\infty} (\ln(2t^2) + t^2) = +\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t,t,0) = \lim_{t\to\infty}(\ln(2t^2) - t^2) = -\infty$$

Det följer att varken max eller min antas, och att supremum och infimum är $+\infty$ och $-\infty$.

Vi beräknar de stationära punkterna:

$$\begin{cases} f'_x &= 3\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} - y - z = 0, \\ f'_y &= 3\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} - x - z = 0, \\ f'_z &= 3\frac{2z}{x^2+y^2+z^2} - x - y = 0. \end{cases}$$

Om vi drar den andra ekvation från den första, så får vi att

$$3\frac{2x-2y}{x^2+y^2+z^2} - y + x = 0,$$

vilket också kan skrivas som att

$$(x-y)\left(\frac{6}{x^2+y^2+z^2}+1\right) = 0$$

Eftersom den andra faktorn uppenbarligen är strikt positiv så följer det att $x - y = 0$, dvs $x = y$. På samma sätt visas att $y = z$ och $x = z$, så vi kan dra slutsatsen att $x = y = z$. Insatt i valfri av ekvationerna får vi att

$$3\frac{2x}{3x^2} - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1,$$

med rötterna $x \pm 1$. Detta ger de två stationära punkterna $(1,1,1)$ och $(-1,-1,-1)$.

För andraderivatorna fås

$$\begin{cases} f''_{xx} &= \frac{6(y^2+z^2-x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f''_{yy} &= \frac{6(x^2+z^2-y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f''_{zz} &= \frac{6(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''_{xy} &= -\frac{12xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} - 1, \\ f''_{yz} &= -\frac{12yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - 1, \\ f''_{xz} &= -\frac{12xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - 1, \end{cases}$$

vilket i punkten $(1,1,1)$ ger

$$\begin{cases} f''_{xx}(1,1,1) &= \frac{2}{3}, \\ f''_{yy}(1,1,1) &= \frac{2}{3}, \\ f''_{zz}(1,1,1) &= \frac{2}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} f''_{xy}(1,1,1) &= -\frac{7}{3}, \\ f''_{yz}(1,1,1) &= -\frac{7}{3}, \\ f''_{xz}(1,1,1) &= -\frac{7}{3}. \end{cases}$$

Detta ger i punkten $(1,1,1)$ formen $Q(h,k,l)$

$$= \frac{2}{3}h^2 + \frac{2}{3}k^2 + \frac{2}{3}l^2 - \frac{14}{3}hk - \frac{14}{3}kl - \frac{14}{3}hl =$$

$$\frac{2}{3}(h^2 + k^2 + l^2 - 7hk - 7kl - 7hl) =$$

$$\frac{2}{3}\left(h - \frac{7}{2}k - \frac{7}{2}l\right)^2 - \frac{15}{2}k^2 - \frac{15}{2}l^2 - 21kl =$$

$$\frac{2}{3}\left(h - \frac{7}{2}k - \frac{7}{2}l\right)^2 - \frac{15}{2}\left(k^2 + l^2 + \frac{14}{5}kl\right) =$$

$$\frac{2}{3}\left(h - \frac{7}{2}k - \frac{7}{2}l\right)^2 - \frac{15}{2}\left(k + \frac{7}{5}l\right)^2 + \frac{36}{5}l^2.$$

Eftersom vi får termer med olika tecken är $(1,1,1)$ en sadelpunkt.

Insättning av punkten $(-1,-1,-1)$ i andradrivatorna ger exakt samma kvadratisk form, så även detta är en sadelpunkt.

5. Vi beräknar $\nabla f = (3x^2y^3, 3x^3y^2)$ och $\nabla g = (3x^2+6y, 3y^2+6x)$, där $g(x,y) = x^3+y^3+6xy-8$. Vi får

$$0 = \begin{vmatrix} 3x^2y^3 & 3x^3y^2 \\ 3x^2+6y & 3y^2+6x \end{vmatrix} =$$

$$9x^2y^5 + 18x^3y^3 - 9x^5y^2 - 18x^3y^3 = 9x^2y^2(y^3 - x^3).$$

Tre fall: $x = 0$, $y = 0$ och $x = y$. $x = 0$ ger insatt i bivillkoret $y = 2$. P s s ger $y = 0$ att $x = 2$. $x = y$ ger insatt i bivillkoret ekvationen $2x^3 + 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$. Vi gissar omedelbart roten $x = 1$. polynomdivision ger $x^3+3x^2-4 = (x-1)(x^2+4x+4) = (x-1)(x+2)^2$ med rötterna $x = 1$ och $x = -2$, vilket ger punkterna $(1,1)$ och $(-2,-2)$.

Svar: $(0,2)$, $(2,0)$, $(1,1)$ och $(-2,-2)$.

För frågorna 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen

/Martin Tamm/220303/

Lösningar till tentamen

Analys A,
22-04-11.

1.a) Vi noterar att

$$0 \leq \left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Eftersom

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

följer det av jämförelsekriterium 1 att integralen är absolutkonvergent.

b) För att visa att integralen är konvergent använder vi partialintegrering:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{\sin x}{1+x}\,dx =$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\left[-\frac{\cos x}{1+x}\right]_0^N - \int_0^N \frac{\cos x}{(1+x)^2}\,dx\right).$$

Den första termen går mot 1 och den följande integralen är absolutkonvergent av liknande skäl som integralen i a), eftersom

$$0 \leq \left|\frac{\cos x}{(1+x)^2}\right| \leq \frac{1}{(1+x)^2},$$

och

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = 1.$$

Detta visar att integralen konvergerar, men för att kunna konstatera att integralen inte är absolutkonvergent måste vi även visa att motsvarande integral med belopp divergerar. Vi observerar därför att

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{1+x}\right| dx \geq \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x}\,dx =$$

$$\int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}{1+x}\,dx =$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\left[\frac{1}{2}(\ln(1+x)\right]_0^N - \frac{1}{2}\int_0^N \frac{\cos 2x}{1+x}\,dx\right).$$

Här är nu den första termen divergent medan den andra är konvergent av liknande skäl som tidigare. Det följer att den ursprungliga integralen inte är absolutkonvergent utan alltså i stället betingat konvergent.

2.a) Vi undersöker gränsvärdena längs x-axeln och längs linjen $x = y$:

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2 - \sin(t^2) + t^2}{t^2 + \sin(t^2) + t^2} = \frac{1}{3}.$$

Då vi får olika gränsvärden längs de båda linjerna saknar funktionen gränsvärde i origo.

b) I det här fallet observerar vi att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2 - \sin(x^2y^2) + y^2}{x^2 + \sin(x^2y^2) + y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1 - \dfrac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2}}{1 + \dfrac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Här har vi använt att $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2} = 0$ eftersom $\left|\dfrac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq r^2 \to 0$ då $r \to 0$.

2.a) Vi räknar med kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Ytterligare en derivation ger

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

På samma sätt beräknas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Insättning i H.L. och V.L. ger nu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial u}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v},$$

dvs vi erhåller ekvationen

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 2\frac{\partial f}{\partial u}.$$

b) Vi delar med 2 och sätter $g = \frac{\partial f}{\partial u}$. Då uppfyller g ekvationen

$$2\frac{\partial g}{\partial v} = g \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{1}{2}g = 0.$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn $I = e^{-v/2}$ kan ekvationen skrivas

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big(e^{-v/2}g\Big) = 0 \Leftrightarrow e^{-v/2}g = \phi(u) \Leftrightarrow g = \phi(u)e^{v/2},$$

för någon godtycklig funktion $\phi(u)$ av u. Om vi går tillbaka till f får vi alltså

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \phi(u)e^{v/2} \Leftrightarrow f = \Phi(u)e^{v/2} + \Psi(v),$$

där $\Phi(u)$ är en primitiv till $\phi(u)$ och $\Psi(v)$ är en godtycklig funktion av v. Återgång till de ursprungliga variablerna x, y ger till sist

$$f(x, y) = \Phi(x + y)e^{(x-y)/2} + \Psi(x - y),$$

där Φ och Ψ är två godtyckliga två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner.

4. Vi visar att funktionen är obegränsad neråt genom att undersöka t ex gränsvärdet

$$\lim_{t\to\infty} f(t, 0, 0) = \lim_{t\to\infty}(1 - t^2)e^t = -\infty,$$

För maximum konstaterar vi att funktionen är negativ utanför det kompakta klotet $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^z \leq 1\}$, och att maximum av f över $\mathbb{R}^3$ måste antas, då det tydligen måste vara lika med maximum över B, som antas eftersom B är kompakt.

Vi beräknar de stationära punkterna:

$$\begin{cases} f'_x &= (1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2x)e^{x+y+z} = 0, \\ f'_y &= (1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2y)e^{x+y+z} = 0, \\ f'_z &= (1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2z)e^{x+y+z} = 0. \end{cases}$$

Ur dessa ekvationer följer att $x = y = z$ (alla tre är lika med $\frac{1}{2}(1-x^2-y^2-z^2)$). Insättning av detta i valfri av ekvationerna ger att $1-3x^2-2x = 0$, med de två lösningarna $x = -\frac{1}{3}\pm\frac{2}{3}$, ger de två punkterna $(-1, -1, -1)$ och $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Den första punkten ligger utanför B, så den kan omöjligt vara en maxpunkt. Det återstår därför endast en punkt som därför måste vara den sökta maxpunkten med maxvärdet $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2e}{3}$.

För den andra stationära punkten $(-1, -1, -1)$ får vi

$$f''_{xx}(-1,-1,-1) = f''_{yy}(-1,-1,-1) = f''_{yy}(-1,-1,-1) = 0,$$

$$f''_{xy}(-1,-1,-1) = f''_{yz}(-1,-1,-1) = f''_{xz}(-1,-1,-1) = \frac{2}{e^{-3}},$$

vilket ger den kvadratiska formen $Q(h, k, l) = 4e^{-3}(hk+kl+hl)$ som är indefinit, t ex eftersom $Q(1, 1, 0) > 0$ och $Q(1, -1, 0) < 0$. Punkten är alltså en sadelpunkt.

5. Eftersom alla termerna i vänsterledet av $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ är positiva kan ingen av dom vara större än 3. Det följer att mängden D är innehållen i mängden

$$\{(x, y, z) : 0 \leq x \leq \sqrt[3]{3}, 0 \leq y \leq \sqrt[3]{3}, 0 \leq z \leq \sqrt[3]{3}\}$$

som är begränsad. Eftersom D dessutom är sluten följer att den också är kompakt, vilket garanterar att både max och min måste antas. Dessa måste antas antingen i stationära punkter eller på randen som i detta fall består av punkter där x, y, eller z är noll. Eftersom $f(x, y, z) \geq 0$ och likhet dessutom gäller på randen måste globalt min vara noll och maximum måste därför antas i en stationär punkt.

För att hitta extrempunkterna inför vi Lagrange-funktionen

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^3 + y^3 + z^3 - 3),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_x &= yz + \lambda 3x^2 = 0, \\ F'_y &= xz + \lambda 3y^2 = 0, \\ F'_z &= xy + \lambda 3z^2 = 0. \end{cases}$$

Vi kan anta att $\lambda \neq 0$, eftersom annars något av talen x, y, eller z måste vara noll och därmed måste punkten ligga på randen. I detta fall ser vi, genom att multiplicera ekvationerna med x, y och z respektive, att

$$x^3 = y^3 = z^3 \quad \left(= \frac{xyz}{3\lambda}\right).$$

Det följer att $x^3 + x^3 + x^3 - 3 = 0$, dvs $x = 1$, och därmed blir även $y = z = 1$. Detta ger den unika kritiska punkten $(1, 1, 1)$, som alltså måste vara maxpunkten, och motsvarande maxvärde $f(1, 1, 1) = 1$.

För frågorna 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen

/Martin Tamm/220411/

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del A
13 oktober 2022

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng och minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen.

Problemdel

1. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut?

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{\ln(e+k^2)} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{1}{k}\right).$$

Lösningsförslag

(a) Vi observerar att

$$\left|\frac{(-1)^k}{k^2}\right| = \frac{1}{k^2}$$

och drar oss till minnes att serien $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ är en känd konvergent serie. Således är den givna serien med tecken absolutkonvergent, och därmed även konvergent.

(b) vi kan skriva $\ln(e+k^2) = \ln(k^2(1+e/k^2)) = 2\ln k + \ln(1+e/k^2)$. Vi får då

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k)}{\ln(e+k^2)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{2\ln k + \ln(1+\frac{e}{k^2})} = \frac{1}{2}.$$

Eftersom den givna seriens termer inte går mot noll när $k \to \infty$ följer det att serien är varken absolutkonvergent eller konvergent.

(c) Vi har $\lim_{k\to\infty} \sin(1/k) = 0$. Vidare är $\sin x$ positiv och växande på intervallet $[0,1]$ vilket betyder att $\sin(1/k)$ är positiv och avtagande på $[1,\infty)$. Därmed ger Leibnitz kriterium att serien konvergerar. Däremot konvergerar serien inte absolut. Ty $|(-1)\sin(1/k)| = \sin(1/k)$ och $k\sin(1/k) \to 1$ när $k \to \infty$, vilket betyder att $\sum_k \sin(1/k)$ kan jämföras med den divergenta harmoniska serien.

2. (a) Visa att

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 \ln(x^4+y^4), \quad (x,y) \neq (0,0),$$

kan utvidgas till en kontinuerlig funktion på hela $\mathbb{R}^2$.

(b) Får denna utvidgning kontinuerliga partiella derivator i hela $\mathbb{R}^2$?

Lösningsförslag

(a) Låt oss först visa att den givna funktionen har gränsvärde i origo. Detta görs med fördel medelst införande av poära koordinater. Sätt $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$. Då fås

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^4 \ln[r^4(\sin^4\theta + \cos^4\theta)] = 4r^4\ln r + r^4 \ln(\sin^4\theta + \cos^4\theta).$$

Observera vidare att $\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos\theta \geq \frac{1}{2}$. Därmed erhåller vi

$$\lim_{r\to 0}\left(4r^4\ln r + r^2\ln(\sin^4\theta + \cos^4\theta)\right) = \lim_{r\to 0} 4r^4 \ln r + \lim_{r\to 0} r^4 \ln(\sin^4\theta + \cos^4\theta) = 0$$

oberoende av θ. I det första gränsvärdet har vi åberopat ett standardgränsvärde och i det andra har vi utnyttjat att den andra faktorn är begränsad.

Eftersom f har gränsvärde 0 i origo kan vi utvidga f till en kontinuerlig funktion genom att sätta

$$F(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^2\ln(x^4+y^4) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

för då gäller $F(x,y) = f(x,y)$ utanför origo, medan $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = F(0,0)$.

(b) Då funktionen f och därmed F är symmetriska i x och y räcker det att undersöka $\frac{\partial F}{\partial x}$. Utanför $(0,0)$ har vi $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$ och medelst derivering med hjälp av produktregeln och kedjeregeln fås

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x(x^2+y^2)\ln(x^4+y^4) + \frac{4x^3(x^2+y^2)^2}{x^4+y^4}.$$

Denna funktion inses vara kontinuerlig när $(x,y)\neq(0,0)$. En ny räkning i polära koordinater visar att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0$. I origo har vi

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^4\ln h^4}{h} = \lim_{h\to 0} 4h^3\ln h = 0$$

vilket visar att $\frac{\partial F}{\partial x}$ är kontinuerlig även i denna punkt, således i hela $\mathbb{R}^2$.

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = 17 + e^{x+y}(xy - x)$$

samt avgör deras karaktär.

Lösningsförslag

Vi noterar att f har partiella derivator av alla ordningar. Partiell derivering ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)(y-1)e^{x+y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xye^{x+y}.$$

Dåexponentialfunktionen är nollskild för alla reella argument får vi att $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ om $x = -1$ eller $y = 1$ medan $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ om $x = 0$ eller $y = 0$. Vi får således de stationära punkterna $(-1,0)$ samt $(0,1)$.

Vi beräknar de partiella derivatorna av ordning två och får

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (x+2)(y-1)e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = (x+1)ye^{x+y} \quad \text{och} \frac{\partial f}{\partial y^2} = x(y+1)e^{x+y}$$

Observera att $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 0$ vilket genast ger att $(0,1)$ är en sadelpunkt. I $(-1,0)$ fås den associerade kvadratiska formen $-h^2 - k^2$, som är negativt definit, vilket i sin tur medför att f har ett lokalt maximum i $(-1,0)$.

4. (a) Förklara varför funktionen $f(x,y) = 2xy - 2y - 2$ antar ett största och ett minsta värde under bivillkoret $x^2 + 2y^2 = 2x$.

(b) Bestäm dessa värden samt ange i vilka punkter de antas.

Lösningsförslag

(a) Funktionen f är ett polynom i två variabler och således kontinuerlig på $\mathbb{R}^2$. Sätt $g(x,y) = x^2 - 2x + 2y^2$ och skriv nu

$$x^2 - 2x + 2y^2 = (x-1)^2 - 1 + 2y^2$$

så att bivillkoret $g(x,y) = 0$ kan uttryckas som $(x-1)^2 + 2y^2 = 1$. Det senare beskriver en ellips, en sluten och begränsad och således kompakt mängd. Enligt en känd sats antar därmed f ett största och ett minsta värde under det givna bivillkoret.

(b) Låt oss beräkna gradienterna för funktionerna f och g. Detta ger

$$\text{grad} f = (2y, 2x-2) \quad \text{grad} g = (2x-2, 4y).$$

Vi har att grad$g \neq 0$ på $g(x,y) = 0$. Ty den andra komponenten försvinner endast om om $y = 0$, vilket i sin tur framtvingar $x = 0$ eller $x = 2$, men då är första komponenten i grad$g$ lika med -2 respektive 2.

Vi får således stationära punkter till problemet där grad$f$ och grad$g$ är parallella. För att bestämma dessa punkter kan vi undersöka när

$$\begin{vmatrix} 2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 4y \end{vmatrix} = 0$$

det vill säga $8y^2 - (2x-2)^2 = 0$ eller efter förenkling $2y^2 - (x-1)^2 = 0$. Vi sätter in $2y^2 = x^2 - 2x + 1$ i bivillkoret, vilket ger

$$2x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Medelst kvadratkomplettering erhåller vi de två lösningarna $x_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $x_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Genom att utnyttja sambandet $y^2 = (x-1)^2/2$ får vi nu fyra stationära punkter, nämligen

$$\vec{p_1} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \quad \vec{p_2} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \quad \vec{p_3} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{och} \quad \vec{p_4} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right).$$

Det återstår endast att evaluera f i dessa punkter. Vi får

$$f(\vec{p_1}) = f(\vec{p_4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 2$$

vilket ger funktionens största värde under bivillkoret. Vidare har vi

$$f(\vec{p_2}) = f(\vec{p_3}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$$

vilket ger funktionens minsta värde under bivillkoret.

5. Betrakta funktionen

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x+y+z}$$

på mängden $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

Vad är supremum för f på D? Vad är infimum för f på D?

Lösningsförslag

Mängden D är öppen men inte begränsad. På D är samtliga variabler positiva, vilket betyder att både täljare och nämnare i f är positiva. Således är f en positiv funktion på D, vilket medför att $\inf_D f \geq 0$ men möjligtvis skulle det kunna vara så att $\inf_D f > 0$.

Låt oss visa att $\inf_D f = 0$. Låt oss först notera att $\{(x,x,x) : x > 0\} \subset D$. Sätt

$$g(x) = f(x,x,x) = \frac{x^3}{x+x+x} = \frac{x^2}{3}, \quad x > 0.$$

Eftersom $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ följer det att f antar godtyckligt små värden i D. Alltså är $\inf_D f = 0$.

Vi har även $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$, vilket i sin tur betyder att f även antar godtyckligt stora värden i D. Därmed fås $\sup_D f = \infty$.

Teoridel

6. Visa att $\sin x < x < \tan x$ om $0 < x < \pi/2$ samt att $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

7. Definiera riktningsderivata och gradient. Formulera och bevisa sats om samband mellan riktningsderivata och gradient. Visa också att en funktion av flera variabler växer snabbast i gradientens riktning. (Endast funktioner av två variabler behöver behandlas.)

Skrivningen beräknas vara rättad onsdag 19 oktober 2022. Se kurshemsidan för information om återlämning.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del A
24 november 2022

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng och minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen.

Problemdel

1. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut?

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2e+k)} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos\left(\frac{1}{k}\right).$$

Lösningsförslag:

Serien i (a) konvergerar absolut eftersom serien $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ är en känt konvergent serie (p-serie med $p=3$). Därmed är serien också konvergent då absolutkonvergens medför konvergens.

Observera att alla termer i serien i (b) är positiva. Därmed är konvergens i (b) liktydigt med absolutkonvergens för denna serie. Serien konvergerar dock inte, eftersom $1/\ln(2e+k)\geq 1/k$ vilket låter oss järföra med $\sum_{k=1}^{\infty}1/k$, den divergenta harmoniska serien.

Serien i (c) är divergent eftersom termerna i serien inte går mot noll. Vi har nämligen $\lim_{k\to\infty}\cos(1/k)=1$. Därmed är serien i (c) speciellt inte absolutkonvergent.

2. (a) Avgör om

$$f(x,y)=\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2},\quad (x,y)\neq(0,0),$$

kan utvidgas till en kontinuerlig funktion på cirkelskivan $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 4\}$.

(b) Existerar $\lim_{x^2+y^2\to\infty}f(x,y)$?

Lösningsförslag:

(a) Vi noterar först att funktionen är kontinuerlig i alla punkter i $\mathbb{R}^2$ utom möjligtvis där nämnaren är noll, vilket inträffar i origo. För att en kontinuerlig utvidgning skall vara möjlig måste gränsvärdet för f existera ändligt i origo.

För att undersöka om så är fallet inför vi polära koordinater $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Detta ger

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{r^4\cos^4\theta+r^4\sin^4}{(r^2)^2}=\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta).$$

Det senare uttrycket är ej oberoende hur man nämar sig origo. Exempelvis har vi

$$f(r,r)=\frac{1}{2}\quad\text{medan}\quad f(r,0)=1.$$

Vi drar slutsatsen att funktionen f är begränsad i punkterade planet, men saknar gränsvärde i origo. Således är en kontinuerlig utvidgning ej möjlig.

(b) Resonemanget i (a) medför att gränsvärde i oändligheten också saknas eftersom $f\lim_{r\to\infty}(r,r)=1/2$ medan $\lim_{r\to\infty}f(r,0)=1$.

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = x + \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + xy^2 - x\right)$$

samt avgör deras karaktär.

Lösningsförslag:

Vi beräknar först de partiella derivatorna till f. Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2\frac{x+y^2-1}{x^2+2xy^2-2x}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4\frac{y}{x+2y^2-2}.$$

Vilkoret $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ medför att $y = 0$. Insättning av detta i $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ger att $x = \pm\sqrt{2}$, men f är inte definierad i $x = \sqrt{2}$.

Vi undersöker den återstående punktens karaktär medelst den associerade kvadratiska formen. Vi får efter partiell derivering att $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = 0$, så det räcker att undersöka andraderivatorna med avseende på bara x och y. Görs detta på sedvanligt sätt fås den negativt definita kvadratiska formen $(-2+\sqrt{2})h^2 + (-4+2\sqrt{2})k^2$ och därmed att $(-\sqrt{2},0)$ är ett lokalt maximum:

4. (a) Förklara varför funktionen $f(x,y) = x - y$ antar ett största och ett minsta värde under bivillkoret $x^2 + 3y^2 = 1$.

(b) Bestäm dessa värden samt ange i vilka punkter de antas.

(c) Antas största och minsta värde om det ursprungliga bivillkoret ersätts med bivillkoret $x^2 + 3y = 1$?

Lösningsförslag:

(a) Vi noterar att bivillkoret beskriver en ellips i planet. En ellips är en kompakt mängd och då funktionen f ges av ett polynom är f speciellt kontinuerlig. Således ges existensen av ett största och ett minsta värde av den kända extremvärdessatsen för kontinuerliga funktioner.

(b) Stationära punkter till optimeringsproblemet med bivillkor kan bestämmas genom att undersöka när grad$f$ och grad$g$ är parallella. Vi erhåller villkoret

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2x & 6y \end{vmatrix} = 0$$

vilket ger att $x = -3y$. Insättning i bivillkoret ger sedan $9y^2 + 3y^2 = 1$, det vill säga $12y^2 = 1$. Alltså fås de två stationära punkterna $p_1 = (\sqrt{3}/2, -1/2\sqrt{3})$ samt $p_2 = (-\sqrt{3}/2, 1/2\sqrt{3})$. Evaluering av f i dessa punkter ger att $f(p_2) = -2/\sqrt{3}$ är minsta värde för f under bivillkoret, medan $f(p_1) = 2/\sqrt{3}$ är största värdet.

(c) Vi kan lösa ut y ur bivillkoret och få $y = \frac{1}{3}(1-x^2)$. Sätts detta in i f fås funktionen

$$g(x) = f(x, y(x)) = x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}.$$

Denna funktion g är obegränsad på reella linjen, vilket medför att f ej antar största värde under bivillkoret. Däremot antas ett minsta värde. Vi har nämligen $g'(x) = 1 + \frac{2}{3}x$ och därmed en kritisk punkt i $x = -3/2$. Denna inses vara ett lokalt minimum med hjälp av teckentabell, och även ett globalt minumum eftersom g är avtagande för $x < -3/2$ och växande för $x > -3/2$.

5. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$$

på mängden $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > y > 0\}$.

Vad är supremum för f på D? Vad är infimum för f på D?

Lösningsförslag:

Eftersom båda variablerna x och y är positiva i D är både täljare och nämnare i uttrycket som definierar f positiva. Således är f också positiv. Därmed gäller att $\inf_D f \geq 0$.

Vi observerar att för $0 < x < 1$ är grafen för $y = x^2$ innehållen i D. Att infimum för f i själva verket är lika med 0 kan inses genom att betrakta

$$f(x, x^2) = \frac{x^2}{1 + x}, \quad 0 < x < 1,$$

och observera att $\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = 0$.

Funktionen f är obegränsad i D, vilket medför att $\sup_D f = \infty$. Detta kan inses genom att betrakta kurvan $y = \sqrt{x}$ vars graf ligger i D när $x \geq 1$.

$$f(x, \sqrt{x}) = \frac{x^{3/2}}{x + x^{1/2}}, \quad x > 1$$

och observera att $\lim_{x \to \infty} f(x, \sqrt{x}) = \infty$.

Teoridel

6. Definiera riktningsderivata och gradient. Formulera och bevisa sats om samband mellan riktningsderivata och gradient. Visa också att en funktion av två variabler växer snabbast i gradientens riktning.

7. Formulera och bevisa Cauchys integralkriterium.

Skrivningen beräknas vara rättad onsdag 30 november 2022. Se kurshemsidan för information om återlämning.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del B
13 februari 2023

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 5 poäng och minst 15 poäng, varav minst 4 från teorifrågorna, krävs för godkänt.

1. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (xz + x\sin^2 y, yz, z\cos^2 y)$$

ut ur cylindern

$$\mathcal{Z} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 4, 1 \leq z \leq 2\}.$$

Lösningsförslag:

Vi noterar att det givna vektorfältet är godtyckligt många gånger deriverbart, medan den givna cylindern plus topp-och bottenlock bestående av cirkelskivor utgör en sluten och styckvis slät yta i $\mathbb{R}^3$. Vi kan således tillämpa Gauss sats.

Vi har

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = z + \sin^2 y + z + \cos^2 y = 1 + 2z,$$

och volymsintegralen över den solida cylindern blir efter övergång till cylindriska koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ och $z = z$

$$\iiint (1+2z)dxdydz = \int_{r=0}^{2}\int_{\theta=-\pi}^{\pi}\int_{z=1}^{2}(1+2z)rdrd\theta dz = 4\pi\int_{1}^{2}(1+2z)dz = 16\pi.$$

2. (a) (**Teoriuppgift**) Definiera rotationen av ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$. (1p)

(b) Beräkna rotationen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (2xyz^2 + y, x^2z^2 + z, 2x^2yz + x) \quad (2p)$$

(c) Beräkna kurvintegralen av $\mathbf{u}$ med moturs orientering längst med randen av kvadraten i xy-planet vars hörn är $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ och $(0,1,0)$. (2p)

Lösningsförslag:

(a) Se kursboken för en definition av begreppet rotation.

(b) Vi ställer upp hjälpdeterminanten

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xyz^2 + y & x^2z^2 + z & 2x^2yz + x \end{vmatrix}$$

och beräknar på så vis rotationen till $(-1,-1,-1)$.

(c) Låt oss utnyttja Stokes sats på det släta vektorfältet $\mathbf{u}$ och en kvadrat i planet. Vi har för kvadraten i xy-planet vars rand den givna orienterade kurvan utgör en kompatibel normalvektor given av $(0,0,1)$. Då fås $\mathrm{rot}\mathbf{u}\cdot(0,0,1) = -1$, en konstant funktion, och kvadraten har sidlängden lika med 1.

Därmed fås

$$\int_\gamma \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = \iint_K \mathrm{rot}\mathbf{u}d\mathbf{S} = -\mathrm{Area}(K) = -1.$$

3. (a) (**Teoriuppgift**) Vad menas med att ett vektorfält $\mathbf{u} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ är konservativt? (1p)

(b) Låt γ vara snittet mellan de två mängderna

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 9\} \quad \text{och} \quad P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0\}.$$

Beskriv mängden γ. (1p)

(c) Visa att det finns minst ett val av $a, b, c \in \mathbb{R}$, ej alla noll, sådant att kurvintegralen av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (ayz - y^2, xz + bxy, xy + cz^2)$$

längst med γ är noll. (3p)

Lösningsförslag:

(a) Se kursboken av Persson-Böiers för en definition.

(b) Mängden S är en sfär i $\mathbb{R}^3$ med radie lika med 3. Denna skärs av planet P vilket innehåller origo. Således är mängden γ en storcirkel på sfären.

(c) En möjlighet är att välja parametrar a, b, c sådana att det resulterande vektorfältet är konservativt. Om vi först integrerar första komponenten erhåller vi vi $axyz - xy^2 + \phi(y, z)$, där ϕ ej beror av x. Partiell derivering av denna funktion med avseende på y ger därefter $axz - 2xy + \frac{\partial \phi}{\partial y}$, och genom att välja $a = 1$ och $b = -2$ samt $\phi = \phi(z)$ har vi precis uttrycket i andra komponenten av det givna fältet. Vi har nu att $U(x, y, z) = xyz - xy^2 + \frac{c}{3}z^3$ där c är en godtycklig reell konstant är ett konservativt fält. Då kurvan γ enligt (b) är enkel och sluten följer nu att kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{u} d\mathbf{r} = 0$ för $a = 1$, $b = -2$ och c godtyckligt.

4. (a) Funktionen $u(x, y) = xe^x \sin y + ye^x \cos y$ är realdelen av en analytisk funktion $f(z)$. Avgör vilken av följande funktioner som ger en imaginärdel till $f(z)$, samt identifiera funktionen $f(z)$. (3p)

$$(i)\, v(x, y) = ye^x \sin y - xe^x \cos y \quad (ii)\, v(x, y) = xe^y \cos y + ye^x \sin x$$

$$(iii)\, v(x, y) = ye^y \sin y - xe^y \cos x \quad (iv)\, v(x, y) = xy \sin x - xy \cos x.$$

(b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{ze^z + \cos(z^2)}{z^4 + z^2 + 1} dz$$

där $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = \frac{3}{4}\}$. (2p)

Lösningsförslag:

(a) Vi drar oss till minnes formeln $e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$, där $z = x + iy$. Utseendet hos den givna funktionen u antyder att vi kan pröva att beräkna $ze^z = xe^x \cos y - ye^x \sin y + i(xe^x \sin y + ye^x \cos y)$. Vi ser sedan att realdelen av $-ize^z$ sammanfaller med den givna funktionen u, och att imaginärdelen av samma funktion är funktionen i alternativ (i). Alltså är $f(z) = -ize^z$ den sökta funktionen (upp till en konstant) och de övriga alternativen är uteslutna på grund av entydighet.

(b) Vi betraktar först integrandens nämnare vilken, efter ett mellansteg där substitutionen $w = z^2$ används, inses ha faktoriseringen $z^4 + z^2 + 1 = (z + \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2})(z - \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2})$. Samtliga rötter till nämnaren ligger alltså på enhetscirkeln i komplexa planet. Således är integranden en analytisk funktion i en cirkelskiva som helt innesluter kurvan γ. Cauchys integralsats utsäger då att den sökta kurvintegralens värde är lika med 0.

5. (a) (**Teoriuppgift**) Formulera och bevisa *Greens formel.* (3p)

(b) Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma x dy$ moturs längst med den slutna kurvan i planet som beskrivs av $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + y^2 = \frac{3}{4}$. (2p)

Lösningsförslag:

(a) Se kursboken Persson-Böiers, Analys i flera variabler, för ett bevis.

(b) Låt oss först observera att uttrycket som definierar γ *kan skrivas på formen*

$$\frac{1}{4}(x-1)^2 + y^2 = 1$$

vilket är uttrycket för en ellips med centrum i $(1,0)$. *Vi kan nu tillämpa Greens formel för att erhålla*

$$\int_\gamma x dy = \iint_E dxdy = \text{Area}(E)$$

där $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{4}(x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$. *Den sistnämnda arean kan beräknas med hjälp av ett elliptiskt variabelbyte (se PB2, s. 266) till* 2π.

6. Låt $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av reellvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,1]$.

   (a) (**Teoriuppgift**) Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar punktvis till en funktion f. Definiera vad som menas med att $\{f_k\}$ konvergerar likformigt till en funktion f. (1p)

   (b) (**Teoriuppgift**). Konvergerar $\{x^{4k}(1+x^{4k})\}_{k=1}^{\infty}$ likformigt på $[0,1]$? (1p)

   (c) (**Teoriuppgift**) Visa att om $\{f_k\}$ konvergerar likformigt mot f så gäller

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)dx = \int_0^1 f(x)dx. \qquad (3p)$$

   Lösningsförslag:

   (a) Se kurskompendiet för dessa definitioner.

   (b) Observera att $\lim_{k\to\infty} f_k(1) = 2$ *medan* $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ *för alla* $0 \leq x < 1$. *Följden* f_k *konvergerar alltså punktvis mot en funktion* f *som är diskontinuerlig på intervallet* $[0,1]$. *Således kan* $\{f_k\}$ *ej konvergera likformigt.*

   (c) Se kurskompendiet för ett bevis.

Skrivningen beräknas vara rättad fredag 24 februari 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik II Analys del A
23 augusti 2023

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng och minst 7,5 poäng på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen.

Problemdel

1. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka av följande serier konvergerar absolut?

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \qquad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln(k))^2}{\ln(e+k^2)} \qquad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi)\sin\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Lösningsförslag:

(a) Denna serie konvergerar enligt Leibnitz kriterium. Den harmoniska serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *är divergent, varför serien i (a) ej är absolutkonvergent.*

(b) Vi observerar att $\ln(e+k^2) = \ln[k^2(1+e/k)] = 2\ln k + \ln(1+e/k)$ *vilket betyder att termerna i serien i (b) inte går mot noll. Alltså är serien divergent.*

(c) Vi noterar först att $\cos(k\pi) = (-1)^k$. *Vidare ger en Taylorutveckling att* $k^2 \sin(1/k^2) \to 1$ *när* $k \to \infty$. *Efter jämförelse med* $\sum_k \frac{1}{k^2}$ *drar vi slutsatsen att serien i (c) är absolutkonvergent, och därmed även konvergent.*

2. (a) Kan

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+xy+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

utvidgas till en kontinuerlig funktion på hela $\mathbb{R}^2$ genom ett lämpligt val av $f(0,0)$?

(b) Existerar $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x)$ för funktionen ovan?

Lösningsförslag:

(a) Vi inför polära koordinater $x = r\cos\theta$ *och* $y = r\sin\theta$ *och får*

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^4}{r^2\cos^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta + r^2\sin\theta} = \frac{r^2}{1+\sin\theta\cos\theta}.$$

Vidare har $1+\sin\theta\cos\theta = 1+\frac{1}{2}\sin(2\theta)$, *och detta uttryck antar värden i* $[1/2, 3/2]$. *Eftersom täljaren går mot* 0 *när* $r \to 0$ *får vi således* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. *Vi kan alltså utvidga* f *till en kontinuerlig funktion genom att sätta* $f(0,0) = 0$.

(b) Eftersom f *i polära koordinater har formen* $\frac{r^2}{1+\cos\theta\sin\theta}$ *med begränsad nämnare fås* $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = \infty$.

3. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = 1 + e^x(x^2y - y)$$

samt avgör deras karaktär.

Lösningsförslag:

Funktionen f är godtyckligt många gånger deriverbar i hela $\mathbb{R}^2$, varför vi undersöker kritiska punkter där $\nabla f = \mathbf{0}$. Vi har de partiella derivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x y(x^2 + 2x - 1) \quad \textit{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x(x^2 - 1).$$

Eftersom exponentialfunktionen är nollskild för alla reella argument har vi $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ om och endast om $x = \pm 1$. Vi har vidare $\frac{\partial f}{\partial x}(\pm 1, y) = 0$ om och endast om $y = 0$.

Detta ger oss således de tvenne kritiska punkterna $(1, 0)$ samt $(-1, 0)$.

För att avgöra dessa kritiska punkters karaktär beräknar vi funktionen f:s andraderivator. Vi har

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x y(x^2 + 4x + 1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x(x^2 + 2x - 1)$$

samt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Vi ser nu genast att $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1, 0) = 0$, vilket betyder att båda de rena andraderivatorna är 0 i de kritiska punkterna. Därmed får den associerade kvadratiska formen till f utseendet Cxy i båda punkterna, för en nollskild konstant C, vilket betyder att dessa är sadelpunkter.

4. (a) Förklara varför funktionen $f(x, y) = 1 - 2x + y$ antar ett största och ett minsta värde under bivillkoret $x^2 + 2y^2 = x$.

   (b) Bestäm dessa värden samt ange i vilka punkter de antas.

   Lösningsförslag

   (a) Vi observerar att bivillkoret $x^2 + 2y^2 = x$ kan skrivas om som $x^2 - x + 2y^2 = 0$, vilket efter kvadratkomplettering får formen $(x - \frac{1}{2})^2 + 2y^2 = \frac{1}{4}$. Denna ekvation beskriver en ellips, som speciellt är en sluten och begränsad och därmed kompakt mängd. Då funktionen f är kontinuerlig antar f enligt satsen om extremvärden ett största och ett minsta värde.

   (b) Sätt $g(x, y) = x^2 - x + 2y^2$. Vi ställer upp det sedvandliga determinantvillkoret för f och g och erhåller

$$0 = \begin{vmatrix} 2x - 1 & 4y \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 1 + 8y.$$

   Detta ger $x = \frac{1}{2} - 4y$. Insättning i bivillkoret $g(x, y) = 0$ ger oss ekvationen

$$\left(\frac{1}{2} - 4y\right)^2 - \frac{1}{2} - 4y + 2y^2 = 0,$$

   vilken har rötter $y = \pm \frac{1}{6\sqrt{2}}$. Vi från detta punkten $p_1 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{6\sqrt{2}})$ där f antar sitt största värde $f(p_1) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, samt punkten $p_2 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{6\sqrt{2}})$ där f antar sitt minsta värde under bivillkoret, nämligen $f(p_2) = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

5. Betrakta funktionen

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

   på mängden $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

   Vad är supremum för f på D? Vad är infimum för f på D?

   Lösningsförslag:

   Först noterar vi att f endast kan anta positiva värden i området D. Att f är obegränsad och därmed har $\sup f = \infty$ kan inses genom att exempelvis betrakta $f(x, x, x) = \frac{x}{3}$ och låta $x \to \infty$. Låter vi istället $x \to 0$ fås $f(x, x, x) \to 0$, vilket visar att $\inf f = 0$.

Teoridel

6. Formulera och bevisa Cauchys integralkriterium.
7. Formulera och bevisa kedjeregeln för sammansatta funktioner av typen $t \mapsto f(g(t), h(t))$.

Skrivningen beräknas vara rättad måndag august 28 2023. Se kurshemsidan för information om återlämning.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys A, 7.5 hp
den 6/3 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *Betrakta funktionen*

$$g(x,y) = \begin{cases} xy \exp(\frac{xy}{x^4+y^4}) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

där som vanligt $\exp(t) = e^t$.

(a) *Är funktionen g kontinuerlig i origo?* 2 p

(b) *Är funktionen g partiellt deriverbar i origo? Bestäm derivatorna i så fall.* 2 p

(c) *Är funktionen g differentierbar i origo?* 1 p

Motivera dina svar!

(a) Vi betraktar $g(x,x) = x^2 \exp(\frac{1}{2x^2})$ och ser att $g(x,x)$ är obegränsad då $x \to 0$, ty $\lim_{x\to 0} x^2 \exp(\frac{1}{2x^2}) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} e^{\frac{1}{2}t} = \infty$ (som oegentligt gränsvärde). Dvs g kan inte vara kontinuerlig i origo.

(b) Antingen ser vi direkt att $g(x,0) = 0$ för alla x. Därmed är g även i origo partiellt deriverbar med avseende på x och derivatan är lika med 0. Samma argument fungerar även för den partiella derivatan med avseende på y.

Eller så kan man använder sig av definitionen direkt, dvs beräkna i detta fall

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0,h) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 \cdot h \exp(\frac{0\cdot h}{0^2+h^2}) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 = g_y'(0,0).$$

(c) Nej, enligt (a) är g ej kontinuerlig, och därmed kan den inte vara differentierbar.

Svar: (a) Nej, ej kontinuerlig (b) Ja, $g_x'(0,0) = g_y'(0,0) = 0$ (c) Nej, ej differentierbar.

2. (a) *Bestäm alla stationära punkter till funktionen* 5 p

$$H(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{6}(x-y+z)^4$$

och avgör deras karaktär. Antar H ett största och/eller minsta värde i $\mathbb{R}^3$? Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} Hx' &= 2x - \frac{2}{3}(x-y+z)^3 = 0 \\ H_y' &= 2y + \frac{2}{3}(x-y+z)^3 = 0 \\ H_z' &= 2z - \frac{2}{3}(x-y+z)^3 = 0 \end{aligned}$$

Subtraktion av den första och den andra ekvationen, samt den andre och den tredje leder till

$$x + y = 0 \qquad \text{och} \qquad y + z = 0$$

, dvs $x = -y$ och $z = -y$. Insättning i t.ex. den andra ekvationen ger då

$$y(1 - (3y)^2) = 0,$$

vilket ger oss tre lösningar för y, nämligen $y = 0$ och $y = \pm\frac{1}{3}$. Därmed har vi tre stationära punkter, nämligen $(0,0,0)$ och $(\mp\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \mp\frac{1}{3})$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$H''_{xx} = H''_{yy} = H''_{zz} = 2-2(x-y+z)^2 \qquad H''_{xy} = H''_{yz} = 2(x-y+z)^2 \qquad H''_{xz} = -2(x-y+z)^2.$$

För punkten $(0,0,0)$ är den kvadratiska formen

$$Q_0(h,k,\ell) = 2h^2 + 2k^2 + 2\ell^2$$

positivt definit och punkten är därmed en lokal minimipunkt. I punkterna $(\mp\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \mp\frac{1}{3})$ gäller $(x-y+z)^2 = 1$ och därmed har båda punkterna samma kvadratiska fom

$$Q(h,k,\ell) = 4hk - 4h\ell + 4k\ell.$$

Den är indefinit, ty t.ex. $Q(h,k,0) = 4hk$ antar både positiva och negativa värden. Punkterna är därmed sadelpunkter.

H är både nedåt och uppåt obegränsad, ty $H(x,x,0) = x^2 \to \infty$, då $x \to \infty$ och $H(x,0,0) = x^2 - \frac{1}{6}x^4 = x^2(1-\frac{1}{6}x^2) \to -\infty$, då $x \to \infty$.

Svar: $(0,0,0)$ är en lokal minimipunkt och $(\mp\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \mp\frac{1}{3})$ är sadelpunkter.
Varken minsta eller största värde antas.

(b) *Låt G vara en $\mathcal{C}^3$-funktion som har Taylorutvecklingen* *1 p*

$$G(x,y) = (x-1) + y + (x-1)^2 + y^2 + ((x-1)^2 + y^2)^{3/2} B(x,y)$$

kring $(1,0)$. Är $(1,0)$ en lokal minimipunkt för G? Motivera ditt svar!

Från Taylorutvecklingen kan vi avläsa $G'_x(1,0) = 1$ (och även $G'_y(1,0) = 1$). Alltså är $(1,0)$ inte en stationär punkt och kan därmed (ty G differentierbar) inte vara en lokal extrempunkt.

3. *Avgör om funktionen* *6 p*

$$h(x,y) = (x+y-1)e^{2(x^2+y^2)}$$

antar största och minsta värde i $D = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 < 2\}$ och bestäm dessa i så fall.

Vi börjar med att konstatera att funktionen h är kontinuerlig (faktiskt i hela $\mathbb{R}^2$). Området D är den delen av den öppna cirkelskivan med radie $\sqrt{2}$ och medelpunkt i origo, som ligger i den slutna första kvadranten. D är alltså begränsad, men inte sluten, dvs inte kompakt.

Vi ser dock att funktionen är noll längs linjen $y = 1-x$ och är negativ i den kompakta triangeln $D_- := D = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1-x\}$, medan den är positiv i resterande delen av området $D \setminus D_-$. Därmed antar h ett minsta värde i D_- som även är minsta värde i D.

För att undersöka om h antar även största värde kan vi använda oss av polära koordinater och uppskatta

$$h(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (r(\cos\varphi+\sin\varphi)-1)e^{2r^2} = (r\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})-1)e^{2r^2} < (\sqrt{2}\sqrt{2}-1)e^{2r^2} < e^4,$$

där vi också vet att olikheten är strikt, ty $r < \sqrt{2}$. I uppskattningens första steg har vi sett att (för givet r blir funktionen störst längs linjen $\varphi + \frac{\pi}{4}$, dvs $x = y$. Alltså kollar vi h längs denna linje mot randen av cirkelskivan, dvs $\lim\limits_{x\to 1} h(x,x) = \lim\limits_{x\to 1}(2x-1)e^{4x^2} = e^4$. Då vet vi att h antar värden godtyckligt nära e^4, men å andra sidan har vi sett att $h(x,y) < e^4$ i D. Alltså finns inget största värde.

Det återstår nu att beräkna det minsta värdet. Vi börjar med att kolla stationära punkter, dvs ekvationssystemet

$$\begin{aligned} h'_x &= e^{2(x^2+y^2)}(1 + 4x(x+y-1)) = 0 \\ h'_y &= e^{2(x^2+y^2)}(1 + 4y(x+y-1)) = 0. \end{aligned}$$

Vi får $x = y$ och insättning i t.ex. den första ekvationen ger ingen lösning, dvs det finns inga stationära punkter. Sedan kollar vi randen av triangeln D_-. Längs linjestycket $(t, 0)$ för $0 \leq t \leq 1$ får man (efter lite räkning) en möjlig inre punkt, nämligen $(\frac{1}{2}, 0)$ och av symmetriskäl även $(0, \frac{1}{2})$ på linjestycket på y-axeln. Längs triangelns hypotenus är funktionen 0. Vi måsta alltså jämföra följande värden

$$h(\frac{1}{2}, 0) = h(0, \frac{1}{2}) = -\sqrt{\frac{e}{4}} \qquad h(0,0) = -1 \text{ och } 0.$$

Minsta värdet är då -1.

Svar: Minsta värde: -1, största värde saknas.

4. *Undersök om funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ antar ett största och/eller minsta värde längs den givna kurvan.*

   (a) $x^2 + xy + y^2 = 1$ *1 p*

   (b) $x^2 + 12xy + y^2 = 1.$ *1 p*

   (c) Välj EN kurva, dvs antingen (a) eller (b), och ange för denna kurva största och/eller minsta värde (i fall de finns). *3 p*

Motivera dina svar! Funktionen f är kontinuerlig. En möjlighet är att konstatera att båda kurvor faktiskt är kegelsnitt, antingen ellipser eller hyperbler. Genom kvadratkomplettering kan vi avgöra vilket fall inträffar.

(a) $x^2 + xy + y^2 = 1$ kan skrivas som $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$. Alltså är kurvan en ellips, dvs sluten och begränsad, och f antar både största och minsta värde på kurvan. (OBS i fall man inte känner igen att det handlar sig om en ellips ser man från kvadratkompletteringen i alla fall att kurvan är begränsad, ty man får begränsningar $\frac{3}{4}y^2 \leq 1$ och $(x + \frac{y}{2})^2 \leq 1$.)

(b) $x^2 + 12xy + y^2 = 1.$ kan skrivas som $x^2 + 12xy + y^2 = (x + 6y)^2 - 35y^2 = 1$. Alltså är kurvan en hyperbel. Eftersom den är obegränsad kommer f anta godtyckligt stora värden (f mäter ju avståndet till origo i kvadrat) och inget största värde antas. Minsta värdet antas dock, ty vi kan välja en stor sluten cirkelskiva, då antar f minsta värdet på den slutna mängden som utgörs av kurvan som ligger innanför cirkelskivan. Detta är även minsta värdet på hela kurvan, ty funktionsvärden utanför är säkert större än cirkelskivans radie i kvadrat. (OBS: Även här kan man argumentera utan att känna igen hyperbeln, t.ex. genom att visa att för varje x finns det ett y, sådan att punkten (x, y) ligger på kurvan, dvs den är obegränsad.)

1 p

(c) För att beräkna minsta/största värdet kan vi använda oss av två metoder, för omväxlings skull ange jag här den ena för (a) och den andra för (b):

(a) Vi använder oss av Lagrangemultiplikatormetoden, där alltså $f(x, y) = x^2 + y^2$ och $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$. Vi börjar med att kolla om det finns en singular punkt på kurvan. Den enda lösningen till grad$g = (2x + y, x + 2y) = (0, 0)$ är $(0, 0)$, men $g(0, 0) \neq 0$, dvs punkten ligger inte på kurvan. Hjälpfunktionen är nu

$$H(x, y; \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$$

och vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} H'_x &= 2x - \lambda(2x + y) = 0 \\ H'_y &= 2y - \lambda(2x + y) = 0 \end{aligned}$$

samt

$$H'_\lambda = -(x^2 + xy + y^2 - 1). = 0$$

Elimination av λ ger (efter lite räkning!) $x = \pm y$. I första fallet ger bivillkoret att $x^2 = \frac{1}{3}$ och därmed funktionsvärdet $\frac{2}{3}$, medan det andra fallet ger $x^2 = 1$ och därmed funktionsvärdet 2. Minsta värdet är alltså $\frac{2}{3}$ och största värdet 2.

(b) Ett alternativ är att använda det nödvändiga villkoret att grad$f$ och grad$g$ ska vara parallella direkt med hjälp av determinanten, dvs vi har ekvationen

$$\det\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x+y & 2x+y \end{pmatrix} = 0$$

Vi får igen $x^2 = y^2$, men nu leder enbart $x = y$ till en lösning, nämligen $x^2 = \frac{1}{14}$, medan $x = -y$ inte ger någon lösning. Minsta värdet är alltså $\frac{2}{14}$.

Svar: (a) Både största och minsta värde antas (b) Endast minsta värde antas

(c) I (a) är minsta värde $\frac{2}{3}$ och största värde 2. I (b) är minsta värde $\frac{2}{14}$.

5. *Lös för $x, y > 0$ den partiella differentialekvationen* *4 p*

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = x$$

t.ex. genom att använda variabelbytet $s = xy$ och $t = \frac{x}{y}$.

Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(s,t) := F(x,y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F'_y &= \widetilde{F}'_s \cdot y + \widetilde{F}'_t \cdot \frac{1}{y} \\ F'_z &= \widetilde{F}'_s \cdot x + \widetilde{F}'_t \cdot \frac{-x}{y^2} \end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då (efter lite räkning)

$$\widetilde{F}'_s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{s}}.$$

Integration leder till

$$\widetilde{F}(s,t) = \sqrt{st} + \phi(t)$$

och därmed

$$F(x,y) = x + \phi(\frac{x}{y}),$$

där ϕ är en tillräckligt många gånger deriverbar funktion.

Svar: allmänna lösning $F(x,y) = x + \phi(\frac{x}{y})$

6. *(a) Undersök om följande serier är konvergenta:* *2 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n^2}} - 1)$$

(b) Undersök om den generaliserade integralen *2 p*

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}\, dx$$

är konvergent.

(a) Observera $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1$.

För första serien ser vi därför att termerna $n(e^{\frac{1}{n}} - 1) \to 1$ då $n \to \infty$, dvs termerna går inte mot 0 och serien kan inte vara konvergent. För den andra och tredje serien kan vi använda jämförelsekriteriet II och jämföra med den konvergenta serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. I båda fall blir gränsvärdet 1 och serierna är konvergenta. (OBS: För en fullständig lösning ska dessa gränsvärden beräknas!)

(b) Integralen är generaliserad både i $x = 0$ och vid ∞ och vi delar därför integralen upp i två delar som undersöks var för sig:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}\,dx.$$

Maclaurinutvecklingen av $\arctan x^2$ leder oss till att använda jämförelsekriteriet II och vi beräknar

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \ldots = 1.$$

Eftersom den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent är enligt jämförelsesatsen även $\int_0^1 \frac{\arctan x^2}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ konvergent.
I den andra integralen är däremot $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ dominerande. Ty $\lim_{x\to\infty} \arctan x^2 = \frac{\pi}{2}$ och igen jämförelsekriteriet II ger att även den andra integralen är konvergent, ty $\int_0^1 \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent.

Svar: (a) divergetn, konvergent, konvergent (b) konvergent

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys A, 7.5 hp
den 17/4 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *(a) Bestäm gränsvärdet* $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to\infty}\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ *eller visa att det inte finns.* *1 p*

   (b) Bestäm gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ *eller visa att det inte finns.* *1 p*

   (c) Bestäm gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$ *eller visa att det inte finns.* *1 p*

   (d) För vilket värde på c är funktionen

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ c & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   kontinuerlig? *1 p*

   Motivera dina svar!

   (a) $\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}=\sin(xy)\cdot\dfrac{1}{x^2+y^2}$ är en begränsad funktion (nämligen $\sin(xy)$) gånger en funktion som går mot 0 (nämligen $\dfrac{1}{x^2+y^2}$) då $x^2+y^2\to\infty$. Alltså är $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to\infty}\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}=0$.

   (b) Om vi sätter $x=y$ får vi $\dfrac{\sin(x^2}{2x^2}\to\frac{1}{2}$ då $x\to 0$,
   men om vi sätter $x=0$ så får vi $\dfrac{\sin(0)}{y^2}=0$. Alltså kan $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ inte finnas.

   (c) Om vi nu försöker på samma sätt som i (b) skulle vi få samma gränsvärde i båda fall. Vi kollar därför med polära koordinater och får $\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\dfrac{\sin\left(r^3\cos^2\varphi\sin\varphi\right)}{r^2}$ som för båda $\cos\varphi=0$ eller $\sin\varphi=0$ är lika med noll. Annars kan vi förlänga och får

$$\frac{\sin\left(r^3\cos^2\varphi\sin\varphi\right)}{r^2}=\frac{\sin\left(r^3\cos^2\varphi\sin\varphi\right)}{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}\cdot\cos^2\varphi\sin\varphi\cdot r.$$

   När $r\to 0^+$ går första faktorn mot 1 och är därmed som andra faktorn begränsad, medan tredje faktorn, nämligen r, går mot 0, alltså är gränsvärdet i alla fall $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$.

   (d) $c=0$, eftersom endast då gäller $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=g(0,0)$.

   Svar: (a) 0 (b) existerar ej (c) 0 (d) $c=0$.

2. *Bestäm alla stationära punkter till funktionen* *6 p*

$$F(x,y)=3x^4-6x^2y+2y^3+7$$

   och avgör deras karaktär.

   Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned}F'_x &= \ldots = & 12x(x^2-y)=0\\ F'_y &= \ldots = & 6(-x^2+y^2)=0\end{aligned}$$

   Den första ekvationen har två olika fall, antingen $x=0$ eller $x^2=y$. I första fallet, $x=0$ ger den andra ekvationen även $y=0$. I andra fallet, $x^2=y$, blir den andra ekvationen

$y^2 - y = 0$. Det ger oss $y = 1$ och $y = 0$. Och därmed har vi hittat tre stationära punkter, nämligen $(0, 0)$ och $(\pm 1, 1)$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$F''_{xx} = 36x^2 - 12y \qquad F''_{xy} = -12x \qquad F''_{yy} = 12y.$$

För punkten $(1, 1)$ är den kvadratiska formen

$$Q(h, k) = \ldots = 24h^2 - 24hk + 12k^2 = 24(h - k/2)^2 + 6k^2,$$

medan för punkten $(-1, 1)$ är den kvadratiska formen

$$Q(h, k) = \ldots = 24h^2 + 24hk + 12k^2 = 24(h + k/2)^2 + 6k^2.$$

Båda kvadratiska former är alltså positivt definit och punkterna är därmed lokala minimipunkter.
I punkten $(0, 0)$ däremot är den kvadratiska formen identisk noll, dvs semidefinit och den avgör inte karaktären hos den stationära punkten. Men om vi betraktar funktionen F längs y-axeln så ser vi att $F(0, y) = 2y^3 + 7$ antar både värden som är större och värden som är mindre än $7 = F(0, 0)$. Punkten är därmed en sadelpunkt.

Svar: $(0, 0)$ är en sadelpunkt och $(\pm 1, 1)$ är lokala minimipunkter.

3. *Avgör om funktionen* *5 p*

$$f(x, y, z) = (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)e^{x^2+y^2+z^2}$$

antar största och/eller minsta värde i $\mathbb{R}^3$ *och bestäm dessa i så fall.*

Vi observerar först att $f(x, 0, 0) = (1-x^2)e^{x^2} \to -\infty$ då $x \to \infty$, dvs. f är ej nedåt begränsad och saknar därmed minsta värde.

Vidare kan vi konstatera att $f(x, y, z) \geq 0$ för alla punkter (x, y, z) som ligger i ellipsoiden $E := \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1\}$. Eftersom E är kompakt och f är kontiniuerlig antar f ett största värde på E, som även är största värde av f i $\mathbb{R}^3$ ty $f(x, y, z) < 0$ utanför E.

Eftersom f är noll på randen av E antas största värdet i det inre av E, närmare bestämd i en stationär punkt av f.

Vi betraktar alltså ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
f'_x &= \ldots = & 2x(-x^2 - 2y^2 - 3z^2)e^{x^2+y^2+z^2} = 0 \\
f'_y &= \ldots = & 2y(-1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)e^{x^2+y^2+z^2} = 0 \\
f'_z &= \ldots = & 2z(-2 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)e^{x^2+y^2+z^2} = 0
\end{aligned}$$

Den andre och den tredje ekvationen implicerar direkt att $y = 0$ respektive $z = 0$. Då ger första ekvationen att även $x = 0$. Alltså finns bara en stationär punkt, nämligen origo, som dessutom ligger i E och största värdet är $f(0, 0, 0) = 1$.

Svar: största värde 1, minsta värde saknas.

4. *Undersök om funktionen* $h(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$ *antar ett största och/eller minsta värde längs kurvan* $x^3 + y^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Bestäm dem i förekommande fall.* *5 p*

Kurvan är obegränsad, ty för varje $x_0 \in \mathbb{R}$ finns det y_0 sådan att punkten $(x_, y_0)$ ligger på kurvan.

Funktionen $h(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$ beror endast på $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dvs. avståndet till origo. Dessutom är $\arctan(r^2)$ en strikt växande funktion (i variablen r).

Om vi betraktar den slutna cirkelskivan $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, så finns det säkert punkter av kurvan i den. Skärningen av kurvan med den slutna cirkelskivan är alltså icke-tom och dessutom kompakt (ty kurvan är sluten) och därmed antar h ett minsta värde där.

Pga. monotonin är funktionsvärdena inom B säkert mindre än utanför B och minsta värdet inom B är alltså minsta värdet på hela kurvan.

Däremot finns inte största värde. Eftersom kurvan är obegränsad finns säkert punkter (x_n, y_n) på kurvan sådana att $x_n^2 + y_n^2 \to \infty$ och därmed $h(x_n, y_n) \to \frac{\pi}{2}$, men för ingen punkt (i hela planet) gäller att $h(x, y) = \frac{\pi}{2}$.

För att hitta minsta värdet undersöker vi punkterna där $\operatorname{grad} h$ och $\operatorname{grad} g$ är parallella (här betecknar g funktionen som beskriver bivillkoret, dvs $g(x, y) = x^3 + y^3 - \frac{1}{\sqrt{2}}$):

$$\begin{vmatrix} \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2} & 3x^2 \\ \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2} & 3y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Med lite omskrivning blir ekvationen

$$xy(y - x) = 0.$$

Då får vi tre punkter på kurvan $(0, \frac{1}{2^{1/6}})$, $(\frac{1}{2^{1/6}}, 0)$ och $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Jämförelse av funktionsvärdena ger

$$h\big(0, \frac{1}{2^{1/6}}\big) = h\big(\frac{1}{2^{1/6}}, 0\big) = \arctan\big(\frac{1}{2^{1/3}}\big)$$
$$h\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big) = \arctan(1).$$

Eftersom arctan är en strikt växande funktion är $= \arctan(\frac{1}{2^{1/3}}) < \arctan(1)$ och därmed är minsta värdet $\arctan(\frac{1}{2^{1/3}})$.

Svar: minsta värde $\arctan(\frac{1}{2^{1/3}})$, största värde saknas.

5. *(a) Visa att för en $\mathcal{C}^2$-funktion f skrivs uttrycket $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ i polära koordinater (dvs $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) som $r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$.* *3 p*

   Tips: Det kan vara bra att börja med att beräkna derivatorna med avseende på r.

   (b) Lös (för $r > 0$) den partiella differentialekvationen *2 p*

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x^2 + y^2) f.$$

(a) Vi betraktar funktionen $\widetilde{f}(r, \varphi) := f(x, y)$ och beräknar (enligt tipset) $\widetilde{f}''_{rr}$.

$$\begin{aligned} \widetilde{f}'_r &= f'_x \cdot x'_r + f'_y \cdot y'_r = f'_x \cdot \cos\varphi + f'_y \cdot \sin\varphi \\ \widetilde{f}''_{rr} &= \big(f'_{xx} \cdot \cos\varphi + f'_{xy} \cdot \sin\varphi\big)\cos\varphi + \big(f'_{yx} \cdot \cos\varphi + f'_{yy} \cdot \sin\varphi\big)\sin\varphi \\ &= f'_{xx} \cdot \cos^2\varphi + 2f'_{xy} \cdot \sin\varphi\cos\varphi + f'_{yy} \cdot \sin^2\varphi \end{aligned}$$

Alltså är

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = x^2 f'_{xx} + 2xy f'_{xy} + y^2 f'_{yy}.$$

(b) Differerentialekvationen blir då

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - f = 0,$$

som är en linjär ekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Den karakteristiska ekvationen är $\lambda^2 - 1 = 0$ med lösningar $\lambda = \pm 1$. Och därmed är den allmänna lösningen

$$\widetilde{f}(r, \varphi) = A(\varphi)e^r + B(\varphi)e^{-r}$$

där "konstanterna" A och B beror på den andra variablen φ. I de ursprungliga variablerna x och y kan lösningen skrivas som

$$f(x,y) = C\Big(\frac{x}{y}\Big)e^{\sqrt{x^2+y^2}} + D\Big(\frac{x}{y}\Big)e^{-\sqrt{x^2+y^2}},$$

där C och D är tillräckligt många gånger deriverbara funktioner. (OBS: $\frac{x}{y} = \cot\varphi$ och beror alltså endast på φ).

Svar: allmänna lösning $f(x,y) = C\Big(\frac{x}{y}\Big)e^{\sqrt{x^2+y^2}} + D\Big(\frac{x}{y}\Big)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

6. *(a) Undersök om följande serier är konvergenta:* *3 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-50}{n^2}(-1)^n$$

(b) För vilka värden på α är den generaliserade integralen *2 p*

$$\int_0^1 \frac{5+\arctan x}{x^\alpha}\,dx$$

konvergent? Motivera ditt svar!

(a) Den första serien är konvergent enligt kvotkriteriet:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ldots = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4}.$$

För den andra serien kan vi använda ett av jämförelsekriterierna, t.ex. jämförelsekriteriet I:

$$0 \le \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} \le \frac{\sqrt{2n}}{n^2} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}$$

Eftersom serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ är konvergent är även den andra serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}$ konvergent.

Den tredje serien är alternerande och vi försöker använda Leibniz-kriteriet. Vi ser direkt $a_n = \frac{n-50}{n^2} \to 0$ då $n \to \infty$. Dock kan vi konstatera att $a_n > 0$ endast för $n > 50$ och det är inte tydligt om följden är monoton (som också är förutsättningar i Leibniz-kriteriet). En möjlighet är att undersöka differensen

$$a_n - a_{n+1} = \ldots = \frac{n^2+n-50}{n^2(n+1)^2},$$

som är alltså positiv för tillräckligt stora n (Vi behöver inte beräkna för vilka n). Då implicerar Leibniz-kriteriet att även den tredje serien är konvergent.

(b) Den generaliserade integralen är generaliserad endast i 0. Vi använder jämförelsekriteriet II

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{5+\arctan x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 5$$

för att konstatera att den generaliserade integralen i fråga är konvergent precis om den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ är konvergent, vilket är fallet precis om $\alpha < 1$.

Svar: (a) konvergent, konvergent, konvergent (b) konvergent för $\alpha < 1$, annars divergent

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys A, 7.5 hp
den 15/8 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *Berakta funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x-1)}{(x-1)^2+y^2} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}.$$

(a) *Visa att funktionen f är kontinuerlig i hela sin definitionsmängd.* *2 p*

(b) *I vilka punkter f är partiellt deriverbar?* *2 p*

(c) *I vilka punkter f är differentierbar?* *1 p*

Till att börja med kan vi konstatera att funktionen är en sammansättning av differentierbara funktioner utom i punkten $(1,0)$ och är differentierbar (och därmed även kontinuerlig och partiellt deriverbar) i $\mathbb{R} \setminus (1,0)$. Vi behöver alltså endast undersöka $(1,0)$.

(a) Vi använder polära koordinater med center $(1,0)$, dvs $x = 1 + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ och får

$$f(x,y) = \frac{r^2\sin^2\varphi \cdot r\cos\varphi}{r^2} = r\sin^2\varphi\cos\varphi \to 0, \text{ då } (x,y) \to (1,0),$$

ty $\sin^2\varphi\cos\varphi$ är begränsat och $r \to 0$. Alltså har vi fått att

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0 = f(1,0),$$

dvs f är kontinuerlig även i $(1,0)$.

(b) Vi ser direkt att $f(1,y) = 0$ för alla y och $f(x,0) = 0$ för alla x. Alltså finns de partiella derivatorna i $(1,0)$ och är lika med 0.

(c) För att undersöka på differentierbarhet kollar vi

$$\frac{f(1+h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \ldots = \frac{k^2h}{(h^2+k^2)^{3/2}}.$$

Om vi sätter t.ex. $h = k$, ser vi att uttrycket vidare är lika med $\frac{1}{2^{3/2}}$ och därmed inte går mot 0.

Svar: a) <u>se ovan</u> b) <u>partiellt deriverbar i hela $\mathbb{R}$</u> c) <u>differentierbar i $\mathbb{R} \setminus (1,0)$</u>.

2. (a) *Avgör om funktionen f från uppgift ovan antar största och minsta värde i området* *3 p*

$$D = \{(x,y) : |y| \leq \sqrt{3}\,x\}.$$

(b) *Bestäm dessa extremvärden i förekommande fall.* *2 p*

(a) Vi ser först att $f(x,x) = \frac{x^2(x-1)}{(x-1)^2+x^2} = \frac{x^3-x^2}{2x^2-2x+1}$ växer över alla gränser då $x \to \infty$. (OBS: linjen (x,x) för $x \geq 0$ ligger i området D.) Därmed finns inget största värde.

Sen betraktar vi området $D_- := \{(x,y) \in D,\ x \leq 1\}$. Området är kompakt, funktionen f är kontinuerlig på D_- (ty den är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^2$ enligt 1.(a)) . Därför antar f minsta värde i D_-. Men f på D_- antar bara icke-positiva värden, medan på $D \setminus D_-$ är värdena icke-negative. Alltså är minsta värdet på D_- även minsta värde på hela D.

(b) För att bestämma minsta värdet av f i D måste vi bestämma minsta värdet av f i det kompakta området D_-. Vi börjar med att undersöka om det finns stationära punkter i det inre av D_-. (OBS: Det inre av D_- innehåller inte punkten $(1,0)$ och därmed är h differentierbar i det inre av D_-.)

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \ldots = y^2 \frac{y^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2} = 0. \\ f'_y(x,y) &= \ldots = \frac{2y(x-1)^3}{((x-1)^2+y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Andra ekvationen är uppfylld endast om antingen $x = 1$ eller $y = 0$. Första fallet kan inte inträffa i det inre av D_-, ty då är $x < 1$. Om $y = 0$ så är även första ekvationen uppfylld och alla punkter på sträcken $(x, 0)$ med $0 < x < 1$ är stationära punkter. I dessa punkter är dock $h(x, 0) = 0$.

Det återstår att kolla randen, som består av

i. sträckan $(1, y)$ för $|y| \leq \sqrt{3}$

ii. sträckorna $(x, \pm\sqrt{3}x)$ för $0 < x < 1$.

Längs sträckan $(1, y)$ är $h(1, y) = 0$.

Längs sträckorna $(x, \pm\sqrt{3}x)$ undersöker vi hjälpfunktionen

$$H(x) := f(x, \pm\sqrt{3}x) = \ldots = \frac{3(x^3-x^2)}{4x^2-2x+1} \text{ för } 0 < x < 1.$$

Derivatan blir $H'(x) = \ldots = \frac{3x}{(4x^2-2x+1)^2}(4x^3-4x^2+5x-2)$. Vi kan gissa ett nollställe $x = \frac{1}{2}$ och polynomdivision visar att det inte finns andra nollställen i intervallet. Eftersom $H(\frac{1}{2}) = \ldots = -\frac{3}{8}$ är sammanlagt minsta värdet av f i D_-, och därmed även i D, lika med $-\frac{3}{8}$.

Svar: a) inget största värde, men minsta värde b) minsta värde är $-\frac{3}{8}$.

3. *Bestäm för varje värde på $\alpha \in \mathbb{R}$ alla stationära punkter till funktionen* *5 p*

$$g(x, y) = 10 + x^3 + y^3 - 3\alpha xy$$

och avgör deras karaktär.

Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} (I) \quad g'_x &= \ldots = 3(x^2 - \alpha y) = 0 \\ (II) \quad g'_y &= \ldots = 3(y^2 - \alpha y) = 0 \end{aligned}$$

I fall att $\underline{\alpha \neq 0}$ kan vi lösa ut y ur första ekvationen $y = \frac{x^2}{\alpha}$. Andra ekvationen blir då - efter lite omskrivning - $x(x^3 - \alpha^3) = 0$. Den har lösningarna $x = 0$ och $x = \alpha$. Dvs vi har fått stationära punkterna $(0, 0)$ och (α, α). För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$g''_{xx} = 6x \qquad g''_{xy} = g''_{yx} = -3\alpha \qquad g''_{yy} = 6y.$$

I punkten $(0, 0)$ är den kvadratiska formen $Q(h, k) = -6\alpha hk$ och alltså indefinit (ty $\alpha \neq 0$). Därmed är $(0, 0)$ en sadelpunkt.

För punkten (α, α) är den kvadratiska formen $Q(h, k) = \ldots = 6\alpha((h - \frac{1}{2}k)^2 + \frac{9\alpha}{2}k^2$. För $\alpha > 0$ är den positivt definit och punkten är därmed en lokal minimipunkt, medan för för $\alpha < 0$ är den negativt definit och punkten därmed en lokal maximipunkt.

I fall att $\underline{\alpha = 0}$ får vi bara en enda stationär punkt, nämligen $(0, 0)$. Alla andra derivator försvinner och därmed är den kvadratiska formen bara semidefinit och avgör inte punktens karaktär. Men vi kan observera att $g(0, 0) = 10$ medan $g(t, 0) = 10 + t^3$ antar både värden som är större och som är mindre än 10 (i varje omgivning av $t = 0$). Därmed är $(0,0)$ en sadelpunkt.

Svar: $(0,0)$ är alltid en saddelpunkt.
I fall $\alpha > 0$ finns dessutom den lokala minimipunkten (α, α) och i fall $\alpha < 0$ är (α, α) en lokal maximipunkt.

4. *Motivera varför funktionen $h(x,y,z) = x^2 - y^2 + z$ antar ett största och ett minsta värde på ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ samt bestäm dessa.* 5 p

Eftersom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ är kompakt och funktionen h är kontinuerlig, så antar h största och minsta värde på sfären. Vi använder methoden med Langrange-multiplikator och inför hjälpfunktionen

$$F(x,y,z;\lambda) := x^2 - y^2 + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4).$$

Partiell derivering ger följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} 2x - 2x\lambda &= 0 \\ -2y - 2y\lambda &= 0 \\ 1 - 2z\lambda &= 0 \end{aligned}$$

samt

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Eller på ekvivalent form

$$\begin{aligned} x(1-\lambda) &= 0 \\ y(1+\lambda) &= 0 \\ 1 - 2z\lambda &= 0 \end{aligned}$$

samt fortfarande

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Från den första ekvationen för vi antingen $x = 0$ eller $\lambda = 1$.

I fall $x = 0$ är (i den andra ekvationen) antingen $y = 0$ och därmed (från bivillkoret) $z = \pm 2$ eller $\lambda = -1$ och därmed från tredje ekvationen $z = -\frac{1}{2}$ och (från bivillkoret) $y^2 = \frac{15}{4}$. Motsvarande funktionsvärden är ± 2 och $-\frac{17}{4}$.

I fall $\lambda = 1$ får vi $y = 0$ och $z = \frac{1}{2}$ och (från bivillkoret) $x^2 = \frac{15}{4}$, där funktionsvärdet blir $\frac{17}{4}$.

Svar: Minsta värde $-\frac{17}{4}$ och största värde $\frac{17}{4}$.

5. *Lös följande partiella differentialekvation för funktionen $F(x,y)$* 5 p

$$\frac{\partial F}{\partial x} + 2x\frac{\partial F}{\partial y} = F,$$

t.ex. genom variabelbytet

$$\begin{aligned} u &= x \\ v &= y - x^2 \end{aligned} .$$

Bestäm även lösningen som uppfyller $F(x,0) = e^{x^2+x}$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(u,v) := F(x,y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F'_x &= \widetilde{F}'_u \cdot 1 + \widetilde{F}'_v \cdot (-2x) \\ F'_y &= \widetilde{F}^{e\prime}_v \cdot 1. \end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då

$$\widetilde{F}'_u = \widetilde{F}.$$

Detta är en linjär första ordningsdifferentialekvation (i variablen u), som har lösningen $\widetilde{F}(u,v) = C(v) \cdot e^u$, där "konstanten" C är en tillräckligt många gånger deriverbar funktion i den andra variablen v. Därmed får vi den allmänna lösningen

$$F(x,y) = C(y - x^2) \cdot e^x.$$

För den speciella lösningen gäller då

$$F(x,0) = C(-x^2) \cdot e^x = e^{x^2+x}$$

och därmed $C(t) = e^{-t}$.

Svar: Den allmänna lösningen är $F(x,y) = C(y - x^2) \cdot e^x$.
Lösningen som även uppfyller det ytterligare villkoret är $F(x,y) = e^{-y+x^2+x}$.

6. *(a)* *i. För vilka värden på* $\beta > 0$ *är serien* *2 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^\beta+3}$$

konvergent?

ii. Är serien *1 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+2}{n^2+3}$$

konvergent?

(b) Är följande generaliserade integral konvergent eller divergent? *2 p*

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\, dx$$

(a) i. Serien är en positiv serie och vi använder jämförelsekriteriet II

$$\frac{\frac{n^2+2}{n^\beta+3}}{\frac{n^2}{n^\beta}} = \frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^\beta}} \to 1, \text{ då } n \to \infty.$$

Alltså har serien i fråga samma konvergensbeteende som serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^\beta} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta-2}}$.
Den är konvergent precis om exponenten $\beta - 2 > 1$.

ii. Termerna i serien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2+2}{n^2+3}$ går inte mot 0, alltså kan serien ej konvergera.

(b) Integralen är generaliserad både i $x = 0$ och vid ∞ och vi delar därför upp integralen i

$$\int_0^3 \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\, dx + \int_3^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\, dx.$$

För det första integral utvecklar vi integranden

$$\frac{1-\cos x}{x^{5/2}} = \frac{1-(1-\frac{x^2}{2!}+O(x^4))}{x^{5/2}} = \frac{1}{2x^{1/2}} + O(x^{3/2}).$$

Genom att använda jämförelsekriteriet II och t.ex. funktionen $\frac{1}{2x^{1/2}}$ ser vi att den första generaliserade integralen är konvergent, ty $\int_0^3 \frac{1}{2x^{1/2}}\, dx$ är konvergent.
För den andra integralen kan vi t.ex. uppskatta integranden

$$\left| \frac{1-\cos x}{x^{5/2}} \right| \le \frac{2}{x^{5/2}}.$$

Eftersom $\int_3^{\infty} \frac{2}{x^{5/2}}\, dx$ är konvergent är enligt jämförelsekriteriet I även den andra integralen ovan konvergent.

Svar: (a) i. konvergent för $\beta > 3$. ii. divergent. (b) konvergent

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag
Analys A, 7.5 hp
den 14/10 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *Betrakta funktionen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) *Visa att gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ inte finns.* *1 p*

(b) *Är g partiellt deriverbar i origo?* *2 p*

(c) *Tillhör g klassen $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?* *2 p*

Motivera dina svar!

(a) Vi ser att t.ex. $g(t,0) = 0$ för alla t, medan $g(t,t^3) = \ldots = \frac{1}{2}$ för alla $t \neq 0$, alltså kan gränsvärdet inte finnas.

(b) Vi kollar direkt definitionen. Då ser vi att $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = 0$ och $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = 0$ och därmed är g partiellt deriverbar i origo.

(c) Eftersom gränsvärdet i (a) inte existerar kan funktionen g inte vara kontinuerlig i origo. vilket även innebär att g inte tillhör klassen $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Svar: a) se ovan b) ja c) nej.

2. *Avgör om $F(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+1}{x^4+y^4}$ antar största och/eller minsta värde i mängden D och bestäm dessa extremvärden i förekommande fall.*

(a) *$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \geq 1\}$* *3 p*

(b) *$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$* *2 p*

Vi konstaterar först att $F(x,y) > 0$ samt att t.ex. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x,0) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^4} = 0$. Alltså är alla funktionsvärden strikt större än noll, men det finns funktionsvärden godtyckligt nära noll. Dvs F har i båda fall inget minsta värde.

När vi tittar på funktionen så verkar det som att i fallet (a) är funktionen begränsad och blir liten för punkter långt bort från origo, medan i (b) verkar den vara obegränsad. Pga denna förmodan blir strategin att undersöka angående maximum olika i (a) respektive (b).

(a) Vi börjar med att beräkna $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} F(x,y)$. Det kan vi göra på olika sätt, t.ex. med polära koordinater

$$0 \leq F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^2+1}{r^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)} = \ldots = \frac{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi} \leq \frac{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}}{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Alltså har vi $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} F(x,y) = 0$ och därmed finns till varje $\epsilon > 0$ ett tal R sådan att $F(x,y) < \epsilon$ för alla (x,y) med $\sqrt{x^2+y^2} > R$. För att kunna göra ett lämpligt val av ϵ kollar vi stationära punkter i D samt funktionsvärden på randen $x^2+y^2 = 1$. Vi börjar med stationära punkter. Vi får ekvationssystemet

$$F'_x(x,y) = \frac{2x(x^4+y^4)-(x^2+y^2+1)4x^3}{(x^4+y^4)^2} = 0.$$

$$F'_y(x,y) = \frac{2y(x^4+y^4)-(x^2+y^2+1)4y^3}{(x^4+y^4)^2} = 0.$$

Multiplikation av den första ekvationen med y och den andra med x samt subtraktion leder till

$$(x^2 + y^2 + 1)(4x^3y - 4xy^4) = 0,$$

och därmed $xy(x^2 - y^2) = 0$. Insättning i t.ex. den första ekvationen visar att $x = 0$ skulle leda till $y = 0$, liksom $y = 0$ till $x = 0$. Men eftersom $(0, 0)$ inte ligger i definitionsområdet ger det ingen lösning. Men även $x^2 = y^2$ leder till samma punkt (måste visas!) och därmed finns inga stationära punkter.

På randen har vi $h(\varphi) := F(\cos\varphi, \sin\varphi) = \dfrac{2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}$. Derivering ger

$$h'(\varphi) = \ldots = 8\frac{\sin\varphi\cos\varphi(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2}.$$

I punkterna där derivatan försvinner får vi följande funktionsvärden: Om $\sin\varphi = 0$ eller $\cos\varphi = 0$ blir funktionsvärdet 2, om däremot $\sin^2\varphi = \cos^2\varphi$ så är $\sin^2\varphi = \cos^2\varphi = \frac{1}{2}$ och därmed funktionsvärdet 4.

Om vi nu t.ex. väljer $\epsilon = \frac{1}{7}$ så vet vi enligt ovan att det finns R sådan att $F(x, y) < \frac{1}{7}$ i området $x^2 + y^2 > R^2$. Men området $1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ är kompakt och därför antar den kontinuerliga funktionen F säkert ett största värde där. Detta värde är (enligt våra beräkningar ovan) lika med 4, som därmed är största värdet i hela D.

(b) Om $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ så ligger t.ex. punkterna $(0, t)$ för $t \neq 0$ inom D. Eftersom $F(0, t) = \frac{t^2+1}{t^4}$ växer över alla gränser då $t \to 0$ är F obegränsad och saknar största värde.

Svar: a) minsta värde saknas, största värde 4 b) största och minsta värde saknas.

3. *Bestäm för varje värde på $\alpha \in \mathbb{R}$ alla stationära punkter till funktionen* *5 p*

$$f(x, y) = 2x^3 - 6\alpha^2xy^2 + 3\alpha^3y^4$$

och avgör deras karaktär.

Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcl} (I) \quad f'_x & = & \ldots = 6(x^2 - \alpha^2y^2) = 0 \\ (II) \quad f'_y & = & \ldots = 12\alpha^2y(-x + \alpha y^2) = 0 \end{array}$$

I andra ekvationen har vi tre fall: $\alpha = 0$, $y = 0$ eller $x = \alpha y^2$.

$\alpha = 0$ ger i första ekvationen $x = 0$ och därmed är alla punkter $(0, t)$ för $t \in \mathbb{R}$ stationära punkter.

$y = 0$ implicerar även $x = 0$ och därmed är $(0, 0)$ en stationär punkt för alla α.

$x = \alpha y^2$ leder till $y^2(y^2 - 1) = 0$. Eftersom $y = 0$ redan diskuterades kan vi dra slutsatsen att $y = \pm 1$. I båda fall får vi då $x = \alpha$. Vi får två stationära punkter $(\alpha, \pm 1)$.

För att bestämma karaktär hos de stationära punkterna beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$G''_{xx} = 12x \qquad G''_{xy} = G''_{yx} = -12\alpha^2y \qquad G''_{yy} = -12\alpha^2x + 3 \cdot 12\alpha^3y^2.$$

I punkten $(0, 0)$ försvinner alla andra derivator, och därmed är den kvadratiska formen bara semidefinit och avgör inte punktens karaktär. Men vi kan observera att $G(0, 0) = 0$ och att $G(t, 0) = 2t^3$ antar både värden som är större och som är mindre än 0 (i varje omgivning av $t = 0$). Därmed är för alla värden på α punkten $(0, 0)$ en sadelpunkt.
För punkten $(\alpha, \pm)$ är den kvadratiska formen $Q(h, k) = \ldots = 12\alpha((h \pm \alpha k)^2 + \alpha^2k^2)$. För $\alpha > 0$ är den positivt definit och punkterna är därmed en lokala minimipunkter, medan för för $\alpha < 0$ är den negativt definit och punkterna därmed lokala maximipunkter.

I fall att $\underline{\alpha = 0}$ får vi en hel linje av stationära punkter, nämligen $(0, t)$. I en sådan punkt är funktionsvärdet $G(0, t) = 0$ men $G(x, t) = 2x^3$ kan antar positiva värden för $x > 0$ och negativa för $x < 0$ och därmed är alla dessa punkter saddelpunkter.

Svar: $(0, 0)$ är alltid en saddelpunkt.

Om $\alpha > 0$ finns dessutom de lokala minimipunkter $(\alpha, \pm 1)$

om $\alpha < 0$ är de lokala maximipunkter $(\alpha, \pm 1)$.

om $\alpha = 0$ består hela y-axeln av sadelpunkter.

4. (a) *Avgör om funktionen $h(x, y) = xy$ på kurvan $x^2 + 2xy + 4y^2 = 3$ med $y \geq 0$ har största och/eller minsta värde, och bestäm dessa i så fall.* *4 p*

   (b) *Vilka värden antar funktionen $H(x, y) = \arctan(xy)$ på kurvan $x^2 + 2xy + 4y^2 = 3$ med $y \geq 0$? Använd dina resultat från deluppgift (a) och motivera ditt svar ordentligt!* *1 p*

   (a) Kurvan är en sluten mängd, genom kvadratkomplettering ser vi att kurvan kan skrivas på formen $(x + y)^2 + 3y^2 = 3$, dvs kurvan är begränsad, och därmed kompakt. Då funktionen h är kontinuerlig, så antar h största och minsta värde på kurvan . Eftersom funktionen är kontinuerlig i $\mathbb{R}^2$ och även bivillkoret är given av en kontinuerlig funktion med öppen definitionsmängd, så måste extrempunkterna uppfylla det nödvändiga villkoret att gradienten av h och gradienten av funktionen som ger bivillkoret är linjärt beroende i dessa punkter eller så är de randpunkter till kurvan. Först betraktar vi alltså ekvationssystemet

$$\det \begin{pmatrix} y & 2x + 2y \\ x & 2x + 8y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{samt } (x + y)^2 + 3y^2 = 3.$$

   Beräkning av determinanten ger $4y^2 - x^2 = 0$, dvs $x = \pm 2y$. Insättning i bivillkoret ger (obs här hoppar jag över beräkningen!) två punkter:

$$\Big(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \Big), \quad (1, \frac{1}{2}),$$

   som ger funktionsvärdena $-\frac{3}{2}$ och $\frac{1}{2}$. Därtill kommer kurvans randpunkter där $y = 0$. Dessa är $(\pm\sqrt{3}, 0)$ som ger funktionsvärdet 0.

   (b) Kurvan är bågvis sammanhängande och funktionen är kontinuerlig, alltså antar funktionen h i (a) alla värden mellan sitt minsta värde och sitt största värde, dvs värdemängden är intervallet $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$. Eftersom arctan är kontinuerlig och växande antar då H på kurvan alla värden i intervallet $[-\arctan(\frac{3}{2}), \arctan(\frac{1}{2})]$.

Svar: (a) Minsta värde $-\frac{3}{2}$, största värde $\frac{1}{2}$. (b) intervallet $[-\arctan(\frac{3}{2}), \arctan(\frac{1}{2})]$.

5. (a) *Låt funktionen $G \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ vara en funktion som har följande Taylorutveckling kring punkten $(1, -2)$*

$$G(x, y) = 7+2(x-1)+3(y+2)+\frac{1}{2}\Big(-8(x-1)^2-12(x-1)(y+2)+(y+2)^2\Big)+\big((x-1)^2+(y+2)^2\big)^{\frac{3}{2}}B(x, y),$$

   där B är begränsad i en omgivning av $(1, -2)$. *3 p*

   i. *Ange $G(1, -2)$ och $G'_x(1, -2)$.*

   ii. *Ange tangentplanet till grafen till G i punkten $(1, -2, G(1, -2))$. Går tangentplanet genom origo?*

   iii. *I vilken riktningen växer funktionen snabbast i punkten $(1, -2)$?*

   iv. *Räcker informationen ovan för att ange funktionsvärdet av G i punkten $(\frac{99}{100}, -\frac{200}{101})$? Om ja, ange det! Om nej, förklara varför inte.*

   (b) *Ange en mängd $M \subset \mathbb{R}^2$ som har följande egenskaper: M är varken öppen eller sluten, M är obegränsad och ej bågvis sammanhängande. Förklara även varför din mängd har dessa egenskaper!* *2 p*

(a) i. Vi kan läsa av funktionsvärdet och den partiella derivatan från Taylorutvecklingen: $G(1,-2) = 7$ och $G'_x(1,-2) = 2$.

ii. Tangentplanet till grafen till G i punkten $(1,-2,G(1,-2))$ har ekvationen $z = 7+2(x-1)+3(y+2)$. Origo ligger dock inte på planet, ty $0 \neq 7+2(0-1)+3(0+2)$.

iii. Funktionen växer snabbast i grandientens riktning, vilken i punkt $(1,-2)$ är $(2,3)$.

iv. Nej, formationen ovan räcker inte för att ange funktionsvärdet av G i punkten $(\frac{99}{100}, -\frac{200}{101})$? Vi bara vet att B är begränsad, men vi vet inte hur stor den är i punkten i fråga.

(b) Ett exempel på en sådan mängd är $M := \{(x,y) : x > 2\} \cup \{(0,8)\}$. Mängden består av alla punkter som ligger höger om linjen $x = 2$ samt den enskilde punkten $(0,8)$. Hela linjen $x = 2$ består av randpunkter som dock inte tillhör mängden, alltså är den ej sluten. Punkten $(0,8)$ är också en randpunkt, den tillhör mängden, som därmed inte heller är öppen. M är obegränsad, ty t.ex. alla punkter av formen $(t,0)$ med $t > 2$ tillhör mängden, dvs punkter med godtyckligt stor avstånd till origo. Mängden är ej bågvis sammanhängande, ty det inte går att binda samman punkten $(0,8)$ med någon av de andra punkterna med en kurva som helt ligger i M.

6. (a) *Avgör för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:*

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$

iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{n^2+100}$

(b) *Någon säger: Jag påstår att serien* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ *är konvergent eftersom*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)}{\frac{(-1)^n}{n^2}} = 1.$$

Är det korrekt? Om ja, förtydliga argumentet, dvs ange vilken sats eller vilka satser som används. Om nej, gör ett korrekt resonemang.

(a) i. Genom att använda kvotkriteriet ser vi att $\left|\frac{\frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}\right| = \ldots = (1+\frac{1}{n})^n \to e > 1$ och därmed att serien är divergent.

Alternativt kunde vi t.ex. genom uppskattningen $\frac{n^n}{n!} \geq \frac{n!}{n!} = 1$ kunnat se att termerna inte går mot noll och även så kunnat konstatera att serien är divergent.

ii. Vi ämnar använda rotkriteriet och kollar därför

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}\right|} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

Alltså är serien absolut konvergent.

iii. Vi kollar förutsättningarna för Leibniz-kriterium. Termerna $\frac{n}{n^2+100}$ går mot 0, men vi ser inte direkt om följden är monoton. Därför inför vi hjälpfunktionen

$$h(t) := \frac{t}{t^2+100}$$

och deriverar den med avseende på t. Då får vi $h'(t) = \ldots = \frac{100-t^2}{(t^2+100)^2}$. För $t > 10$ är alltså h, och därmed även följden i fråga, strängt avtagande. Detta är tillräckligt för att kunna använda Leibnitzkriteriet och vi får att serien är konvergent. För att kolla om den även är absolut konvergent undersöker vi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+100}$. Vi ser dock t.ex. $\frac{\frac{n}{n^2+100}}{\frac{1}{n}} \to 1$ och då har serien, enligt jämförelsekriteriet II samma konvergensbeteende som serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, dvs den är divergent.

(b) Argumentet är inte korrekt, ty jämförelsekriterierna får användas enbart för positiva serier. I detta fall kan man istället jämföra serien $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ med serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, dvs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Men eftersom $\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ får vi så att den ursprungliga serien är absolut konvergent.

Svar: (a) divergent, absolut konvergent, betingat konvergent (b) se ovan.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys A, 7.5 hp
den 28/11 2019

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *Betrakta funktionen* $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} : g(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$. *5 p*

   (a) *Undersök om gränsvärdet* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ *finns och bestäm det i förekommande fall.*

   (b) *Undersök om gränsvärdet* $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} g(x,y)$ *finns och bestäm det i förekommande fall.*

   (c) *Ange en kurva, sådan att funktionen* g *är konstant längs kurvan (med enda eventuella undantag att funktionen inte är definierad i origo).*

   Vi börjar med att skriva om funktionen i polära koordinater

$$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \ldots = \arctan\big(\frac{1}{r}(\cos\varphi + \sin\varphi)\big)$$

   (a) Om $r \to 0$ ser vi från omskrivningen ovan att gränsvärdet beror på riktningen φ. Speciellt ser vi t.ex.

$$\lim_{t\to 0+} g(0,t) = \lim_{t\to 0+} \arctan\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{t\to 0} g(t,-t) = \lim_{t\to} \arctan 0 = 0,$$

   dvs $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ finns inte.
   Kommentar: $\lim\limits_{t\to 0-} g(0,t) = \lim_{t\to 0-} \arctan\frac{1}{t} = -\frac{\pi}{2}$ skulle ge ännu ett annat värde.

   (b) I omskrivningen ovan är $\cos\varphi + \sin\varphi$ begränsad och därmed $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} g(x,y) = 0$, ty $\frac{1}{r} \to 0$, funktionen arctan är kontinuerlig och $\arctan 0 = 0$.

   (c) Vi ser direkt att funktionen g är konstant lika med 0 längs den räta linjen $x + y = 0$. Om vi vill även se andra kurvor sätter vi $\dfrac{x+y}{x^2+y^2} = C$. Om $C = 0$ är det precis linjen innan, annars får vi $x^2 - \frac{1}{C}x + y^2 - \frac{1}{C}y = 0$. Genom kvadratkompletteringen får vi

$$(x - \frac{1}{2C})^2 + (y - \frac{1}{2C})^2 = \frac{1}{2C^2},$$

   dvs cirklar med medelpunkt på första medianen och som går genom origo. OBS gränsfallet då radien växer över alla gränser utgörs av den räta linjen $x + y = 0$.

   Svar: a) <u>gränsvärdet existerar ej</u> b) <u>0</u> c) <u>t.ex. $y = -x$.</u>

2. *Avgör om funktionen* $G(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-4}{x^2+5y^2+1}$ *antar största och/eller minsta värde i mängden* $D := \{(x,y) : |y| \leq 1\}$ *och bestäm dessa extremvärden i förekommande fall.* *5 p*

   Vi ser direkt att funktionen är begränsad, ty

$$G(x,y) = \frac{x^2+y^2-4}{x^2+5y^2+1} < \frac{x^2+5y^2+1}{x^2+5y^2+1} = 1.$$

   Vi har alltså $G(x,y) < 1$ men också $\lim\limits_{x\to\infty} G(x,0) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2+1} = 1$. Därmed antar G inte något största värde.

   Vi konstaterar att funktion G är noll längs den delen av cirkellinjen $x^2 + y^2 = 4$ som ligger innanför remsan $|y| \leq 1$. På området $D_- := \{(x,y) : |y| \leq 1, x^2 + y^2 \leq 4\}$ är funktionen icke-positiv, och utanför D_- positiv. Funktionen är kontinuerlig och antar därför ett minsta värde på det kompakta området D_-, som är mindre än noll och därmed även minsta värdet av G på hela området D.

För att bestämma minsta värdet börjar vi med att kolla eventuella stationära punkter i det inre av D_-. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} G'_x(x,y) &= \ldots = \frac{2x(4y^2+5)}{(x^2+5y^2+1)^2} = 0. \\ G'_y(x,y) &= \ldots = \frac{2y(-4x^2+21)}{(x^2+5y^2+1)^2} = 0. \end{aligned}$$

Från den första ekvationen ser vi direkt att $x = 0$ och därmed pga den andra ekvationen även $y = 0$. Den enda stationära punkten är alltså origo.

Randen av D_- består av två cirkelbågar, samt två sträckor med $y = \pm 1$. Längs cirkelbågarna är funktionen noll. Vi kollar alltså längs sträckorna $(t, \pm 1)$ då gränserna för t fås genom att beräkna skärningspunkterna mellan cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ och linjen $y = 1$ (för $y = -1$ blir det samma gränser). Vi får då $x = \pm\sqrt{3}$. Alltså betraktar vi hjälpfunktionen

$$h(t) := g(x, \pm 1) = \frac{x^2-3}{x^2+6} = 1 - \frac{9}{x^2+6} \qquad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}.$$

Derivatan blir då $h'(t) = \dfrac{9 \cdot 2x}{(x^2+6)^2}$, och den är noll precis om $x = 0$. För att får minsta värdet måste vi alltså jämföra

$$g(0,0) = -4 \qquad h(0) = -\frac{1}{2} \qquad h(\pm\sqrt{3}, \pm 1) = 0.$$

Svar: minsta värde -4 största värde finns ej.

3. *Betrakta funktionen* *5 p*

$$f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+2z^2) + xy.$$

Bestäm alla stationära punkter till f och avgör deras karaktär.

Vi konstaterar att funktionen f är definierad för alla punkter i $\mathbb{R}^3$ utom origo $(0,0,0)$ och betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{2x}{x^2+y^2+2z^2} + y = 0 \\ f'_y &= \frac{2y}{x^2+y^2+2z^2} + x = 0 \\ f'_z &= \frac{4z}{x^2+y^2+2z^2} = 0. \end{aligned}$$

Från den tredje ekvationen ser vi direkt att $z = 0$, då blir de första två ekvationer

$$\begin{aligned} (I) \quad \frac{2x}{x^2+y^2} + y &= 0 \\ (II) \quad \frac{2y}{x^2+y^2} + x &= 0. \end{aligned}$$

Om vi multiplicera den första ekvationen med y och den andre med $-x$ och addera dessa två får vi

$$y^2 - x^2 = 0,$$

dvs $y = x$ eller $y = -x$. I första fallet ger den första ekvationen $\dfrac{2x}{2x^2} + x = 0$ eller $1 + x^2 = 0$ som inte har några (reella) lösningar. I andra fallet däremot får vi $1 + x^2 = 0$, dvs $x = \pm 1$. Vi har alltså två stationära punkter $(1, -1, 0)$ och $(-1, 1, 0)$.

För att bestämma karaktär hos de stationära punkterna beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$f''_{xx} = \ldots = 2\frac{-x^2+y^2+2z^2}{(x^2+y^2+2z^2)^2} \qquad f''_{xy} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+2z^2)^2} + 1 \qquad f''_{xz} = \frac{-8xz}{(x^2+y^2+2z^2)^2}.$$

$$f''_{yy} = \ldots = 2\frac{x^2-y^2+2z^2}{(x^2+y^2+2z^2)^2} \qquad f''_{yz} = \frac{-8yz}{(x^2+y^2+2z^2)^2} \qquad f''_{zz} = \ldots = 4\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+2z^2)^2}.$$

För båda stationära punkter är då den kvadratiska formen

$$Q(h,k,\ell) = 0\cdot h^2 + 0\cdot k^2 + 0\cdot \ell^2 + 2\cdot 2\cdot hk + 0\cdot h\ell + 0\cdot k\ell = 4hk + 2\ell^2,$$

som är indefinit. Det ser man t.ex. genom att titta på $Q(t,t,0) = 4t^2$ och $Q(t,-t,0) = -4t^2$, dvs Q antar både positiva och negativa värden.

Svar: De stationära punkterna $(1,-1,0)$ och $(-1,1,0)$ är både sadelpunkter.

4. *Betrakta funktionen $h(x,y) = x^4 + y^4$.* *5 p*

   (a) *Avgör om funktionen h antar på kurvan $x^2 + 6xy + y^2 = 2$ största och/eller minsta värde, och bestäm dessa i förekommande fall.*

   (b) *För vilka värden på $\alpha \in \mathbb{R}$ är funktionen h på kurvan $x^2 + 2\alpha xy + y^2 = 2$ begränsad?*

(a) Kurvan kan skrivas på formen $(x+3y)^2 - 8y^2 = 2$ (ses genom kvadratkomplettering) och är därmed obegränsad (den är en hyperbel, eller så ser man att för varje godtyckligt stor värde på y kan man lösa ut x, dvs kurven innehåller punkter med godtyckligt stor y-koordinat). Därför är även funktionen $h(x,y) = x^4 + y^4$ obegränsad på kurvan och antar därmed inget största värde. Däremot antar funktionen ett minsta värde, ty vi kan inskränka oss på t.ex. en kompakt cirkelskiva med tillräckligt stor radie. Snittet med kurvan är en kompakt mängd och ty h är kontinuerlig antar den ett minsta värde där. Om vi väljer radien tillräckligt stor blir det även minsta värdet för h på hela kurvan.

För att beräkna värdet kollar vi det nödvändiga villkoret:

$$\det\begin{pmatrix} 2x+6y & 4^3 \\ 6x+2y & 4y^3 \end{pmatrix} = 0$$

Faktorisering (efter lite räkning) ger ekvationen

$$8(y-x)(y+x)(3x^2+3y^2+xy) = 0$$

Vi har antingen $y = x$ eller $y = -x$. Den sista faktorn är lika med $3(x+\frac{y}{6})^2 + \frac{11}{12}y^2$, den är noll precis om $y =$ och $x = 0$, men origo ligger inte på kurvan. Alltså har vi två fall:

Fall 1: $y = x$ Genom att stoppa in det i kurvans ekvationen får vi (efter lite räkning) två möjliga minimi-punkter $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Fall 2: $y = -x$ Det finns inga punkter som uppfyller kurvans ekvation (om man stopp in får man $-2x^2 = 1$, som inte har en reell lösning).

Eftersom $h(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = h(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$ är detta alltså minsta värdet.

(b) Vi skriver kurvans ekvation om till $(x+\alpha y)^2 + (1-\alpha^2)y^2 = 2$ (med hjälp av kvadratkomplettering) och har olika fall:
För $\alpha^2 < 1$ är kurvan begränsad (en ellips), och därmed kompakt, den kontinuerliga funktionen h antar därmed största och minsta värde och är alltså begränsad.
För $\alpha^2 > 1$ innehåller kurvan som i (a) punkter med godtyckligt stora y-koordinater och därmed är h obegränsad.
För $\alpha^2 = 1$ består kurvan av två parallella linjer som även i detta fall innehåller punkter med godtyckligt stora koordinater och därför är h ej begränsad.

Svar: (a) Minsta värde $\frac{1}{8}$, största värde finns ej. (b) $-1 < \alpha < 1$.

5. *Bestäm alla C^2-funktioner F som uppfyller differentialekvationen* *5 p*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{4y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{4y^3}\frac{\partial F}{\partial y} = 16y^2$$

i området $y > 0$, t.ex. genom att införa de nya variablerna $s = x + y^2$ och $t = x - y^2$.

Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(s,t) := F(x,y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F''_{xx} &= \widetilde{F}''_{ss} + 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt} \\ F''_{y} &= 2y\widetilde{F}'_s - 2y\widetilde{F}'_t \\ F''_{yy} &= 2\widetilde{F}'_s - 2\widetilde{F}'_t + 4y^2(\widetilde{F}''_{ss} - 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt}). \end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då $4\widetilde{F}''_{st} = 16y^2$ och därmed

$$\widetilde{F}''_{st} = 2s - 2t.$$

Integration leder till

$$\widetilde{F}(s,t) = s^2t - st^2 + h(x + y^2) + g(t)$$

och därmed

$$F(x,y) = 2y^2(x^2 - y^4) + h(x + y^2) + g(x - y^2),$$

där h och g är tillräckligt många gånger deriverbara funktioner.

6. *(a) Avgör för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:* *3 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+400} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^4+400}.$$

(b) Avgör för var och en av följande generaliserade integraler om den är konvergent eller divergent: *2 p*

$$\int_0^{\infty}\frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx \qquad \int_0^{\infty}\frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2-1)}dx.$$

(a) Vi kollar först med hjälp av jämförelsekriteriet II om den första serien är absolut konvergent. Eftersom

$$\frac{\frac{n}{n^2+400}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad \text{då } n \to \infty$$

har serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+400}$ samma konvergensbeteende som $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, dvs den är divergent. Vi kollar om serien är betingat konvergent med hjälp av Leibniz-kriteriet. Termerna $\frac{n}{n^2+400}$ går mot 0, men vi ser inte direkt om följden är monoton. Därför inför vi hjälpfunktionen

$$h(t) := \frac{t}{t^2+400}$$

och deriverar den med avseende på t. Då får vi $h'(t) = \ldots = \frac{400-t^2}{(t^2+400)^2}$. För $t > 20$ är alltså h, och därmed även följden i fråga, strängt avtagande. Detta är tillräckligt för att kunna använda Leibnitzkriteriet och vi får att serien är konvergent.

För den andra serien använder vi igen JFK II och då $\dfrac{\dfrac{n}{n^4+400}}{\dfrac{1}{n^3}} \to 1$ är serien absolut konvergent.

(b) Den första integralen är generaliserad i 0 och ∞. Vi delar därför upp integralen som

$$\int_0^1 \frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx + \int_1^\infty \frac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx.$$

För den vänster integralen ser vi $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\dfrac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \arctan(e) > 0$ och den är därmed konvergent enligt jämförelsekriteriet II, ty integralen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ är konvergent. För den höger integralen uppskattar vi integranden för $x > 1$ med $0 \leq \dfrac{\arctan(e^{\sin x})}{\sqrt{x}(x^2+1)} \leq \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{x^2}$ och ser därmed att integralen är konvergent enligt JFK I, ty integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ är konvergent.

Den andre integralen är även generaliserad i $x = 1$. Där beter sig integranden som $\dfrac{1}{x-1}$ och därmed (enligt JFK II) är integralen divergent.

Svar: a) betingat konvergent, absolut konvergent b) konvergent, divergent.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag
Analys A, 7.5 hp
den 5/3 2020

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. *(a) Ange ett värde på konstanten c sådant att funktionen* *3 p*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:\begin{cases} x\ln(x^2+y^2) & (x,y)\neq(0,0)\\ c & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

är kontinuerlig. I vilka punkter är funktionen differentierbar? Motivera dina svar!

(b) Avgör om funktionen *2 p*

$$h(x,y)=\frac{\ln(y+1)}{x} \qquad då \qquad x>0$$

har ett gränsvärde då $(x,y)\to(0,0)$ (med $x>0$).

(a) Om gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar och vi sätter c lika med gränsvärdet, så är f kontinuerlig. Vi använder polära koordinater och betraktar

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=\ldots=2\cos\varphi\cdot r\ln r,$$

som går mot 0 då $(x,y)\to(0,0)$, ty den första faktorn är begränsad och den andra faktorn $r\ln r\to 0$, då $r\to 0$. Alltså är $c=0$.

Funktionen f är i $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en sammansättning av differentierbara funktioner och därmed själv differentierbar där. I origo måste vi undersöka närmare. Men vi ser att f inte är partiellt deriverbar med avseende på x i origo, ty

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\ln h^2$$

existerar inte. Därmed kan f inte vara differentierbar i origo.

(b) Vi betraktar $h(x,x)=\frac{\ln x+1}{x}\to 1$ då $x\to 0$, men $h(x,0)=0$. Därmed existerar gränsvärdet inte.

Svar: a) $c=0$, och f är differentierbar i $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ b) nej, gränsvärdet existerar inte.

2. *Betrakta funktionen $G(x,y)=xy\,e^{x^2-y^2}$.* *5 p*

(a) Undersök om funktionen G antar största och/eller minsta värde i mängden

$$A=\{(x,y):|x-y|\leq 1\}$$

och bestäm dessa extremvärden i förekommande fall.

(b) Vilka värden antar funktionen G i mängden

$$B=\{(x,y):|x-y|<1\}?$$

Vi konstaterar först att mängden A är en sluten, men obegränsad remsa kring första medianen, och B är dess inre. Ingen av mängderna är kompakt. Vi noterar att $G(x,x)=x^2\cdot e^0$ är obegränsad då $x\to\infty$, dvs G har inget största värde, varken i A eller B.

(a) Sen konstaterar vi att $G(x,y)\geq 0$ för (x,y) i första och tredje kvadranten, samt $G(x,y)\leq 0$ för (x,y) i andra och fjärde kvadranten. Eftersom skärningen av de sistnämnda med mängden A är begränsad vet vi att den kontinuerliga funktionen G antar ett minsta värde på den kompakta mängden $D:=\{(x,y)\in A, x\cdot y\leq 0\}$. Detta värde måste vara negativt och därmed även minsta värde för G i A.

För att beräkna minsta värde betraktar vi först ev. stationära punkter i det inre av D. Redan den första ekvationen $G'_x(x,y) = ye^{x^2-y^2}(1+2x^2) = 0$ har dock inga lösningar som kan ligga i det inre, ty $y = 0$. Alltså fortsätter vi med randen av D. Längs koordinataxlarna försvinner funktionen och det återstår att undersöka G längs linjerna $(t, t-1)$ för $t \in [0,1]$ samt $(t, t+1)$ för $t \in [-1, 0]$. Av symmetriskäl räcker det dock att undersöka bara en av dessa, vi väljer den första, dvs

$$h(t) := G(t, t-1) = (t^2 - t)e^{2t-1} \qquad t \in [0,1].$$

Derivation ger $h'(t) = \ldots = (2t^2 - 1)e^{2t-1}$ som har bara ett relevant nollställen, nämligen $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Därmed får vi som minsta värde $h(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}-1}$.

(b) I (a) har vi sett att G antar sitt minsta värde $b := \frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}-1}$ på randen av mängden A (och endast där), dvs i en punkt som är en randpunkt till mängden B men som inte ligger i B. Därmed vet vi att $G(x,y) > b$ för $(x,y) \in B$, samt att G antar värden som är godtyckligt nära b. Dessutom har vi sett att G är uppåt obegränsad i B. Eftersom G är kontinuerlig och definitionsmängden B är bågvis sammanhängande har alltså G egenskap av mellanliggande värden och antar därmed alla värden i det öppna intervallet (b, ∞).

Svar: a) minsta värde $\frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}-1}$, största värde saknas b) G antar i B alla värden större än $\frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}-1}$.

3. *Betrakta funktionen $g(x,y) = (x+y)^3 + \beta(3x^2 + y^2)$ med parametern $\beta \in \mathbb{R}$.* *5 p*

   (a) Bestäm för varje värde på $\beta \neq 0$ alla stationära punkter till g och avgör deras karaktär.

   (b) Bestäm för $\beta = 0$ alla stationära punkter till g och avgör deras karaktär.

Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcl} (I) \quad g'_x & = & 3(x+y)^2 + 6\beta x = 0 \\ (II) \quad g'_y & = & 3(x+y)^2 + 2\beta y = 0. \end{array}$$

(a) I fall $\beta \neq 0$ leder subtraktion till $y = 3x$. Om man stoppar in det i den första ekvationen får man $6x(8x + \beta) = 0$. Dvs vi får två stationära punkter $(0,0)$ och $(-\frac{\beta}{8}, -\frac{3\beta}{8})$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$g''_{xx} = 6(x+y) + 6\beta \qquad g''_{xy} = g''_{yx} = 6(x+y) \qquad g''_{yy} = 6(x+y) + 2\beta.$$

I punkten $(0,0)$ är den kvadratiska formen $Q(h,k) = 6\beta h^2 + 2\beta k^2$. För $\beta > 0$ är den positivt definit och origo är därmed en lokal minimipunkt, medan för för $\beta < 0$ är den negativt definit och origo därmed en lokal maximipunkt.
För punkten $(-\frac{\beta}{8}, -\frac{3\beta}{8})$ är den kvadratiska formen $Q(h,k) = \ldots = 3\beta((h-k)^2 - 4\beta k^2$ som är indefinit för varje värde på $\beta \neq 0$ och därmed är punkten en sadelpunkt.

(b) I fall att $\beta = 0$ får vi en hel linje av stationära punkter, nämligen $(t, -t)$ för $t \in \mathbb{R}$. Alla andra derivator försvinner och därmed är varje kvadratisk form bara semidefinit och avgör inte punktens karaktär. Men vi kan observera att $g(t, -t) = 0$ medan $g(t+h, -t) = h^3$ antar både värden som är större och som är mindre än 0 (i varje omgivning av $h = 0$). Därmed är varje punkt på linjen en sadelpunkt.

Svar: (a) $(-\frac{\beta}{8}, -\frac{3\beta}{8})$ är alltid en saddelpunkt.
I fall $\beta > 0$ är origo en lokala minimipunkt och i fall $\beta < 0$ är origo en lokal maximipunkt.
(b) Varje punkt på linjen $y = -x$ är en sadelpunkt.

4. *Avgör om funktionen $f(x,y,z) = xyz$ har största och/eller minsta värde under bivillkoren*

$$x + y + z = 0 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Bestäm dessa i så fall. *5 p*

Första bivillkoret beskriver ett plan i $\mathbb{R}^3$ och andra bivillkoret enhetsfären. Funktionens definitionsområde är alltså ett cirkel i rummet, och därmed kompakt. Eftersom f är kontinuerlig, så antas både största och minsta värde på denna mängd. Vi konstaterar att det inte finns singulära punkter (på ytorna som ges av bivillkoren) och använder metoden av Lagrangemultiplikatorer, dvs vi betraktar hjälpfunktionen

$$H(x,y,z;\lambda,\mu) := xyz + \lambda(x+y+z) + \mu(x^2+y^2+z^2-1).$$

Partiell derivering ger följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} yz + \lambda + 2x\mu &= 0 \\ xz + \lambda + 2y\mu &= 0 \\ xy + \lambda + 2y\mu &= 0 \end{aligned}$$

samt

$$x + y + z = 0 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Subtraktion av den första och andra ekvationen samt den andra och den tredje ger - efter lite omskrivning -

$$\begin{aligned} (y-x)(z-2\mu) &= 0 \\ (z-y)(x-2\mu) &= 0. \end{aligned}$$

Från den första ekvation har vi antingen $y = x$ eller $z = 2\mu$. Om vi stoppar in $y = x$ i bivillkoren får vi två intressanta punkter $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ (OBS den andra ekvationen är du uppfylld med lämplig μ men värdet på det är ej relevant för lösningen). I andra fallet $z = 2\mu$ ger den andra ekvationen antingen $z = y$ eller $z = 2\mu$, vilket betyder $x = z$. I dessa två fall ger insättning i bivillkoren 4 punkter till, nämligen $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ och $\left(\mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Om vi sätter in dessa i funktionen får vi att största värdet är $\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ och minsta värdet är $-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

5. Lös den partiella differentialekvationen 5 p

$$xF''_{xx} - 4x^3F''_{yy} - F'_x = 16x^3$$

för $x > 0$, till exempel med hjälp av de nya variablerna $s = x^2 - y$ och $t = x^2 + y$.

Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(s,t) := F(x,y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F''_x &= 2x\widetilde{F}'_s + 2x\widetilde{F}'_t \\ F''_{xx} &= 4x^2\widetilde{F}''_{ss} + 8x^2\widetilde{F}''_{st} + 4x^2\widetilde{F}''_{tt} + 2\widetilde{F}'_s + 2\widetilde{F}'_t \\ F''_{yy} &= \widetilde{F}''_{ss} - 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt}. \end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då

$$\widetilde{F}''_{st} = 1.$$

Integration leder till

$$\widetilde{F}(s,t) = st + \varphi(t) + \psi(s)$$

och därmed

$$F(x,y) = (x^2-y)(x^2+y) + \varphi(x^2+y) + \psi(x^2-y),$$

där φ och ψ är tillräckligt många gånger deriverbara funktioner.

6. *(a) Avgör för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:* *5 p*

   i. $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(-\frac{1}{6}\right)^n$

   ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}(-1)^n$

   (b) För vilka $x \in \mathbb{R}$ *är serien* $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ *är konvergent, för vilka divergent?*

(a) i. Vi använder kvotkriteriet och får

$$\left| \frac{\binom{2(n+1)}{n+1} \left(-\frac{1}{6}\right)^{(n+1)}}{\binom{2n}{n} \left(-\frac{1}{6}\right)^n} \right| = \ldots = \frac{(2n+2)(2n+1)}{6(n+1)^2} \to \frac{2}{3} \qquad \text{då } n \to \infty.$$

Eftersom gränsvärdet $\frac{2}{3} < 1$ är serien absolut konvergent.

ii. Eftersom $\cos(n\pi) = (-1)^n$ så är serien lika med

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

dvs. den harmoniska serien, som är alltså divergent.

(b) Vi använder rotkriteriet och får

$$\sqrt[n]{|e^{-nx}|} = e^{-x}.$$

För $x < 0$ är $e^{-x} > 1$ och serien därmed divergent, för $x > 0$ är $e^{-x} < 1$ och serien därmed konvergent. I fallet $x = 0$ måste vi kolla direkt. Eftersom $e^{0 \cdot n} = 1$ inte går mot 0 då $n \to \infty$, så är serien inte konvergent.

Svar: (a) i. konvergent, ii. divergent (b) För $x > 0$ är serien konvergent, för $x \leq 0$ är serien divergent.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN	Lösningsförslag
STOCKHOLMS UNIVERSITET	Analys A, 7.5 hp
Avd. Matematik	den 15/4 2020, kl 9.00-14.00
Annemarie Luger	Inlämning via kurssidan senast kl 16.00

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

0. Låt parametern A vara lika med den näst sista siffran i ditt personnummer.

Lösningsförslaget skrivs med parametern, för att ha alla olika varianter med.

1. *(a) Undersök om gränsvärdet av $\dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$ existerar då $x^2+y^2 \to \infty$.* *2 p*

   (b) Betrakta $h(x,y) = \arctan \dfrac{x^2}{y}$. *3 p*

   i. Undersök om gränsvärdet av $h(x,y)$ existerar då $(x,y) \to (0,0)$ med $y > 0$.

   ii. Undersök om gränsvärdet av $h(x,y)$ existerar då $(x,y) \to (0,0)$ med $y > |x|$.

   iii. Ange en (icke-konstant) funktion $H(x,y)$ sådan att gränsvärdet av produkten $H(x,y) \cdot h(x,y)$ existerar då $(x,y) \to (0,0)$ med $y > 0$.

(a) En möjlighet är användning av polära koordinater:

$$0 \leq \left| \frac{r^3(\cos^3 t + \sin^3 t)}{r^4(\cos^4 t + \sin^4 t)} \right| \leq \frac{2}{r(\cos^4 t + \sin^4 t)} \leq \frac{4}{r}.$$

Med hjälp av instängningsregeln kan vi då dra slutsatsen att $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4} = 0$. Den sista olikheten ovan fås t.ex. genom omskrivningen

$$\cos^4 t + \sin^4 t = \cos^2 t(1-\sin^2 t) + \sin^2 t(1-\cos^2 t) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t \geq \frac{1}{2}.$$

(b) i. I övre halvplanet kan vi välja två olika vägar

$$h(0,y) = \arctan 0 = 0 \quad \text{och } h(x,x^2) = \arctan \frac{x^2}{x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

och därmed existerar gränsvärdet i området $y > 0$ inte.
ii. Observera först att kurvan $y = x^2$ som används ovan inte ligger i området $y > |x|$. Nu kan vi däremot göra en uppskattning

$$0 \leq \frac{x^2}{y} < \frac{y^2}{y} = y$$

och ty arctan-funktionen är monoton får vi

$$0 \leq \arctan \frac{x^2}{y} < \arctan y.$$

Igen instängningsregeln ger att gränsvärdet i detta fall är 0.
(iii) Eftersom h är begränsad så duger t.ex. varje funktion H, sådan att $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} H(x,y) = 0$, t.ex $H(x,y) = y$.

Svar: (a) $\displaystyle\underline{\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^4} = 0}$

(b) i. gränsvärdet existerar inte, ii. gränsvärdet är 0, iii. t.ex. $H(x,y) = y$.

2. *(a) Undersök om $G(x,y) = y\,e^{x^2-y^2}$ antar största och/eller minsta värde i mängden* *4 p*

$$D = \{(x,y) : y \geq |x| + A - 10\}.$$

OBS: Använd ditt värde av A som du har bestämt i fråga 0 ovan.

(b) Ange ett exempel på en begränsad, men icke-kompakt delmängd av $\mathbb{R}^2$. *1 p*

(a) Området består av alla punkter som ligger ovanför kurvan $y = |x| - \widetilde{A}$, där jag för enkelhets skull använder $\widetilde{A} := 10 - A$. Parametern $\widetilde{A}$ kan anta följande värden $1, 2, \ldots ...10$.

Vi konstaterar först att linjen $y = x$ ligger inom området och $G(t,t) = t$ är uppåt obegränsad, alltså antar G inte största värde.

Vi ser att $G \geq 0$ för alla punkter med $y \geq 0$ och $G \leq 0$ för $y \leq 0$. Eftersom

$$D_0 := \{(x,y) \in D, y \leq 0\}$$

är en sluten triangel och därmed kompakt, samt att G är kontinuerlig så antar G minsta värde på D_0 som också är minsta värdet på D.

(b) Om mängden är begränsad men inte kompakt, så får den inte vara sluten. T.ex. den öppna enhetscirkelskivan är en sådan mängd $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

3. *Betrakta funktionen $g(x,y) = x^4 + y^4 - \beta(x-y)^2$ med parametern $\beta \in \mathbb{R}$.*

(a) Bestäm för varje värde på β alla lokala minimipunkter till g. *4 p*

(b) Välj ett värde på β. *1 p*
Ange (för detta värde på β) en mängd M_1 sådan att g antar ett minsta värde på M_1 och ange en mängd M_2 sådan att g inte antar minsta värde på M_2.

(a) Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} (I)\quad g'_x &= 4x^3 - 2\beta(x-y) = 0 \\ (II)\quad g'_y &= 4y^3 + 2\beta(x-y) = 0. \end{aligned}$$

Addition av ekvationerna ger $4x^3 + 4y^3 = 0$, alltså $y = -x$. Från den första ekvationen får vi då efter lite omskrivning $x(x^2 - \beta) = 0$. Därmed har vi (för varje värde på β den stationära punkten $(0,0)$ samt för positiva β två till stationära punkter $(\pm\sqrt{\beta}, \mp\sqrt{\beta})$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$g''_{xx} = 12x^2 - 2\beta \qquad g''_{xy} = g''_{yx} = 2\beta \qquad g''_{yy} = 12y^2 - 2\beta.$$

För båda punkter $(\pm\sqrt{\beta}, \mp\sqrt{\beta})$ är den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \ldots = 10\beta\Big((h + \frac{1}{5}k)^2 + (1 - \frac{1}{25})k^2\Big)$$

positivt definit, ty $\beta > 0$! Båda punkter är alltså lokala minimipunkter.

För punkten $(0,0)$ är den kvadratiska formen $Q(h,k) = \ldots = -2\beta(h-k)^2$ semidefinit och avgör därmed inte karaktären.

Vi tittar igen på $g(x,y) = x^4 + y^4 - \beta(x-y)^2$ och observerar att för $\beta < 0$ gäller $g(x,y) \geq 0 = g(0,0)$ och därmed är $(0,0)$ i detta fall en (även global) minimipunkt. För $\beta > 0$ däremot har vi $g(t,t) = 2t^4 \geq 0$ medan $g(t,0) = t^2(-\beta + t^2)$ antar negativa värden för tillräckligt små t. I detta fall är $(0,0)$ alltså en sadelpunkt. Sammanfattningsvis har vi fått följande:

$\underline{\beta > 0}$: $(\pm\sqrt{\beta}, \mp\sqrt{\beta})$ är lokala minimipunkter och $(0,0)$ är en sadelpunkt.
$\underline{\beta \leq 0}$: den enda stationära punkten $(0,0)$ är en minimipunkt.

(b) Oavsett värdet på β kan mängden M_1 väljas som en godtycklig kompakt mängd ty g är kontinuerlig, t.ex. den slutna enhetscirkelskivan $M_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ett exempel på M_2 får vi t.ex. genom att välja något $\beta \leq 0$ och $M_2 = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$, ty vi har sett att $g(x,y) > 0$ i denna mängd men eftersom $g(0,0) = 0$ och g är kontinuerlig, så antar g i M_2 värden godtyckligt nära 0.

Svar: (a) For $\beta > 0$ är $(\pm\sqrt{\beta}, \mp\sqrt{\beta})$ är lokala maximipunkter, för $b \leq 0$ är endast $(0,0)$ en minimipunkt

(b) t.ex. $M_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ och $M_2 = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$.

4. (a) *Avgör om funktionen* $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ *har största och/eller minsta värde under bivillkoret*

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (A+2)z^2 = 200$$

och bestäm dessa i så fall. *4 p*

OBS1: Använd igen ditt värde för A!

OBS2: Det är ok att svara med "största värdet av dessa tal" utan av numeriskt avgöra vilket som är störst!

(b) *Betrakta kurvan* $x^2 - y^2 = 4$ *(som en delmängd av* $\mathbb{R}^2$*). Ange en funktion, som antar minsta värde på denna mängd men inte största värde.* *1 p*

(a) Bivillkoret beskriver i alla fall en ellipsoid, dvs en kompakt mängd. Funktionen f är inte kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^3$ men kontinuerlig i alla punkter som uppfyller bivillkoret (ty origo inte uppfyller det) och därmed har f både största och minsta värde under bivillkoret.

Vi konstaterar att det inte finns singulära punkter (på ellipsoiden) och använder metoden av Lagrangemultiplikatorer, dvs vi betraktar hjälpfunktionen

$$H(x,y;\lambda) := \frac{1}{x^2+y^2+z^2} + \lambda\big((x-1)^2 + (y+1)^2 + (A+2)z^2 - 200\big).$$

Partiell derivering ger följande ekvationssystem

$$\begin{aligned}
-\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} + 2\lambda(x-1) &= 0\\
-\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} + 2\lambda(y+1) &= 0\\
-\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} + 2\lambda(A+2)z &= 0
\end{aligned}$$

samt

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (A+2)z^2 - 200 = 0.$$

Elimination av λ i den första och andra ekvationen samt i den den andra och den tredje ger - efter lite omskrivning -

$$x = -y \qquad \text{samt} \qquad z\left(y - \frac{1}{A+1}\right) = 0.$$

I den andra ekvationen får vi två fall. Om $z = 0$ så får vi tillsammans med $x = -y$ från bivillkoret punkterna $(11,-11,0)$ och $(-9,9,0)$.

I det andra fallet, nämligen $y = \frac{1}{A+1}$ (OBS $A+1 \neq 0$), så ger bivillkoret $z = \pm\sqrt{\dfrac{200 - 2\frac{(A+2)^2}{(A+1)^2}}{A+2}}$.

Största och minsta värdet finns därför bland funktionsvärdena i dessa punkter, dvs

$$f(11,-11,0) = \frac{1}{242}, \qquad f(-9,9,0) = \frac{1}{162},$$

och

$$f\left(-\frac{1}{A+1}, \frac{1}{A+1}, \pm\sqrt{\frac{200 - 2\frac{(A+2)^2}{(A+1)^2}}{A+2}}\right) = \frac{1}{\frac{2}{(A+1)^2} + \frac{200}{A+2} - \frac{2(A+2)}{(A+1)^2}}.$$

Anmärkning: I alla fall är minsta värdet $\frac{1}{242}$ och största värdet det som ges av punkterna med $z \neq 0$, men det krävs inte i lösningen.

(b) Kurvan är en hyperbel t.ex. funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2$ antar minsta värdet men ej största värde. Den antar minsta värdet eftersom snittet av hyperbeln med en sluten cirkelskiva med radie t.ex. 10 är en kompakt mängd och värdet av den kontinuerliga funktionen f utanför denna mängd är säkert större än i mängden. Därför antar f ett minsta värde i cirkelskivan som även är minsta värdet på hela hyperbeln. Däremot är hyperbeln en obegränsad mängd och därför även f (som ju ange avståndet till origo i kvadrat) obegränsad på hyperbeln.

Ett annat enkelt exempel är $f(x, y) = |x|$. Tydligen är x koordinaten för punkter på hyperbeln antingen större än 2 eller mindre än -2, alltså antar f alla värden större eller lika med 2.

5. *Betrakta differentialekvationen* *5 p*

$$\frac{1}{16x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{12xy^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{36y^4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{16x^3}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{18y^5}\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

för $x > 0$.

(a) *Visa att differentialekvationen i de nya variablerna* $s = x^2 + y^3$ *och* $t = x^2 - y^3$ *blir*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = f.$$

(b) *Lös den partiella differentialekvationen.*

(a) Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(s, t) := F(x, y)$. Att räkna om partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned}
F''_x &= \widetilde{F}'_s 2x + \widetilde{F}'_t 2x \\
F''_{xx} &= \ldots = 4x^2(\widetilde{F}''_{ss} + 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt}) + 2\widetilde{F}'_s + 2\widetilde{F}'_t \\
F''_{xy} &= \ldots = 6xy^2(\widetilde{F}''_{ss} - \widetilde{F}''_{tt}) \\
F''_{yy} &= \ldots = 9y^2(\widetilde{F}''_{ss} - 2\widetilde{F}''_{st} + \widetilde{F}''_{tt}) + 6y\widetilde{F}'_s - 6y\widetilde{F}'_t.
\end{aligned}$$

Differerentialekvationen blir då verkligen

$$\widetilde{F}''_{ss} = F.$$

(b) Lösningen blir då $\widetilde{F}(s, t) = A(t)e^s + B(t)e^{-s}$ och därmed

$$F(x, y) = A(x^2 - y^3)e^{x^2+y^3} + B(x^2 - y^3)e^{-(x^2+y^3)}$$

med tillräckligt många gånger deriverbara funktioner A och B.

6. (a) *Undersök om serien* *2 p*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{2n} \left(-\frac{1}{9}\right)^n$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent.

(b) *För vilka* $x \in \mathbb{R}$ *är serien* $\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n$ *konvergent.* *1 p*

(c) *Undersök om den generaliserade integralen* *2 p*

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2 + 3)}\, dx$$

är konvergent.

(a) Vi använder kvotkriteriet och får

$$\left| \frac{\binom{3(n+1)}{2(n+1)} \left(-\frac{1}{9}\right)^{(n+1)}}{\binom{3n}{2n} \left(-\frac{1}{9}\right)^n} \right| = \ldots = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \cdot \frac{1}{9} \to \frac{3}{4} \quad \text{då } n \to \infty.$$

Eftersom gränsvärdet $\frac{3}{4} < 1$ är serien absolut konvergent.

(b) För att använda rotkriteriet beräknar vi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n(x-1)^n|} = |x-1|$. Därmed får vi att serien är absolut konvergent för $|x-1| < 1$ dvs för $0 < x < 2$ och divergent för $|x-1| > 1$ dvs för $x < 0$ eller $x > 2$. I gränspunkterna $|x-1| = 1$ avgör rotkriteriet inte och vi kollar serien direkt, nämligen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(-1)^n$ och $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(1)^n$. I båda fall går termerna inte mot 0, alltså är serierna divergenta.

(c) Vi konstaterar först att integralen är generaliserad både i $x = 0$ och vid ∞ och delar därför upp integralen t.ex. som

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}\,dx = \int_0^7 \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}\,dx + \int_7^\infty \frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}\,dx.$$

För den första integralen använder vi JFKII och beräknar

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)}}{x^{\frac{1}{4}}} = \ldots = \frac{1}{3},$$

och därmed har den första integralen samma konvergensbeteende som $\int_0^7 \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\,dx$, alltså konvergent. För den andra integralen kan vi t.ex. använda JFKI genom att för $x > 7$ uppskatta $\frac{\arctan x}{x^{\frac{5}{4}}(x^2+3)} \le \frac{\frac{\pi}{4}}{x^2}$. Eftersom $\int_7^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent är även den andra integralen konvergent.

Svar: (a) abolut konvergent (b) konvergent för $0 < x < 1$. (c) konvergent.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Annemarie Luger

Lösningsförslag
Analys A, 7.5 hp
den 19/8 2020, kl 9.00-14.00

Endast kommenterade svar!!! OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

0. *Låt parametern a vara lika med numret på din födelsemånad (t.ex. om du är född i september så är $a = 9$ för dig)*

   Lösningsförslaget skrivs med parametern, för att ha alla olika varianter med.

1. *Undersök följande gränsvärden och beräkna dem i förekommande fall:* *5 p*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}} \qquad \lim_{x^2+y^2\to\infty} e^{-(x^2+4xy+3y^2)}.$$

Kommentar: den första funktionen är alltså $e^{\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}} = \exp\left(\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}\right)$.

Vi börjar med att konstatera att $x^2 + 2xy + 2y^2 \to 0$ då $(x, y) \to (0, 0)$. För att avgöra hur $\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}$ beter sig, måste vi avgöra tecknet hos $x^2 + 2xy + 2y^2$. En möjlighet är kvadratkomplettering $x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2 \geq 0$. Alltså får vi $\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2} \to -\infty$ då $(x, y) \to (0, 0)$ och därmed $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}} = 0$.

I det andra fallet ser vi genom kvadratkomplettering att $-(x^2 + 4xy + 3y^2)$ är en indefinit kvadratisk form och därmed existerar gränsvärdet inte. Vi kan också kolla direkt längs olika linjer

$$\begin{aligned}
(x, y) = (t, 0) &\quad \text{ger} \quad e^{-(x^2+4xy+3y^2)} = e^{-t^2} \to 0 \quad \text{då } t \to \infty,\\
(x, y) = (-2t, t) &\quad \text{ger} \quad e^{-(x^2+4xy+3y^2)} = e^{t^2} \to \infty \quad \text{då } t \to \infty,\\
(x, y) = (t, -t) &\quad \text{ger} \quad e^{-(x^2+4xy+3y^2)} = e^{0} \to 1 \quad \text{då } t \to \infty,
\end{aligned}$$

alltså existerar gränsvärdet $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} e^{-(x^2+4xy+3y^2)}$ inte.

Svar: $\underline{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-1}{x^2+2xy+2y^2}} = 0}$ och $\underline{\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} e^{-(x^2+4xy+3y^2)} \text{ finns inte.}}$

2. Betrakta funktionen $G(x, y, z) = xy - xz - yz + axyz$, där parametern a har värdet från fråga 0.

(a) Bestäm alla stationära punkter till G samt deras karaktär. *4 p*

(b) Avgör om G antar största och/eller minsta värde i mängden *1 p*

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

(a) Vi betraktar ekvationssystemet

$$\begin{array}{rrcl} (I) & G'_x & = & y - z + ayz = 0 \\ (II) & G'_y & = & x - z + axz = 0 \\ (III) & G'_z & = & -x - y + axy = 0. \end{array}$$

Vi försöka lösa ekvationssystemet genom att eliminiera de icke-linjära termerna, t.ex. genom $x \cdot (i) - y \cdot (II) = 0$. Det ger oss ekvationen

$$z(-x + y) = 0.$$

Alltså finns det två fall: $z = 0$ eller $y = x$. Vi betrakta först $z = 0$, då blir ekvationssystemet:

$$\begin{array}{rrcl} (I) & G'_x & = & y = 0 \\ (II) & G'_y & = & x = 0 \\ (III) & G'_z & = & -x - y + axy = 0 \end{array}$$

och vi har fått en stationär punkt $(0, 0, 0)$. I det andra fallet, $y = x$, blir ekvationssystemet

$$\begin{array}{rrcl} (I) & G'_x & = & x - z + axz = 0 \\ (II) & G'_y & = & x - z + axz = 0 \\ (III) & G'_z & = & -2x + ax^2 = 0. \end{array}$$

Ekvation (III) har två lösningar, $x = 0$ som leder till samma stationär punkt, som vi redan har hittat, eller $x = \frac{2}{a}$. Ur ekvation (I) får vi $z = -\frac{2}{a}$, dvs stationära punkten $(\frac{2}{a}, \frac{2}{a}, -\frac{2}{a})$. OBS: $a \neq 0$, ty det är numret på en måndad.

Vi har alltså fått två stationära punkter $(0, 0, 0)$ och $(\frac{2}{a}, \frac{2}{a}, -\frac{2}{a})$. För att bestämma deras karaktär beräknar vi även de andra partiella derivatorna:

$$G''_{xx} = G''_{yy} = G''_{zz} = 0$$

$$G''_{xy} = G''_{yx} = 1 + az \qquad G''_{xz} = G''_{zx} = -1 + ay \qquad G''_{yz} = G''_{zy} = -1 + ax$$

För $(0, 0, 0)$ är den kvadratiska formen $Q(h, k, \ell) = 2hk - 2h\ell - 2k\ell$. Den är indefinit, ty $Q(1, 1, 0) = 2 > 0$ medan $Q(1, -1, 0) = -2 < 0$ och därmed är $(0, 0, 0)$ en sadelpunkt. För den andra stationära punkten är den kvadratiska formen $Q(h, k, \ell) = -2hk + 2h\ell + 2k\ell$ och därmed också indefinit.

(b) Funktionen G är kontinuerlig och mängden K kompakt, alltså antar G i K både största och minsta värde.

Svar: (a) Stationära punkterna är $(0, 0, 0)$ och $(\frac{2}{a}, \frac{2}{a}, -\frac{2}{a})$ och dessa är sadelpunkter.

(b) Största och minsta värde antas.

3. *Låt* $h(x,y) = \dfrac{e^{-(x+y)}}{1+x^2+y^2}$.

(a) *Betrakta mängden* *4 p*

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \text{ och } y \geq 0\}.$$

i. *Avgör om funktionen* h *antar största och/eller minsta värde i området* D_1 *och bestäm dessa i förekommande fall.*

ii. *Ange värdemängden av* h *i området* D_1*, dvs ange mängden av alla värden som* h *antar i* D_1*, och motivera hur du har kommit fram till denna mängd.*

(b) *Avgör om funktionen* h *antar största och/eller minsta värde i området* *1 p*

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}.$$

(a) i. Vi konstatera att mängden D_1 är den slutna första kvadranten, dvs en sluten men ej begränsad mängd. Funktionen h är kontinuerlig i hela sin definitionsmängd.

Minsta värde: Vi ser direkt att $h(x,y) > 0$ för alla (x,y). Men vi har också att t.ex. $h(x,0) = \frac{e^{-x}}{1+x^2} \to 0$ då $x \to \infty$, dvs att det antas värden godtyckligt nära 0. Därmed kan det inte finnas ett minsta värde.

Största värde: Vi observera att, eftersom $x \geq 0$ och $y \geq 0$ så gäller

$$0 < h(x,y) \leq \frac{e^0}{1+x^2+y^2}.$$

I och med att $\frac{1}{1+x^2+y^2} \to 0$ då $x^2+y^2 \to \infty$ följer enligt instängningsregeln att även

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} h(x,y) = 0.$$

Det betyder att för varje $\epsilon > 0$ kan vi kan hitta ett tal R sådan att $h(x,y) < \epsilon$ för alla (x,y) sådana att $x^2+y^2 > R^2$. Ett lämpligt epsilon är då mindre än funktionsvärdena i alla stationära punkter (det finns bara ändligt många). Om vi nu betraktar den kompakta mängden $K := \{(x,y) \in D_1 : x^2+y^2 < R^2\}$ så vet vi att å ena sidan så är h utanför K mindre än ϵ och å andra sidan vet vi att den kontinuerliga funktionen h antar ett största värde i K, dock inte på randen av cirkelbågen. Eftersom ϵ är mindre än detta största värde (enligt hur vi har valt det) är därmed största värdet i K även största värde i D_1.

För att bestämma största värdet börjar vi med att bestämma stationära punkterna:

$$\begin{aligned} h'_x &= \frac{e^{-(x+y)}[-(1+x^2+y^2)-2x]}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ h'_y &= \frac{e^{-(x+y)}[-(1+x^2+y^2)-2y]}{(1+x^2+y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Subtraktion av dessa två ekvationer leder till $x = y$. Om man stoppar det in i t.ex. den första ekvationen, så får man (efter lite omskrivning!) $2x^2+2x+1$, en ekvation som saknar (reella) lösningar. Alltså finns inga stationära punkter i det inre av K.

Randen av K består av tre delar: cirkelbågen, en del av x-axeln och en del av y-axeln. Enligt vår argumentation ovan kan största värdet inte antas på cirkelbågen och det återstår bara att kolla sträckorna $(0,t)$ och $(t,0)$, i båda fall för $t \in [0,R]$. Vi betrakta hjälpfunktionen

$$\widetilde{h}(t) := h(0,t) = h(t,0) = \frac{e^-t}{1+t^2} \quad \text{då } t \in [0,R].$$

Vi får $\widetilde{h}'(t) = \ldots = -e^{-t}\frac{(t+1)^2}{(1+t^2)^2} \geq 0$ och därmed inga lokala extrempunkter i det inre av sträckan. Därmed antas största värdet i hörnpunkten: $h(0,0) = 1$.

ii. Vi har fått att största värdet är 1 och minsta värdet saknas, men vi vet att alla funktionsvärden är större än 0 och att det antas värden godtyckligt nära 0. Funktionen h är kontinuerlig och har därmed egenskapen om mellanliggande värden. Därmed är värdemängden det hela halvöppna intervallet $(0, 1]$.

(b) Minsta värdet saknas pga samma argument som i (a). Men nu saknas även största värdet, ty hela x-axeln ligger i definitionsmängden och vi har $h(x, 0) = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$ växer över alla gränser då $x \to -\infty$.

Svar: (a) i. Minsta värde saknas, största värde 1. ii. intervallet $(0, 1]$
(b) båda största och minsta värdet saknas.

4. *Undersök om funktionen $f(x, y) = x + y$ antar största och/eller minsta värde på kurvan $x^2 + xy + 2y^2 = 7$ med $y \geq 0$ och bestäm dessa i så fall.* 5 p

(a) Kurvan är den delen av andragradskurvan $x^2 + xy + 2y^2 = 7$ som ligger i slutna första och andra kvadranten av planet. För att kolla vilken sorts kurva det handlar om använder vi kvadratkomplettering

$$x^2 + xy + 2y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{7}{4}y^2.$$

Andragradskurvan $(x+\frac{y}{2})^2+\frac{7}{4}y^2 = 7$ är alltså begränsad och därmed en ellips. Den delen som vi är intresserade av är även sluten, alltså kompakt. Eftersom funktionen f är kontinuerlig antar den alltså både största och minsta värde på kurvan. För att bestämma dessa börjar vi med att kolla nödvändiga villkor för inre punkter:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x+y \\ 1 & x+4y \end{vmatrix} = 0.$$

Detta ger $x = 3y$ och genom att stoppa denna relation i bivillkoret får vi (efter lite räkning) ekvationen $y^2 = \frac{1}{2}$ och därmed endast $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ty den andra lösningen $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ inte uppfyller bivillkoret $y \geq 0$). Motsvarande x-koordinat är $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ och funktionsvärdet i denna punkt blir $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}) = \ldots = 2\sqrt{2}$. Kurvans randpunkter hittar vi genom att sätta $y = 0$ och får då två punkter $(\pm\sqrt{7}, 0)$ med motsvarande funktionsvärden $\pm\sqrt{7}$. Största och minsta värde finns nu bland följande värden: $\pm\sqrt{7}, 2\sqrt{2}$. Därmed är

Svar: (a) största värdet $2\sqrt{2}$ och minsta värdet $-\sqrt{7}$.

5. *Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen*

$$(x - y)(F''_{xx} + F''_{yy} - 2F''_{xy}) - 2(F'_x - F'_y) = (x - y)^3$$

till exempel genom variabelbytet $u = xy$ och $v = x + y$. 5 p

(a) Vi använder de nya koordinaterna för att få en differentialekvation för $\widetilde{F}(u, v) := F(x, y)$. Vi får

$$u'_x = y \quad u'_y = x \quad \text{ och } v'_x = v'_y = 1.$$

Användning av kedjeregeln för partiella derivatorna i de nya koordinaterna ger

$$\begin{aligned} F'_x &= \widetilde{F}'_u y + \widetilde{F}'_v \\ F'_y &= \widetilde{F}'_u x + \widetilde{F}'_v. \end{aligned}$$

För andraderivatorna behövs både kedjeregeln och produktregeln, exempelvis:

$$F''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}F'_x = \frac{\partial}{\partial y}(\widetilde{F}'_u y + \widetilde{F}'_v) = \frac{\partial \widetilde{F}'_u}{\partial y}\cdot y + \widetilde{F}'_u + \frac{\partial \widetilde{F}'_v}{\partial y} = \left(\widetilde{F}''_{uu}u'_y + \widetilde{F}''_{uv}v'_y\right)\cdot y + \widetilde{F}'_u + \widetilde{F}''_{vu}u'_y + \widetilde{F}''_{vv}v'_y$$

och därmed

$$\begin{aligned} F''_{xx} &= \ldots = \widetilde{F}''_{uu}y^2 + 2\widetilde{F}''_{uv}y + \widetilde{F}''_{vv} \\ F''_{xy} &= \ldots = \widetilde{F}''_{uu}xy + \widetilde{F}''_{uv}(x + y) + \widetilde{F}''_{vv} + \widetilde{F}'_u \\ F''_{yy} &= \ldots = \widetilde{F}''_{uu}x^2 + 2\widetilde{F}''_{uv}x + \widetilde{F}''_{vv}. \end{aligned}$$

Insättning i differentialekvationen leder till den nya ekvationen

$$\widetilde{F}''_{uu} = 1.$$

Att integrera två gånger ger $\widetilde{F}(u,v) = \frac{u^2}{2} + u \cdot \varphi(v) + \psi(v)$, där φ och ψ är tillräckligt många gånger deriverbara funktioner. Därmed får vi $\underline{F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + xy \cdot \varphi(x+y) + \psi(x+y)}$.

6. *(a) Visa att serien* *2 p*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\ln(k^2+1) - 2\ln k\big)$$

är konvergent.

(b) Undersök om serien *1 p*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\ln(k+1) - \ln k\big)$$

är konvergent.

(c) Undersök om den generaliserade integralen *2 p*

$$\int_0^{\infty} \big(\ln(x^2+1) - 2\ln x\big)dx$$

är konvergent. Motivera ordentligt, dvs om du använder en sats så redogör för vad satsen säger och hur du kollar förutsättningarna.

(a) Termerna i serien kan skrivas om till $\ln(k^2+1) - 2\ln k = \ldots = \ln(1 + \frac{1}{k^2})$ och vi kan använda t.ex. JFK II och jämför med $\frac{1}{k^2}$. Eftersom

$$\frac{\ln(k^2+1) - 2\ln k}{\frac{1}{k^2}} = \frac{\ln(1+\frac{1}{k^2})}{\frac{1}{k^2}} \to 1 \quad \text{då } k \to \infty$$

är serien konvergent, ty serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent. OBS $\ln(k^2+1) - 2\ln k > 0$.

(b) Samma typ av omskrivning och jämförelse med $\frac{1}{k}$ visar att serien är divergent.

(c) Integralen är generaliserad i $x = 0$ och eftersom integrationsintervallet är obegränsat. Därför delar vi upp integralen, t.ex. som

$$\int_0^1 \big(\ln(x^2+1) - 2\ln x\big)dx + \int_1^{\infty} \big(\ln(x^2+1) - 2\ln x\big)dx.$$

I den första integralen är bara integrandens andra termen obegränsad, men explicit räkning (ej gjort här!) visar att $\int_0^1 \ln x dx$ är konvergent och därmed är hela första integralen konvergent.

För den andra integralen kan vi antingen använda JFKII för integraler på liknande sätt som i (a) eller så använder vi Cauchys integralkriteriet, då vi vet att serien i (a) är konvergent. Då måste vi alltså kolla att funktionen $f(x) := \ln(x^2+1) - 2\ln x$ är icke-negativ och avtagande. Vi ser direkt $f(x) = \ldots = \ln(1+\frac{1}{x^2}) > 0$ och eftersom $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \big(-\frac{2}{x^3}\big) < 0$ för $x > 1$ är f avtagande.

Därmed har den andra integralen samma konvergensbeteende som serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$, vilket är den konvergenta serien från (a).

Svar: (a) $\underline{\text{konvergent}}$ (b) $\underline{\text{divergent}}$ (c) $\underline{\text{konvergent.}}$

Lösningar till tentamen

Analys A,
20-10-14.

1.a) Detta är en så kallad teleskoperande serie. Partialsumman s_N kan förenklas enligt följande:

$$s_N = \sum_{k=1}^{\infty} (\ln(k+1) - \ln k) =$$

$$\ln 2 + (\ln(3) - \ln 2) + \ldots + (\ln(N+1) - \ln N)$$

$$= \ln(N+1) \to \infty \quad \text{när} \quad N \to \infty.$$

Serien är alltså divergent. (Det går även att visa detta genom att använda jämförelsekriterium II och jämföra med serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.)

b) Integralen är generaliserad i både 0 och ∞. Vi delar upp integralen i två delar,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}},$$

och undersöker konvergensen hos var och en av delarna. Eftersom

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{x}{x+x^4}} = 1,$$

så följer att

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ konvergent},$$

enligt jämförelsekriterium II. Eftersom den högra integralen är konvergent (med värdet 2) så är även den vänstra det.

För den andra delen kan vi också använda jämförelsekriterium II, fast vi nu jämför med integranden x^{-2} i stället. Eftersom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+x^4}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^4}{x+x^4}} = 1,$$

så följer att

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ konvergent},$$

enligt jämförelsekriterium II. Eftersom den högra integralen är konvergent (med värdet 1) så är även den vänstra det. (Det går även bra att använda jämförelsekriterium I.)

Sammanfattningsvis konvergerar båda delarna och den ursprungliga integralen är alltså konvergent.

2.a) Vi undersöker gränsvärdena längs x-axeln och längs linjen $x = y$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2+0+0)}{\ln(1+t^2+0)} = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2+t^2+t^2)}{\ln(1+t^2+t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2+O(t^4)}{2t^2+O(t^4)} = \frac{3}{2},$$

där vi har MacLaurin-utvecklat $\ln(1+u) = u + O(u^2)$. Då vi får olika gränsvärden längs de båda linjerna saknar funktionen gränsvärde i origo.

b) Vi observerar först olikheterna

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) \le x^2+xy+y^2 \le 2(x^2+y^2),$$

som vidare ger att

$$\frac{1}{2}(1+x^2+y^2) \le 1+x^2+xy+y^2 \le 2(1+x^2+y^2),$$

och till sist

$$\frac{\ln(\frac{1}{2}(1+x^2+y^2))}{\ln(1+x^2+y^2)} \le \frac{\ln(1+x^2+xy+y^2)}{\ln(1+x^2+y^2)} \le \frac{\ln(2(1+x^2+y^2))}{\ln(1+x^2+y^2)}.$$

Med logaritmlagarna kan vi beräkna gränsvärdena av ytterleden:

$$\frac{\ln(\frac{1}{2}(1+x^2+y^2))}{\ln(1+x^2+y^2)} = -\frac{\ln 2}{\ln(1+x^2+y^2)} + 1 \to 1,$$

$$\frac{\ln(2(1+x^2+y^2))}{\ln(1+x^2+y^2)} = \frac{\ln 2}{\ln(1+x^2+y^2)} + 1 \to 1.$$

Enligt instängningslagen följer att också det ursprungliga gränsvärdet blir 1.

3. Vi räknar med kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

På operatorform kan vi skriva

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}.$$

Andraderivatorna kan nu skrivas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Insättning i den ursprungliga ekvationen ger efter förenklingar (och med observationen att $H.L. = (x-y)^2 = u^2$):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = u^2.$$

Vi integrerar två gånger m a p v:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = u^2 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = u^2 v + \phi(u) \Leftrightarrow f = \frac{u^2 v^2}{2} + \phi(u)v + \psi(u),$$

där ϕ och ψ är två stycken två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner. Återgång till de ursprungliga variablerna ger slutligen

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^2 y^2}{2} + \phi(x-y)y + \psi(x-y).$$

4.a) Vi observerar först att $\lim_{x\to\infty} f(x,0,0) = \lim_{x\to\infty} x^4 = \infty$, vilket visar att $\sup f = \infty$ och att maximum inte kan antas. För att visa att minimum faktiskt antas räcker det att visa att $\lim_{x^2+y^2+z^2\to\infty} f(x,y,z) = \infty$. Vi gör detta genom att konstruera en funktion $g(r)$ sådan att $g(r) \to \infty$ då $r \to \infty$ och $f(x,y,z) \geq g(r)$, där $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Observera först att i varje punkt (x,y,z) måste gälla att någon av kvadraterna x^2, y^2, z^2 är större än $\frac{1}{3}r^2$. Det följer att någon av termerna x^4, y^4, z^4 måste vara större än $(\frac{1}{3}r^2)^2 = \frac{1}{9}r^4$, vilket ger olikheten $x^4+y^4+z^4 \geq \frac{1}{9}r^4$. Å andra sidan vet vi att $|x| \leq r, |y| \leq r, |z| \leq r$, vilket leder till att $|xy+yz+zx| \leq |x||y|+|y||z|+|z||x| \leq 3r^2$. Den omvända triangelolikheten ger nu att

$$x^4+y^4+z^4-2(xy+yz+zx) \geq \frac{1}{9}r^4 - 6r^2 \to \infty,$$

vilket visar påståendet.

b) Vi beräknar de stationära punkterna:

$$\begin{cases} f'_x &= 4x^3-2y-2z = 0, \\ f'_y &= 4y^3-2x-2z = 0, \\ f'_z &= 4z^3-2y-2x = 0. \end{cases}$$

Eftersom det var givet att $x = y = z = t$ så reduceras alla tre ekvationerna till $4t^3 - 4t = 0$ med de tre rötterna $t = -1, 0, 1$, vilket ger de tre stationära punkterna $(-1,-1,-1)$, $(0,0,0)$ och $(1,1,1)$.

För att bestämma karaktären av punkten $(0,0,0)$ kan vi beräkna andraderivatorna: $f''_{xx}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = f''_{zz}(0,0) = 0$ och $f''_{xy}(0,0) = f''_{yz}(0,0) = f''_{zx}(0,0) = -2$. Detta ger den kvadratiska formen $Q(h,k,l) = -4hk - 4kl - 4lh$ som är indefinit (t ex gäller ju att $Q(1,1,0) = -4$ medan $Q(-1,1,0) = +4$). $(0,0,0)$ är alltså en sadelpunkt.

Vi kan göra på samma sätt med de två övriga stationära punkterna, men det är enklare att observera att vi från a) vet att funktionen antar globalt min, och eftersom den är partiellt deriverbar måste min-värdet antas i någon av de stationära punkterna. Det kan inte vara i $(0,0,0)$ som ju är en sadelpunkt, och eftersom $f(-1,-1,-1) = f(1,1,1) = -3$ så måste båda de övriga vara globala, alltså speciellt lokala, minpunkter. (För den som valt den andra metoden blir den kvadratiska formen i båda minpunkterna för övrigt lika med $Q = 12h^2+12k^2+12l^2-4hk-4kl-4lh = 12\left(h-\frac{k}{6}-\frac{l}{6}\right)^2 + \frac{35}{3}\left(k-\frac{l}{5}\right)^2 + \frac{56l^2}{5}$ som är positivt definit.)

5. Bivillkoret ger en kompakt mängd: den är sluten och då $\lim_{x^2+y^2\to\infty}(x^4-xy+y^4) \geq \lim_{x^2+y^2\to\infty}(x^4-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+y^4) = \infty$, så måste varje nivåkurva vara begränsad, speciellt gäller detta för kurvan $x^4-xy+y^4 = 1$. Enligt satsen om extremvärden måste största och minsta värde antas.

För att hitta extrempunkterna beräknar vi $\nabla f = (1,1)$ och $\nabla g = (4x^3-y, 4y^3-x)$ där $g(x,y) = x^4-xy+y^4-1$. Vi får

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4x^3-y & 4y^3-x \end{vmatrix} = (4y^3-x)-(4x^3-y)$$

$= 4(y^3-x^3)+(y-x) = (y-x)(4(x^2+xy+y^2)+1)$. Eftersom $x^2+xy+y^2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2+(x+y)^2) \geq 0$ så kan den andra faktorn aldrig vara 0. Det följer att de enda möjliga extrempunkterna måste uppfylla $x = y$. Insättning i bivillkoret ger ekvationen $2x^4 - x^2 = 1$. Med $t = x^2$ får vi $2t^2 - t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\frac{1}{2}$. Eftersom $t = x^2 \geq 0$ återstår bara möjligheten $t = x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, vilket ger punkterna $(1,1)$ och $(-1,-1)$. Vi ser nu att $f(1,1) = 1+1 = 2$ måste vara det största värdet och att $f(-1,-1) = -1-1 = -2$ måste vara det minsta värdet.

6 & 7. För teorifrågorna hänvisas till kurslitteraturen.

/Martin Tamm/201014/

Lösningar till tentamen

Analys A,
20-11-18.

1.a) I detta fall gäller att

$$\lim_{k\to\infty}(-1)^k\sqrt{k}$$

inte existerar, vilket betyder att serien inte kan vara konvergent.

b) Här ser vi i stället att följden $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ är monotont avtagande, och att

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}=0.$$

Eftersom serien är alternerande, följer det av Leibniz kriterium att den är konvergent.

2.a) Vi undersöker gränsvärdena längs x-axeln och längs linjen $x=y$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{t^2+0+0}-1}{e^{t^2+0}-1}=\lim_{t\to 0}1=1.$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{t^2+t^2+t^2}-1}{e^{t^2+t^2}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{3t^2+O(t^4)}{2t^2+O(t^4)}=\frac{3}{2},$$

där vi har MacLaurin-utvecklat $e^u-1=u+O(u^2)$. Då vi får olika gränsvärden längs de båda linjerna saknar funktionen gränsvärde i origo.

b) Det är lättare att se vad som händer om vi förlänger med $e^{-x^2-y^2}$:

$$\frac{e^{x^2+xy+y^2}-1}{e^{x^2+y^2}-1}=\frac{e^{xy}-e^{-x^2-y^2}}{1-e^{-x^2-y^2}}.$$

Eftersom $e^{-x^2-y^2}\to 0$ så går nämnaren mot 1. Men faktorn e^{xy} går mot 1 längs koordinataxlarna och mot $+\infty$ längs linjen $x=t, y=t$. Det följer att täljaren, och därför hela funktionen, saknar gränsvärde precis som i a).

3. Vi räknar med kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Ytterligare en derivation ger

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right)=$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

På samma sätt beräknas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}\right)=$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Insättning i H.L. och V.L. ger nu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial f}{\partial u}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v},$$

dvs vi erhåller ekvationen

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=2\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Vi delar med 2 och sätter $g=\frac{\partial f}{\partial u}$. Då uppfyller g ekvationen

$$2\frac{\partial g}{\partial v}=g\Leftrightarrow\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{1}{2}g=0.$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn $I=e^{-v/2}$ kan ekvationen skrivas

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big(e^{-v/2}g\Big)=0\Leftrightarrow e^{-v/2}g=\phi(u)\Leftrightarrow g=\phi(u)e^{v/2},$$

för någon godtycklig funktion $\phi(u)$ av u. Om vi går tillbaka till f får vi alltså

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\phi(u)e^{v/2}\Leftrightarrow f=\Phi(u)e^{v/2}+\Psi(v),$$

där $\Phi(u)$ är en primitiv till $\phi(u)$ och $\Psi(v)$ är en godtycklig funktion av v. Återgång till de ursprungliga variablerna x,y ger till sist

$$f(x,y)=\Phi(x+y)e^{(x-y)/2}+\Psi(x-y),$$

där Φ och Ψ är två godtyckliga två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner.

4.a) Om vi betraktar linjen $x=y=z=t$ ser vi att

$$g(t)=f(t,t,t)=9t^2-6t^3$$

går mot $\mp\infty$ då $t\to\pm\infty$. Det följer att $f(x,y,z)$ inte kan anta något största eller minsta värde.

b) Vi beräknar de stationära punkterna:

$$\begin{cases} f'_x &= 2(x+y+z)-6yz=0,\\ f'_y &= 2(x+y+z)-6xz=0,\\ f'_z &= 2(x+y+z)-6xy=0.\end{cases}\tag{1}$$

Eftersom de första termerna i dessa ekvationer är lika så blir även de sista lika, dvs

$$6yz = 6xz = 6xy \Leftrightarrow yz = xz = xy. \qquad (2)$$

Vi visar nu att dessa villkor medför att $x = y = z$. Om vi t ex tar den första likheten, $yz = xz$, så kan denna skrivas som $(y-x)z = 0$. Vi ser att antingen gäller att $x = y$ eller så måste $z = 0$. Men om $z = 0$ så ser vi från (2) att då blir även $xy = 0$, dvs $x = 0$ eller $y = 0$. Om nu både $y = 0$ och $z = 0$ så följer av den första ekvationen i (1) att även $x = 0$. På samma sätt leder antagandet att $y \neq z$ eller att $x \neq z$ till $x = y = z = 0$. Slutsatsen blir alltså att den enda möjligheten är att $x = y = z$.

Om vi sätter in $x = y = z = t$ i vilken som helst av de tre derivatorna så reduceras denna till $2(t + t + t) - 6t^2 = 0 \Leftrightarrow t - t^2 = 0$ med de två rötterna $t = 0, 1$, vilket ger de två stationära punkterna $(0, 0, 0)$ och $(1, 1, 1)$.

För att bestämma karaktären av punkten $(1, 1, 1)$ kan vi beräkna andraderivatorna: $f''_{xx}(1, 1, 1) = f''_{yy}(1, 1, 1) = f''_{zz}(1, 1, 1) = 2$ och $f''_{xy} = 2-6z \Rightarrow f''_{xy}(1, 1, 1) = -4$, $f''_{yz} = 2-6x \Rightarrow f''_{yz}(1, 1, 1) = -4$, $f''_{xz} = 2 - 6y \Rightarrow f''_{xz}(1, 1, 1) = -4$. Detta ger den kvadratiska formen

$$Q(h, k, l) = 2h^2 + 2k^2 + 2l^2 - 8hk - 8kl - 8lh =$$

$$(h - 2k - 2l)^2 - 3(k + 2l)^2 + 9l^2,$$

som är indefinit. $(1, 1, 1)$ är alltså en sadelpunkt.

Om vi nu betraktar punkten $(0, 0, 0)$ så är det lätt att se att den associerade kvadratiska formen är $Q = (h + k + l)^2$ som är semidefinit. Vi kan alltså inte direkt dra någon slutsats. Men det ligger nära tillhands att studera planet $x + y + z = 0$. En linje i detta plan som går genom $(0, 0, 0)$ ges av $x = t, y = t, z = -2t$. Insatt i $f(x, y, z)$ får vi funktionen

$$h(t) = f(t, t, -2t) = 12t^3.$$

Eftersom denna funktion antar både strikt positiva och strikt negativa värden godtyckligt nära origo så måste även denna punkt vara en sadelpunkt.

Anmärkning: I efterhand kan vi konstatera att vi har ytterligare ett bevis för att funktionen inte kan anta max eller min: Det finns helt enkelt inga stationära punkter där max eller min skulle kunna antas!

5. Det är klart att det måste finnas någon punkt som minimerar avståndet till origo: vi observerar att det räcker att minimera avståndsfunktionen över skärningen av kurvan med en (kompakt) cirkelskiva som är tillräckligt stor för att innehålla någon punkt på kurvan för att erhålla minimum. Existensen av minimum följer därför av satsen om extremvärden.

För att visa att maximum inte antas räcker det att observera att det för varje x finns ett y sådant att punkten $P = (x, y)$ ligger på kurvan. Detta följer av att den reella tredjegradsekvationen $xy^3 + x^3y = 2$ för y alltid har en lösning (utom då $x = 0$). Eftersom avståndet från P till origo alltid är större $|x|$, som kan väljas godtyckligt stort, följer att det inte finns något maximalt anstånd till origo.

För att hitta extrempunkterna betraktar vi $f(x, y) = x^2 + y^2$ (avståndsfunktionen i kvadrat) och beräknar $\nabla f = (2x, 2y)$ och $\nabla g = (y^3 + 3x^2y, 3xy^2 + x^3)$ där $g(x, y) = xy^3 + x^3y - 2$. Vi får

$$0 = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y^3 + 3x^2y & 3xy^2 + x^3 \end{vmatrix} =$$

$$2x(3xy^2 + x^3) - 2y(y^3 + 3x^2y) = 2x^4 - 2y^4.$$

Vi får $x^4 = y^4$ som ger att $x = y$ eller $x = -y$.
Fallet $x = y$: Insatt i bivillkoret får vi $y^4 + y^4 = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1$, vilket ger punkterna $(1, 1)$ och $(-1, -1)$.
Fallet $x = -y$: Insatt i bivillkoret får vi ekvationen $-y^4 - y^4 = 2$, som saknar lösning.
Vi ser nu att $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1^2 + 1^2 = 2$ är det enda möjliga extremvärdet som alltså måste vara det globala min-värdet. Det kortaste avståndet blir därför roten ur detta, dvs $\sqrt{2}$.

/Martin Tamm/201118/

STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
22 oktober 2021

Tentamen i Sannolikhetsteori I

22 oktober 2021 kl. 8–13

Examinator: Maria Deijfen, 070-3369790, mia@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och normalfördelningstabell. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
Återlämning: Tentaresultatet läggs in i ladok senast fredag 5 november.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) I tärningspoker kastas fem tärningar simultant. Låt A vara händelsen att (minst) två av tärningarna kommer upp med samma siffra, B händelsen att (minst) tre av tärningarna kommer upp med samma siffra, och C händelsen att man får kåk (dvs ett par och ett tretal). Vad är sant?

1. $C = A \cup B$
2. C kan inte uttryckas med hjälp av A och B på något enkelt sätt
3. $C = A \cap B$

b) Fyra norrmän, tre finnar och sex svenskar ska placeras på en rad med tretton stolar. Hur många placeringar finns det om alla personer av samma nationalitet måste sitta bredvid varandra?

1. $4!3!6!13^3$
2. $4!3!6!3!$
3. $\binom{13}{4}\binom{9}{3}\binom{6}{6}$

c) Låt $F(x)$ vara fördelningsfunktionen för den stokastiska variabeln X. Vilken fördelningsfunktion har variabeln $Y = aX + b$, där a och b är konstanter och $a > 0$?

1. $F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{a+b}\right)$
2. $F_Y(y) = F_X(ay + b)$
3. $F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$
4. $F_Y(y) = aF_X(y) + b$

d) Låt X och Y vara stokastiska variabler med $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \sigma^2 > 0$ och $\text{Var}(X + Y) = 2\sigma^2$. Vad är sant?

1. Man kan inte avgöra om X och Y är oberoende och inte heller om $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
2. X och Y är oberoende, men man kan inte avgöra om $\text{Cov}(X, Y) = 0$ eller inte.
3. $\text{Cov}(X, Y) = 0$ och X och Y är oberoende.
4. $\text{Cov}(X, Y) = 0$ men man kan inte avgöra om X och Y är oberoende.

e) Låt $X_1, \ldots, X_{10}$ var oberoende $N(2, 4)$-fördelade. Den största av de tio stokastiska variablerna har fördelningsfunktion F_{max}. Vad gäller?

1. $F_{max}(0) = 1 - 4^{-10}$
2. $F_{max}(0) = 4^{-10}$
3. $F_{max}(2) = 2^{-10}$
4. $F_{max}(2) = 1 - 2^{-10}$

Uppgift 2

För händelserna A och B gäller att $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.12$ och $P(A \cup B) = 0.32$.

a) Beräkna sannolikheten att ingen av händelserna A och B inträffar.

b) Beräkna sannolikheten att både A och B inträffar.

c) Beräkna sannolikheten att exakt en av händelserna A och B inträffar.

Uppgift 3

Den diskreta stokastiska variabeln X kan bara anta värdena 0, 1, 2 och 3. Man vet att $p(1) = 0.2$, $p(2) = 0.3$ och $p(3) = 0.4$. Beräkna:

a) $p(0)$;

b) $P(X > 1)$;

c) $\mathbf{E}[X]$;

d) $\text{Var}(X)$.

Svårare del

Uppgift 4

När man tillverkar gem utgår man från en metalltråd med längden 1.6 meter. Tråden kapas, böjs till i gem-form och samtliga gem förpackas sedan i en kartong med texten "100 gem". Om det på slutet återstår en liten trådbit som inte räcker till ett gem så slängs denna bit. Längden på metalltråden hos ett gem ska vara 15.9 mm men kan variera något. Antag att längden beskrivs av en stokastisk variabel med väntevärde 15.9 mm och standardavvikelse 0.5 mm.

a) Beräkna sannolikheten att kartongen innehåller minst 100 gem.

b) Hur lång metalltråd måste man utgå ifrån för att sannolikheten att kartongen innehåller minst 100 gem ska vara 99.9%?

Uppgift 5

Man har fem bollar och för var och en av bollarna kastar man ett symmetriskt mynt för att bestämma färgen på bollen: Om man får krona målas bollen vit, om man får klave målas bollen röd. De målade bollarna stoppas in i en låda. Sedan drar man en boll slumpvis fem gånger ur lådan med återläggning. Antag nu att den dragna bollen är vit varje gång. Vad är då (givet att bollen är vit varje gång) sannolikheten att alla fem bollar i lådan är vita?

Uppgift 6

En punkt väljs likformigt på intervallet $[0, 2]$. Punkten delar intervallet i två delar. Bilda en rektangel med bas som har längd som den ena delen av intervallet och höjd som den andra delen av intervallet.

a) Beräkna sannolikheten av arean av rektangeln är mindre än 0.5.

b) Beräkna kovariansen mellan rektangelns area och bas.

Lycka till!

STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
26 november 2021

Tentamen i Sannolikhetsteori I

26 november 2021 kl. 14–19

Examinator: Maria Deijfen, 070-3369790, mia@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och normalfördelningstabell. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
Återlämning: Tentaresultatet läggs in i ladok senast fredag 10 december.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa och eventuella approximationer ska motiveras. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) Antag att händelserna E och F är disjunkta och att $\mathbb{P}(E) > 0$ och $\mathbb{P}(F) > 0$. Påståendet 'E och F är oberoende' är

1. möjligtvis sant
2. alltid falskt
3. alltid sant

b) Låt X vara en stokastisk variabel med $\mathbf{E}[X] = 10$ och $\mathrm{Var}(X) = 15$. Vad är $\mathbf{E}[X^2]$?

1. $\mathbf{E}[X^2] = 1225$
2. $\mathbf{E}[X^2] = 1015$
3. $\mathbf{E}[X^2] = 325$
4. $\mathbf{E}[X^2] = 115$

c) Bestäm $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}} dx$. Ledning: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ är täthetsfunktionen för en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärde μ och varians σ^2.

1. $8\sqrt{2\pi}$
2. $\sqrt{2\pi}$

3. $2\sqrt{2\pi}$
4. 79
5. $4\sqrt{2\pi}$

d) En urna innehåller fem svarta kulor och fem röda kulor. Vi drar två kulor med återläggning (dvs när vi dragit första kulan lägger vi tillbaka den innan vi drar andra gången). Låt X_1 och X_2 vara definierade genom

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{om } i\text{:te kulan svart;} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Definera Y_1 och Y_2 analogt då vi drar utan återläggning (dvs den dragna kulan läggs inte tillbaka i urnan innan vi drar en andra gång). Vad gäller?

1. X_1 och X_2 är oberoende och Y_1 och Y_2 är oberoende.
2. X_1 och X_2 är oberoende men Y_1 och Y_2 är inte oberoende.
3. X_1 och X_2 är inte oberoende men Y_1 och Y_2 är oberoende.

e) Låt X och Y vara stokastiska variabler med $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 23$. Vad är sant?

1. $\text{Cov}(X, Y) = 23$
2. $\text{Cov}(X, Y) \geq -23$
3. $\text{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{23}$
4. Man kan inte dra några slutsatser om $\text{Cov}(X, Y)$.

Uppgift 2

Det finns tre olika fågelarter på en ö och vissa av fåglarna är ringmärkta. Av fåglarna är 45% av art 1 (10% av dessa är ringmärkta), 38% av art 2 (15% av dessa är ringmärkta) och 17% av art 3 (50% av dessa är ringmärkta).

a) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald fågel är ringmärkt?

b) Man observerar att en fågel inte är ringmärkt. Vad är sannolikheten att den är av art 2?

Uppgift 3

Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2x} & \text{om } x \geq 0; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm c.

b) Beräkna $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

c) Ange fördelningsfunktionen för X.

Svårare del

Uppgift 4

En grupp om $n \geq 3$ personer kastar samtidigt varsitt symmetriskt mynt. Om någon person får ett unikt resultat (dvs personen får krona medan alla andra får klave, eller personen får klave medan alla andra får krona) så vinner den personen. Finns ingen person som har ett unikt resultat anses omgången oavgjord. Man upprepar detta tills en vinnare utses.

a) Vad är sannolikheten att det krävs m omgångar för att utse en vinnare?

b) Vad är det förväntade antalet omgångar som krävs om $n = 10$?

Uppgift 5

Livslängderna hos en viss typ av elektroniska komponenter beskrivs av oberoende lika fördelade stokastiska variabler. Den förväntade livslängden är okänd och för att uppskatta denna planerar man att mäta livslängden hos 250 komponenter och använda den genomsnittliga livslängden bland dessa som uppskattning. Om standardavvikelsen för livslängden hos en komponent är 40 månader, vad är då sannolikheten att uppskattningen avviker högst 5 månader från den sanna förväntade livslängden?

Uppgift 6

Låt X och Y vara oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler med parameter λ_1 respektive λ_2. Härled täthetsfunktionen för X/Y.

Lycka till!